A. L. Pavlov, Existence of solutions to the Cauchy problem for some class of Sobolev-type equations in the space of tempered distributions, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 824–844

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.410>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.164.48.24

April 26, 2023, 16:16:29

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА
УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КЛАССЕ
ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

А. Л. Павлов

Аннотация. Приведены достаточные условия существования решения задачи Коши для уравнения $P_1(D_x)\partial_t u - P_0(D_x)u = 0$ в пространстве медленно растущих обобщенных функций.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.410

Ключевые слова: задача Коши, уравнение соболевского типа, обобщенная функция медленного роста, мультипликатор.

1. Введение

В полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$ рассматривается задача Коши

$$P_1(D_x)\partial_t u - P_0(D_x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = g_0, \quad (1.2)$$

где $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$, $D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$, $P_1(\sigma)$, $P_0(\sigma)$ — многочлены с комплексными коэффициентами.

Уравнение (1.1) является уравнением соболевского типа. Так часто называют уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной. Исследование задач для таких уравнений начато С. Л. Соболевым в [1]. Этому классу уравнений принадлежит уравнение медленных волн Россби

$$\Delta \partial_t u + \beta \partial_{x_2} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, \quad (1.3)$$

широко используемое в океанологии [2].

Будем предполагать, что уравнение (1.1) удовлетворяет условию Петровского в таком виде:

$$P_1(\sigma)\lambda(\sigma) - P_0(\sigma) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda(\sigma) = \operatorname{Re} \frac{P_0(\sigma)}{P_1(\sigma)} \leq \gamma. \quad (P)$$

Уравнение медленных волн Россби удовлетворяет этому условию, а именно,

$$|\sigma|^2 \lambda(\sigma) - \beta i \sigma_2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda(\sigma) = \operatorname{Re} \frac{i\beta \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 0.$$

Если $P_0(\sigma) \equiv 0$, то задача (1.1), (1.2) не представляет интереса. Поэтому будем предполагать, что $P_0(\sigma) \not\equiv 0$.

В настоящее время имеется огромное количество работ, посвященных задачам для уравнений и систем уравнений соболевского типа. Это связано с их широким использованием в математическом моделировании многих процессов. В монографиях [2, 3] представлены обширные перечни работ по данному направлению. Однако работ, в которых рассматривалось решение задачи Коши для уравнений соболевского типа в классах растущих функций, сравнительно немного (см. [4–7] и литературу в них).

Под решением задачи (1.1), (1.2) часто понимают обобщенную функцию $u(t)$, зависящую гладко от параметра t и удовлетворяющую (1.1), (1.2) в обобщенном смысле. Такие решения будем называть *сильными обобщенными решениями*. *Слабым обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) называют обобщенную функцию u , сосредоточенную в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ и удовлетворяющую уравнению

$$P_1(D_x)\partial_t u - P_0(D_x)u = P_1(D_x)g_0 \otimes \delta_t, \quad (1.4)$$

где δ_t — дельта-функция на $\mathbb{R}$ [6]. Нетрудно убедиться в том, что всякое сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) является слабым обобщенным решением.

В настоящей работе рассматриваются сильные обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) со значениями в пространстве медленно растущих обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n)$.

После применения преобразования Фурье по пространственным переменным задача (1.1), (1.2) принимает вид

$$P_1(\sigma)d_t \hat{u}(t) - P_0(\sigma)\hat{u}(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

$$\hat{u}(t)|_{t=0} = \hat{g}_0, \quad (1.6)$$

где $\hat{f}$ — преобразование Фурье обобщенной функции f . В силу изоморфности рассматриваемых в работе пространств относительно преобразования Фурье задачи (1.1), (1.2) и (1.5), (1.6) эквивалентны. В дальнейшем будет изучаться задача (1.5), (1.6).

Если выполнено условие (P) и $\hat{g}_0$ — обычная функция, то решением задачи (1.5), (1.6) при каждом $\sigma \notin N_1 = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : P_1(\sigma) = 0\}$ является функция

$$v(\sigma, t) = \eta(t)e^{a(\sigma)t}\hat{g}_0, \quad (1.7)$$

где $\eta(t) = 1$, если $t \geq 0$, и $\eta(t) = 0$, если $t < 0$, $a(\sigma) = \frac{P_0(\sigma)}{P_1(\sigma)}$.

Можно доказать, что для любой обобщенной функции медленного роста $\hat{g}_0$, носитель которой не содержит точек множества N_1 , обобщенная функция (1.7) является сильным обобщенным решением задачи (1.5), (1.6).

Задача состоит в описании более широкого множества начальных данных, для которых задача (1.5), (1.6) имеет сильное обобщенное решение. Решение этой задачи может быть основано на описании подпространств пространства медленно растущих обобщенных функций, в которых функция $e^{a(\sigma)t}$ является мультипликатором, гладко зависящим от параметра t , т. е. умножение на эту функцию элементов этого подпространства является непрерывным отображением этого подпространства в себя, гладко зависящим от t .

Анализ работ, посвященных разрешимости задачи Коши для уравнений, не разрешенных относительно выделенной переменной в классах функции степенного роста, в частности [7], в которой приведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в указанных классах функций для одного

простейшего уравнения соболевского типа, показывает, что элементы искомого подпространства в окрестности множества N_1 могут иметь вид $P_1^k(\sigma)f$, где показатель k зависит от порядка регулярности обобщенной функции f .

Главная цель работы состоит в построении решения задачи (1.5), (1.6) для начальных данных указанного вида с использованием конструкции (1.7). Это построение основано на исследовании свойств функций $a(\sigma, t) = e^{a(\sigma)t}$ и $P_1^k(\sigma)e^{a(\sigma)t}$. Функция $a(\sigma, t)$ бесконечно дифференцируема вне множества N_1 , и ее производные имеют степенные особенности в точках $\sigma \in N_1$ при выполнении условия (Р). Эти особенности можно «погасить», умножив функцию $a(\sigma, t)$ на функцию, имеющую нули на множестве N_1 достаточной кратности, например, на $P_1^k(\sigma)$. При соответствующем выборе k можно обеспечить дифференциальные свойства функции $P_1^k(\sigma)a(\sigma, t)$, необходимые для того, чтобы на нее можно было умножать обобщенные функции заданного порядка регулярности. Это позволит строить решения задачи (1.5), (1.6) по формуле (1.7) для начальных данных, которые в окрестности множества N_1 имеют указанную структуру. Преобразование Фурье по пространственным переменным дает решение задачи Коши (1.1), (1.2) для начальных данных вида $P_1^k(D_x)f$.

2. Функциональные пространства и мультипликаторы в них

Ниже приведены краткие сведения о тех функциональных пространствах, которые будут использованы для реализации указанной цели.

Пространство медленно растущих обобщенных функций S' является пространством линейных непрерывных функционалов над основным пространством $S(\mathbb{R}^n)$, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых конечны полунормы

$$\|\varphi(x)\|_{l,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[(1 + |x|)^l \sum_{|\alpha| \leq k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right], \quad l, k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим семейство подпространств S' , зависящих от параметров s и l :

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1 + |\sigma|^2)^s |\mathcal{F}_x((1 + |x|^2)^{l/2} f)|^2 d\sigma \right]^{1/2} < +\infty \right\},$$

где $\mathcal{F}_x g$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$ [8]. Это двухпараметрическое семейство гильбертовых пространств обладает замечательными свойствами:

- 1) сопряженное к пространству H_l^s изоморфно пространству H_{-l}^{-s} ;
- 2) пространства H_l^s и H_s^l двойственны относительно преобразования Фурье $\mathcal{F}_x$;
- 3) S' является индуктивным пределом семейства пространств H_l^s .

Из свойства 3 следует, что для любой обобщенной функции $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ существуют такие числа s и l , что $g \in H_l^s$. Пространство H_l^s можно рассматривать как пополнение $S(\mathbb{R}^n)$ по указанной норме. Следовательно, $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H_l^s .

Так как результаты будут сначала формулироваться для задачи (1.5), (1.6), полученной из исходной с помощью преобразования Фурье, для удобства изложения будем формулировать утверждения, обозначая рассматриваемые пространства через H_s^l .

При целых неотрицательных l пространство H_0^l совпадает с пространством Соболева W_2^l , в частности $H_0^0 = L_2$.

Как показано в [8], f принадлежит H_s^l тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$f = (1 + |\sigma|^2)^{-s/2} (1 + |D|^2)^{-l/2} h = (1 + |D|^2)^{-l/2} (1 + |\sigma|^2)^{-s/2} \psi, \quad (2.1)$$

где через $(1 + |D|^2)^{-l/2}$ обозначен псевдодифференциальный оператор, символ которого равен $(1 + |x|^2)^{-l/2}$, $h \in L_2$, $\psi \in L_2$ и $\|h\|_{L_2} = \|\psi\|_{L_2} = \|f\|_s^l$.

Лемма 2.1. Если обобщенная функция f принадлежит пространству H_s^l , $l \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$, то $(1 + |\sigma|^2)^{s/2} \partial^\alpha f \in L_2$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leq l$, и справедливы неравенства

$$c \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} (1 + |\sigma|^2)^s |\partial^\alpha f|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq \|f\|_s^l \leq C \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} (1 + |\sigma|^2)^s |\partial^\alpha f|^2 d\sigma \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

где $c > 0$, $C > 0$ — некоторые числа, не зависящие от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $s = 0$ утверждение справедливо (см., например, [9, VI.2]). Для рассмотрения утверждения при любом $s \in \mathbb{R}$ понадобится неравенство

$$|\partial^\alpha (1 + |\sigma|^2)^{s/2}| \leq \tilde{c}_\alpha (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2} - \frac{|\alpha|}{2}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (2.3)$$

где $\tilde{c}_\alpha > 0$ — некоторое число, зависящее от s .

Если $|\alpha| = 1$, то неравенство (2.3) справедливо:

$$\begin{aligned} |\partial_i (1 + |\sigma|^2)^{s/2}| &= |s/2 (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-1} 2\sigma_i| \\ &\leq c_i (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-1} (1 + |\sigma|^2)^{1/2} = c_i (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Предположим, что неравенство (2.3) верно для всех мультииндексов α , $|\alpha| \leq k$, и $\alpha' = \alpha + \gamma_i$, $|\gamma_i| = 1$. Воспользовавшись формулой Лейбница, получим

$$\begin{aligned} |\partial^{\alpha'} (1 + |\sigma|^2)^{s/2}| &= \left| \partial^\alpha \left(\frac{s}{2} (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-1} \right) 2\sigma_i \right| \leq c'_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} |\partial^\beta (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-1}| |\partial^{\alpha-\beta} \sigma_i| \\ &\leq c''_\alpha ((1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-1-\frac{|\alpha|}{2}} |\sigma_i| + (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-1-\frac{|\alpha|-1}{2}}) \leq \tilde{c}_\alpha (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}-\frac{|\alpha'|}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (2.3) справедливо.

Из равенств (2.1) для произвольной обобщенной функции $f \in H_s^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$ следует равенство

$$(1 + |\sigma|^2)^{s/2} \partial^\alpha f = (1 + |\sigma|^2)^{s/2} \partial^\alpha ((1 + |\sigma|^2)^{-s/2} (1 + |D|^2)^{-l/2} h), \quad |\alpha| \leq l,$$

где $h \in L_2$, ∂^α — оператор дифференцирования в пространстве S' .

Оператор $(1 + |D|^2)^{-l/2}$ осуществляет изоморфизм между пространствами $H_0^0 = L_2$ и H_0^l , а оператор ∂^α отображает непрерывно пространство H_0^l в $H_0^{l-|\alpha|}$. Так как $l \in \mathbb{Z}_+$, функция $(1 + |\sigma|^2)^{-s/2} (1 + |D|^2)^{-l/2} h$, $h \in L_2$, является обычной функцией, как и ее обобщенные производные до порядка l .

Воспользовавшись полученным представлением функции $(1 + |\sigma|^2)^{s/2} \partial^\alpha f$, формулой Лейбница и неравенством (2.3), получим оценку

$$|(1 + |\sigma|^2)^{s/2} \partial^\alpha f| \leq \tilde{C}_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} (1 + |\sigma|^2)^{\frac{-|\alpha-\beta|}{2}} |\partial^\beta (1 + |D|^2)^{-l/2} h|. \quad (2.4)$$

Так как оператор $\partial^\beta(1 + |D|^2)^{-l/2}$ отображает непрерывно L_2 в пространство $H_0^{l-|\beta|}$, принадлежащее L_2 при $|\beta| \leq l$, все слагаемые правой части неравенства (2.4) принадлежат пространству L_2 при $|\alpha| \leq l$. Следовательно, $(1 + |\sigma|^2)^{s/2} \partial^\alpha f \in L_2$, $|\alpha| \leq l$.

Из неравенства (2.4) и свойства оператора $\partial^\alpha(1 + |D|^2)^{-l/2}$ следует неравенство

$$\left(\int (1 + |\sigma|^2)^s |\partial^\alpha f|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq \frac{1}{c_\alpha} \|h\|_{L_2} = \frac{1}{c_\alpha} \|f\|_s^l.$$

Значит, левое неравенство в (2.2) справедливо.

Оператор умножения на функцию $(1 + |\sigma|^2)^{s/2}$ отображает пространство H_s^l в H_0^l . Следовательно, если $f \in H_s^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, то $(1 + |\sigma|^2)^{s/2} f \in H_0^l$ и, как отмечено выше, справедливо неравенство

$$\|f\|_s^l = \|(1 + |\sigma|^2)^{s/2} f\|_0^l \leq C_1 \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} |\partial^\alpha (1 + |\sigma|^2)^{s/2} f|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

Применив в правой части полученного неравенства формулу Лейбница и неравенство (2.3), получим

$$\begin{aligned} \|f\|_s^l &\leq C_2 \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} \sum_{\beta \leq \alpha} |\partial^\beta (1 + |\sigma|^2)^{s/2}|^2 |\partial^{\alpha-\beta} f|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C_3 \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} \sum_{\beta \leq \alpha} (1 + |\sigma|^2)^{s-|\beta|} |\partial^{\alpha-\beta} f|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int \sum_{|\gamma| \leq l} (1 + |\sigma|^2)^s |\partial^\gamma f|^2 d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо и правое неравенство в (2.2). $\square$

Через C_l^r , $r \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{R}$, обозначим пространство непрерывно дифференцируемых функций до порядка r с конечной нормой

$$|\varphi|_l^r = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq r} |(1 + |x|^2)^{l/2} \partial^\alpha \varphi|.$$

Пространство C_l^r банахово. Связь шкал пространств $\{C_l^r\}$ и $\{H_l^r\}$ отражают неравенства [8]

$$\|\varphi\|_{l-p}^r \leq c_1 |\varphi|_l^r \leq c_2 \|\varphi\|_l^{r+q}, \quad p, q > \frac{n}{2}. \quad (2.5)$$

Через $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma, p \in \mathbb{R}$, обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых отображений $v(t)$ замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ в гильбертово пространство H_s^l с конечной нормой:

$$\|v(t)\|_{C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} \equiv \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+, 0 \leq \nu \leq r} \left[(1+t)^{-p} e^{-\gamma t} \left\| \frac{d^\nu v(t)}{dt^\nu} \right\|_s^l \right].$$

Пространство $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ банахово. Преобразование Фурье по пространственным переменным отображает изоморфно $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ на $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$.

Аналогично определяется пространство $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k)$, которое тоже банахово:

$$\|v(t)\|_{C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k)} \equiv \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+, 0 \leq \nu \leq r} \left[(1+t)^{-p} e^{-\gamma t} \left| \frac{d^\nu v(t)}{dt^\nu} \right|_l^k \right].$$

Имеют место непрерывные вложения:

$$H_s^l \subset H_{s'}^{l'}, \quad s \geq s', \quad l \geq l', \quad C_l^r \subset C_{l'}^{r'}, \quad r \geq r', \quad l \geq l';$$

$$C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l) \subset C_{\gamma p}^{r'}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'}), \quad s \geq s', \quad l \geq l';$$

$$C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l) \subset C_{\gamma' p'}^{r'}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l), \quad r \geq r', \quad \gamma \leq \gamma', \quad p \leq p';$$

$$C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k) \subset C_{\gamma p}^{r'}(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{l'}^{k'}), \quad k \geq k', \quad l \geq l'.$$

Учитывая эти вложения, можно с помощью операции объединения построить пространства

$$H_{-\infty}^l = \bigcup_s H_s^l, \quad H_s^{-\infty} = \bigcup_l H_s^l, \quad C_{-\infty}^r = \bigcup_l C_l^r,$$

$$C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{-\infty}^l) = \bigcup_s C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l), \quad C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{-\infty}^k) = \bigcup_l C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k),$$

$$C_{\gamma \infty}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l) = \bigcup_p C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l), \quad C_{\gamma \infty}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{-\infty}^l) = \bigcup_s \bigcup_p C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l).$$

В топологии индуктивного предела эти пространства полные локально выпуклые.

Обозначим через $C_{\gamma p}^{rk}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ множество функций $u(x, t)$, определенных в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+$, r раз непрерывно дифференцируемых по t , имеющих непрерывные производные по x до порядка k и удовлетворяющих неравенствам

$$(1+t)^{-p} e^{-\gamma t} (1+|x|)^l |\partial_t^\nu \partial_x^\alpha u(x, t)| < +\infty, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

где $\nu \leq r$, $|\alpha| \leq k$, l — некоторое вещественное число.

Каждой функции $u(t) \in C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{-\infty}^k)$ соответствует функция $u(x, t)$, заданная в полупространстве:

$$u(x, t) = u(t)(x), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Лемма 2.2. Отображение, определяемое равенством (2.7), является взаимно однозначным отображением $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{-\infty}^k)$ на $C_{\gamma p}^{rk}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t) \in C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{-\infty}^k)$. Тогда существует $l \in \mathbb{R}$ такое, что $u(t) \in C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k)$. Так как $u(t)(x) \in C_l^k$, $t \geq 0$, определены функции $\partial_x^\beta u(x, t) = \partial_x^\beta u(t)(x)$, $|\beta| \leq k$. Следовательно, функция $u(x, t)$ имеет по переменной x непрерывные производные до порядка k .

Из определения функции $\partial_x^\beta u(x, t)$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} (1+|x|)^l |\partial_x^\beta u(x+\Delta x, t+\Delta t) - \partial_x^\beta u(x, t)| &\leq (1+|x|)^l |\partial_x^\beta u(x+\Delta x, t) - \partial_x^\beta u(x, t)| \\ &\quad + c(\Delta x) (1+(x+\Delta x)^l |\partial_x^\beta u(x+\Delta x, t+\Delta t) - \partial_x^\beta u(x+\Delta x, t)|) \\ &\leq (1+|x|)^l |\partial_x^\beta u(t)(x+\Delta x) - \partial_x^\beta u(t)(x)| + c(\Delta x) |u(t+\Delta t) - u(t)|_l^k. \end{aligned}$$

Так как $u(t) \in C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k)$, при фиксированных t и x правая часть полученного неравенства будет сколь угодно мала при достаточно малых Δt и Δx . Следовательно, функция $\partial_x^\beta(u(x, t))$ непрерывна в $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$.

Дифференцируемость функции $\partial_x^\beta u(x, t)$ по переменной t и равенство

$$\partial_t \partial_x^\beta u(x, t) = \partial_x^\beta \frac{du(t)}{dt}(x)$$

следуют из неравенств

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^l \left| \frac{\partial_x^\beta u(x, t + \Delta t) - \partial_x^\beta u(x, t)}{\Delta t} - \partial_x^\beta \frac{du(t)}{dt}(x) \right| \\ \leq (1 + |x|)^l \left| \partial_x^\beta \left(\frac{u(t + \Delta t)(x) - u(t)(x)}{\Delta t} - \frac{du(t)}{dt}(x) \right) \right| \\ \leq \left| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \frac{du(t)}{dt} \right|_l^k. \end{aligned}$$

Правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$, так как $u(t) \in C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k)$. Аналогично доказываются непрерывность функции $\partial_t \partial_x^\beta u(x, t)$ и существование непрерывных производных по t до порядка r . Функция $u(x, t)$ удовлетворяет неравенствам (2.6):

$$\begin{aligned} (1 + t)^{-p} e^{-\gamma t} (1 + |x|)^l \left| \partial_t^\nu \partial_x^\alpha u(x, t) \right| &\leq (1 + t)^{-p} e^{-\gamma t} (1 + |x|)^l \left| \partial_x^\alpha \frac{\partial^\nu u(t)}{dt^\nu}(x) \right| \\ &\leq c_1 (1 + t)^{-p} e^{-\gamma t} |u(t)|_l^k \leq c_1 \|u(t)\|_{C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^k)} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $u(x, t) \in C_{\gamma p}^r(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$.

Пусть $u(x, t) \in C_{\gamma p}^{rk}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ и $u(t)(x) = u(x, t)$. Из неравенств (2.6) следует, что $u(t)(x) \in C_l^k$, $t \geq 0$. Покажем, что функция $u(t)$ непрерывно зависит от $t \geq 0$ в более широком пространстве $C_{l-\rho}^k$, $\rho > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq k} \left[(1 + |x|^2)^{\frac{l-\rho}{2}} \left| \partial_x^\beta u(x, t + \Delta t) - \partial_x^\beta u(x, t) \right| \right] \\ \leq \sup_{|x| \leq R, |\beta| \leq k} \left[(1 + |x|^2)^{\frac{l-\rho}{2}} \left| \partial_x^\beta u(x, t + \Delta t) - \partial_x^\beta u(x, t) \right| \right] \\ + \sup_{|x| > R, |\beta| \leq k} \left[(1 + |x|^2)^{\frac{l-\rho}{2}} \left| \partial_x^\beta u(x, t + \Delta t) - \partial_x^\beta u(x, t) \right| \right]. \end{aligned}$$

Выберем R так, чтобы второе слагаемое в правой части неравенства было меньше $\varepsilon/2$. Это можно сделать, так как из (2.6) следует неравенство

$$\sup_{|x| > R, |\beta| \leq k} (1 + |x|^2)^{-\rho/2} (1 + |x|^2)^{l/2} \left| \partial_x^\beta u(x, t + \Delta t) - \partial_x^\beta u(x, t) \right| \leq C_\beta (1 + R^2)^{-\rho/2}.$$

В силу равномерной непрерывности функции $(1 + |x|^2)^{\frac{l-\rho}{2}} \partial_x^\beta u(x, t)$ на компактном множестве первое слагаемое в правой части того же неравенства можно сделать меньше $\varepsilon/2$ при $|\Delta t| < \delta(\varepsilon)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|u(t + \Delta t) - u(t)|_{l-\rho}^k < \varepsilon, \quad \text{если } |\Delta t| \leq \delta, \quad t \geq 0.$$

Докажем, что функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема по t в пространстве $C_{l-\rho}^k$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \partial_t u(x, t) \right|_{l-\rho}^k \\ & \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq k} \left[(1 + |x|^2)^{\frac{l-\rho}{2}} \left| \frac{1}{\Delta t} (\partial_x^\beta u(x, t + \Delta t) - \partial_x^\beta u(x, t)) - \partial_t \partial_x^\beta u(x, t) \right| \right] \\ & = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq k} [(1 + |x|^2)^{\frac{l-\rho}{2}} |\partial_t \partial_x^\beta u(x, t + \theta \Delta t) - \partial_t \partial_x^\beta u(x, t)|], \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Пользуясь непрерывностью функции $\partial_t \partial_x^\beta u(x, t)$ и приведенным выше приемом оценки нормы приращения функции $u(t)$, можно показать, что левая часть полученного равенства стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$\frac{du(t)}{dt}(x) = \partial_t u(x, t).$$

Из этого равенства и неравенств (2.6) следует, что $u(t)$ принадлежит пространству $C_{\gamma p}^1(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{l-\rho}^k)$. Аналогично устанавливается принадлежность функции $u(t)$ пространствам более высокого порядка гладкости по t до $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{l-\rho}^k)$ включительно. Следовательно, каждая функция из $C_{\gamma p}^{rk}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ соответствует некоторой функции из $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{-\infty}^k)$ и это соответствие взаимно однозначное. $\square$

Из леммы 2.2 следует, что всякому обобщенному решению из пространства $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{-\infty}^k)$ соответствует классическое решение из пространства $C_{\gamma p}^{rk}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, и наоборот.

Из неравенств (2.5) вытекает непрерывность вложения

$$H_l^{k+\frac{n}{2}+\varepsilon} \subset C_l^k, \quad \varepsilon > 0,$$

а из него — непрерывность вложения

$$C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{-\infty}^{k+\frac{n}{2}+\varepsilon}) \subset C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, C_{-\infty}^k),$$

которое позволяет интерпретировать сильные обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) из $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{-\infty}^{k+\frac{n}{2}+\varepsilon})$ как классические.

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$ является линейным непрерывным отображением пространства S' в себя, т. е. функция $a(\sigma)$ является мультипликатором в пространстве S' тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются неравенства

$$|\partial^\alpha a(\sigma)| \leq c_\alpha (1 + |\sigma|)^{q_\alpha}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

где $c_\alpha > 0$, q_α — некоторые числа, зависящие от производной функции $a(\sigma)$ порядка α [8].

Теорема 2.1. Умножение на функцию $a(\sigma)$, удовлетворяющую неравенствам (2.8), является непрерывным отображением из пространства H_s^l , $s, l \in \mathbb{R}$, в пространство $H_{s-q(l)}^l$, где

$$q(l) = \max_{|\alpha| \leq \nu(l)} q_\alpha, \quad \nu(l) = \begin{cases} |l|, & \text{если } l \in \mathbb{Z}, \\ [|l|] + 1, & \text{если } l \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma)g\|_{s-q(l)}^l \leq C \left(\max_{|\alpha| \leq \nu(l)} c_\alpha \right) \|g\|_s^l, \quad (2.9)$$

где $C > 0$ — некоторое число, зависящее от l, s и не зависящее от функции $a(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность указанного отображения вытекает из неравенства (2.9). Его справедливость для целых неотрицательных l следует из леммы 2.1. Используя неравенства (2.2), (2.8) и формулу Лейбница, для произвольной функции $g(\sigma) \in S(\mathbb{R}^n)$ получим

$$\begin{aligned} \|a(\sigma)g(\sigma)\|_{\tilde{s}}^l &\leq C_1 \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} (1 + |\sigma|^2)^{\tilde{s}} |\partial^\alpha (a(\sigma)g(\sigma))|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C_2 \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} (1 + |\sigma|^2)^{\tilde{s}} \sum_{\beta \leq \alpha} |\partial^\beta a(\sigma)|^2 |\partial^{\alpha-\beta} g(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C_3 \left(\max_{|\alpha| \leq l} c_\alpha \right) \left(\int \sum_{|\gamma| \leq l} (1 + |\sigma|^2)^{\tilde{s}+q(l)} |\partial^\gamma g(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C_4 \left(\max_{|\alpha| \leq l} c_\alpha \right) \|g\|_s^l, \end{aligned}$$

где $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, — некоторые числа, $s = \tilde{s} + q(l)$.

Так как $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H_s^l , из полученного неравенства следует справедливость неравенства (2.9) для всех обобщенных функций $g \in H_s^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

Из соображений двойственности вытекает, что для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$, обобщенная функция $a(\sigma)$ принадлежит пространству $H_{s-q(l)}^l$ и верно неравенство (2.9).

К произвольным вещественным l можно перейти с помощью интерполяции. Метод построения интерполяционных пространств между гильбертовыми пространствами H_s^{l+1} и H_s^l , предложенный Лионсом (см., например, [10, гл. 1, 21]), дает пространства $H_s^{l+1-\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$. На основании теоремы об интерполяции [10, гл. I, теорема 5.1] для всякой обобщенной функции $g \in H_s^l$ функция $a(\sigma)$ принадлежит пространству $H_{s-q(l)}^l$. Из доказательства теоремы об интерполяции следует справедливость неравенства (2.9). $\square$

В доказательстве теоремы 2.1 использовались производные функции $a(\sigma)$ и их оценки порядка не выше $\nu(l)$. Следовательно, теорема 2.1 справедлива для функций $a(\sigma) \in C_{-\infty}^{\nu(l)}$.

Следствие 2.1. Функция $a(\sigma) \in C_{-\infty}^{\nu(l)}$ является мультипликатором в пространстве $H_{-\infty}^l$.

Это утверждение лежит в основе всех дальнейших построений.

Рассмотрим семейство функций $a(\sigma, t)$, принадлежащих пространству $C_{-\infty}^{\nu(l)}$ по переменной σ , гладко зависящих от параметра $t \geq 0$, и при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $|\alpha| \leq \nu(l)$ и $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \leq r+1$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial^\alpha \partial_t^j a(\sigma, t)| \leq c_{\alpha j} (1+t)^{p_{\alpha j}} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{q_{\alpha j}}, \quad t \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad (2.10)$$

где $c_{\alpha j} > 0$, $p_{\alpha j}$, $q_{\alpha j}$ — некоторые числа, зависящие от производных функции $a(\sigma, t)$ соответствующих порядков. Функции

$$p(l, r) = \max_{|\alpha| \leq \nu(l), 0 \leq j \leq r} p_{\alpha j}, \quad q(l, r) = \max_{|\alpha| \leq \nu(l), 0 \leq j \leq r+1} q_{\alpha j}$$

являются неубывающими функциями параметров l и r .

Теорема 2.2. Умножение на функцию $a(\sigma, t)$, удовлетворяющую неравенствам (2.10), является непрерывным отображением пространства H_s^l в пространство $C_{\gamma p(l, r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l, r)}^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s, l \in \mathbb{R}$, и для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma, t)g\|_{C_{\gamma p(l, r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l, r)}^l)}^r \leq C\|g\|_s^l, \quad (2.11)$$

где $C > 0$ — некоторое число, не зависящее от g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (2.10) и доказательства теоремы 2.1 следует, что для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ функция $a(\sigma, t)g$ принадлежит $H_{s-q(l, r)}^l$ и справедливо неравенство

$$\|\partial_t^j a(\sigma, t)g\|_{s-q(l, r)}^l \leq c_j(1+t)^{p(l, r)}e^{\gamma t}\|g\|_s^l, \quad j \leq r+1, \quad (2.12)$$

где $c_j > 0$ — некоторые числа, зависящие от s и l . Следовательно, умножение на функцию $\partial_t^j a(\sigma, t)$, $j \leq r+1$, является непрерывным отображением пространства H_s^l в $H_{s-q(l, r)}^l$.

Докажем, что обобщенная функция $\partial_t^j a(\sigma, t)g$, $j \leq r$, непрерывно зависит от t в пространстве $H_{s-q(l, r)}^l$. Обозначив приращения $\partial_t^j a(\sigma, t + \Delta t) - \partial_t^j a(\sigma, t)$ через $\Delta \partial_t^j a(\sigma, t)$, получим при $j \leq r$ равенство

$$\|\Delta \partial_t^j a(\sigma, t)g\|_{s-q(l, r)}^l = |\Delta t| \|\partial_t^{j+1} a(\sigma, t + \theta \Delta t)g\|_{s-q(l, r)}^l, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Из (2.12) следует оценка

$$\|\Delta \partial_t^j a(\sigma, t)g\|_{s-q(l, r)}^l \leq c(t, \Delta t)|\Delta t|\|g\|_s^l, \quad 0 \leq j \leq r,$$

где $c(t, \Delta t)$ — ограниченная функция для ограниченных значений t и Δt . Следовательно, в пространстве $H_{s-q(l, r)}^l$ справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \partial_t^j a(\sigma, t + \Delta t)g = \partial_t^j a(\sigma, t)g,$$

т. е. обобщенная функция $\partial_t^j a(\sigma, t)g$ непрерывно зависит от t в пространстве $H_{s-q(l, r)}^l$.

Покажем, что производная по параметру обобщенной функции $\partial_t^j a(\sigma, t)$, $j \leq r-1$, в пространстве $H_{s-q(l, r)}^l$ совпадает с обобщенной функцией $\partial_t^{j+1} a(\sigma, t)g$. Рассмотрим функцию

$$b_j(\sigma, t, \Delta t) = \frac{\partial_t^j a(\sigma, t + \Delta t) - \partial_t^j a(\sigma, t)}{\Delta t} - \partial_t^{j+1} a(\sigma, t).$$

Для нее справедливы неравенства

$$|\partial^\alpha b_j(\sigma, t, \Delta t)| \leq c'_{\alpha j}(t, \Delta t)(1 + |\sigma|)^{q(l, r)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad |\alpha| \leq \nu(l), \quad j \leq r-1,$$

где $c'_{\alpha j}(t, \Delta t) > 0$ — ограниченная функция для ограниченных значений t и Δt . Это следует из неравенств (2.10), если воспользоваться равенством

$$\frac{\partial_t^j a(\sigma, t + \Delta t) - \partial_t^j a(\sigma, t)}{\Delta t} = \partial_t^{j+1} a(\sigma, t + \theta \Delta t), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Рассуждая аналогично тому, как это сделано выше, приходим к равенству

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|b_j(\sigma, t, \Delta t)g\|_{s-q(l,r)}^l = 0.$$

Следовательно, в пространстве $H_{s-q(l,r)}^l$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}(\partial_t^j a(\sigma, t)g) = \partial_t^{j+1} a(\sigma, t)g, \quad 0 \leq j \leq r-1.$$

Из этого равенства и (2.12) следует, что $a(\sigma, t)g \in C_{\gamma p(l,r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l,r)}^l)$ и справедливо неравенство (2.11). $\square$

Условия на функцию $a(\sigma, t)$ можно ослабить за счет расширения пространства, в котором рассматриваются решения.

Теорема 2.2'. Умножение на функцию $a(\sigma, t)$, удовлетворяющую неравенствам (2.10) при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $|\alpha| \leq \nu(l)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \leq r$, является непрерывным отображением пространства H_s^l в пространство $C_{\gamma p(l,r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l)$, где $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}$, $q(l, r) = \max_{|\alpha| \leq l, 1 \leq j \leq r} q_\alpha$, и для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma, t)g\|_{C_{\gamma p(l,r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l)} \leq C' \|g\|_s^l,$$

где $C' > 0$ — некоторое число, не зависящее от g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принадлежность $a(\sigma, t)g$ пространству $H_{s-q(l,r)}^l$ для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ и справедливость неравенства (2.12) следуют из неравенств (2.10) и теоремы 2.1.

Докажем, что обобщенная функция $\partial_t^j a(\sigma, t)g$, $j \leq r$, непрерывно зависит от t в пространстве $H_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l$ для любого $\varepsilon > 0$, которое содержит пространство $H_{s-q(l,r)}^l$, и вложение непрерывно.

Обозначив функцию $\partial_t^j a(\sigma, t + \Delta t) - \partial_t^j a(\sigma, t)$ через $\Delta \partial_t^j a(\sigma, t)$ и воспользовавшись неравенствами (2.2) и формулой Лейбница для произвольной функции $g \in H_s^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, получим

$$\begin{aligned} \|\Delta \partial_t^l a(\sigma, t)g\|_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l &\leq C_1 \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} (1 + |\sigma|^2)^{s-q(l,r)-\varepsilon} |\partial^\alpha (\Delta \partial_t^l a(\sigma, t)g)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C_2 \left(\int \sum_{|\alpha| \leq l} \sum_{\beta \leq \alpha} (1 + |\sigma|^2)^{s-q(l,r)-\varepsilon} |\partial^\beta \Delta \partial_t^j a(\sigma, t)|^2 |\partial^{\alpha-\beta} g|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C_3 \sum_{|\alpha| \leq l} \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\int (1 + |\sigma|^2)^{-q(l,r)-\varepsilon} |\Delta \partial^\beta \partial_t^j a(\sigma, t)|^2 (1 + |\sigma|^2)^s |\partial^{\alpha-\beta} g|^2 d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из (2.10) следует, что функции $(1 + |\sigma|^2)^{-q(l,r)-\varepsilon} |\Delta \partial^\beta \partial_t^j a(\sigma, t)|^2$, $|\beta| \leq l$, $j \leq r$, равномерно ограничены на множестве $\mathbb{R}^n \times [0, t_0]$, где t_0 — произвольное число, и справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \partial^\beta \partial_t^j a(\sigma, t) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad |\beta| \leq l, \quad j \leq r.$$

Так как $(1 + |\sigma|^2)^{s/2} \partial^{\alpha-\beta} g \in L^2$, $|\alpha| \leq l$, $\beta \leq \alpha$, по лемме 2.1, из полученной выше оценки на основании теоремы Лебега о предельном переходе следует равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\Delta \partial_t^j a(\sigma, t)g\|_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l = 0, \quad j \leq r.$$

Следовательно, для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, в пространстве $H_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l$ справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \partial_t^j a(\sigma, t + \Delta t) g = \partial_t^j a(\sigma, t) g. \quad (2.13)$$

Если $g \in H_s^l$, $l \in \mathbb{Z}_-$, то, воспользовавшись представлением (2.1) обобщенной функции из пространства H_s^l и свойством нормы в сопряженном пространстве, при $j \leq r$ получим равенства

$$\begin{aligned} \|\Delta \partial_t^j a(\sigma, t) g\|_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l &= \sup_{\varphi \in S(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{-s+q(l,r)+\varepsilon}^{-l} \leq 1} |(\Delta \partial_t^j a(\sigma, t) g, \varphi)| \\ &= \sup_{\varphi \in S(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{-s+q(l,r)+\varepsilon}^{-l} \leq 1} |(h, \psi(\sigma, t, \Delta t))|, \end{aligned}$$

где $h \in L_2$, $\psi(\sigma, t, \Delta t) = (1 + |D|^2)^{-l/2} (1 + |\sigma|^2)^{-s/2} \Delta \partial_t^s a(\sigma, t) \varphi(\sigma)$. Из полученного равенства следует неравенство

$$\|\Delta \partial_t^j a(\sigma, t) g\|_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l \leq \|h\|_{L_2} \sup_{\varphi \in S(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{-s+q(l,r)+\varepsilon}^{-l} \leq 1} \|(\Delta \partial_t^j a(\sigma, t) \varphi)\|_{-s}^{-l}, \quad (2.14)$$

так как псевдодифференциальный оператор $(1 + |D|^2)^{-l/2}$ непрерывно отображает пространство H_0^{-l} в L_2 .

Воспользовавшись приведенной выше оценкой выражения в правой части неравенства (2.14), получим

$$\begin{aligned} &\|\Delta \partial_t^j a(\sigma, t) \varphi\|_{-s}^{-l} \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq -l} \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\int (1 + |\sigma|^2)^{-s} |\Delta \partial_t^j a(\sigma, t)|^2 |\partial^{\alpha-\beta} \varphi(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq -l} \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\int (1 + |\sigma|^2)^{-q(l,r)-\varepsilon} |\Delta \partial_t^j \partial^\beta a(\sigma, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. \times (1 + |\sigma|^2)^{-s+q(l,r)+\varepsilon} |\partial^{\alpha-\beta} \varphi(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в правой части полученного неравенства имеет вид

$$\left(\int b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) \psi_{\alpha-\beta}^2(\sigma) d\sigma \right)^{1/2}, \quad \beta \leq \alpha, \quad |\alpha| \leq |l|, \quad j \leq r.$$

Из (2.10) следует, что функции $b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t)$ удовлетворяют неравенствам

$$b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) \leq c(t, \Delta t) (1 + |\sigma|^2)^{-2\varepsilon}, \quad (2.15)$$

где $c(t, \Delta t)$ — функция, ограниченная для ограниченных значений t и Δt .

По лемме 2.1 функции $\psi_{\alpha-\beta}^2(\sigma)$ принадлежат L_1 и справедливы неравенства

$$\|\psi_{\alpha-\beta}^2\|_{L_1} \leq 1.$$

Из свойств нормы в сопряженном пространстве и равенства $L_1' = L_\infty$ следует справедливость неравенств

$$\sup_{\|\psi_{\alpha-\beta}^2\|_{L_1} \leq 1} \left(\int b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) \psi_{\alpha-\beta}^2(\sigma) d\sigma \right)^{1/2} \leq \left(\sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n} b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) \right)^{1/2}.$$

Так как верны неравенства (2.15) и

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n} b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) \right)^{1/2} = \left(\sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) \right)^{1/2} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \left(\int b_{\beta j}^2(\sigma, t, \Delta t) \psi_{\alpha-\beta}^2(\sigma) d\sigma \right)^{1/2} = 0.$$

Используя эти рассуждения при оценивании правой части неравенства (2.14), получим равенства (2.13) для всех $l \in \mathbb{Z}$ в пространстве $H_{s-q(l,r)-\varepsilon}^l$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 2.2 и опираются на прием оценивания, приведенный выше. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ослабление условий на функцию $a(\sigma, t)$ связано с уменьшением количества производных по переменной t , на которую накладываются ограничения.

Рассмотрим умножение элементов пространства $C_{\tau p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ на функцию $a(\sigma, t)$.

Теорема 2.3. Умножение на функцию $a(\sigma, t)$, удовлетворяющую неравенствам (2.10), является непрерывным отображением пространства $C_{\tau p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ в пространство $C_{\gamma+\tau, p+p(l,r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l,r)}^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s, l \in \mathbb{R}$, и для любой функции $v(t) \in C_{\tau p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma, t)v(t)\|_{C_{\gamma+\tau, p+p(l,r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l,r)}^l)} \leq C \|v(t)\|_{C_{\tau p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)},$$

где $C > 0$ — некоторое число, не зависящее от $v(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (2.10) и доказательства теоремы 2.1 следует, что для любой функции $v(t) \in C_{\tau p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ при каждом $t \geq 0$ обобщенная функция $\partial_t^j a(\sigma, t) \frac{d^k v(t)}{dt^k}$, $j \leq r+1$, $k \leq r$, принадлежит пространству $H_{s-q(l,r)}^l$ и справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \partial_t^j a(\sigma, t) \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right\|_{s-q(l,r)}^l &\leq C_{jk} (1+t)^{p(l,r)} e^{\gamma t} \left\| \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right\|_s^l \\ &\leq C'_{jk} (1+t)^{p+p(l,r)} e^{(\gamma+\tau)t} \|v(t)\|_{C_{\tau p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $C_{jk} > 0$, $C'_{jk} > 0$ — некоторые числа.

Докажем, что обобщенная функция $\partial_t^j a(\sigma, t) \frac{d^k v(t)}{dt^k}$, $j \leq r+1$, $k \leq r$, непрерывна по t в пространстве $H_{s-q(l,r)}^l$. Обозначим через $\Delta f(t)$ приращение функции $f(t)$: $f(t+\Delta t) - f(t)$. Пользуясь дифференцируемостью функций $a(\sigma, t)$ и $v(t)$ по t , получим

$$\left\| \Delta \left(\partial_t^j a(\sigma, t) \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right) \right\|_{s-q(l,r)}^l \leq \left\| \Delta \partial_t^j a(\sigma, t) \frac{d^k v(t+\Delta t)}{dt^k} \right\|_{s-q(l,r)}^l$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \partial_t^j a(\sigma, t) \Delta \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right\|_{s-q(l,r)}^l \leq \left\| \partial_t^{j+1} a(\sigma, t + \theta \Delta t) \frac{d^k v(t + \Delta t)}{dt^k} \right\|_{s-q(l,r)}^l \\
& + \left\| \partial_t^j a(\sigma, t) \Delta \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right\|_{s-q(l,r)}^l \leq C_1(t, \Delta t) \left(\left\| \frac{d^k v(t + \Delta t)}{dt^k} \right\|_s^l |\Delta t| + \left\| \Delta \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right\|_s^l \right),
\end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $C_1(t, \Delta t)$ — ограниченная функция для ограниченных значений t и Δt . Так как правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$, в пространстве $H_{s-q(l,r)}^l$ справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\partial_t^j a(\sigma, t + \Delta t) \frac{d^k v(t + \Delta t)}{dt^k} \right) = \partial_t^j a(\sigma, t) \frac{d^k v(t)}{dt^k},$$

т. е. функция $\partial_t^j a(\sigma, t) \frac{d^k v(t)}{dt^k}$, $j \leq r$, $k \leq r$, непрерывна по t в пространстве $H_{s-q(l,r)}^l$.

Аналогичными рассуждениями доказывается дифференцируемость функции $a(\sigma, t)v(t)$ по t :

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\Delta(a(\sigma, t)v(t))}{\Delta t} - \left(\partial_t a(\sigma, t)v(t) + a(\sigma, t) \frac{v(t)}{dt} \right) \right\|_{s-q(l,r)}^l \\
& \leq \left\| \left(\frac{\Delta a(\sigma, t)}{\Delta t} - \partial_t a(\sigma, t) \right) v(t + \Delta t) \right\|_{s-q(l,r)}^l + \left\| a(\sigma, t) \left(\frac{\Delta v(t)}{\Delta t} - \frac{dv}{dt} \right) \right\|_{s-q(l,r)}^l \\
& + |\Delta t| \left\| \partial_t^2 a(\sigma, t + \theta \Delta t) v(t + \Delta t) \right\|_{s-q(l,r)}^l + \left\| a(\sigma, t) \left(\frac{\Delta v(t)}{\Delta t} - \frac{dv(t)}{dt} \right) \right\|_{s-q(l,r)}^l \\
& \leq c_2(t, \Delta t) \left(|\Delta t| \|v(t + \Delta t)\|_s^l + \left\| \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} - \frac{dv}{dt} \right\|_s^l \right),
\end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $c_2(t, \Delta t)$ — ограниченная функция для ограниченных значений t и Δt . Так как правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$, функция $a(\sigma, t)v(t)$ дифференцируема по t и справедлива формула

$$\frac{d}{dt}(a(\sigma, t)v(t)) = \partial_t a(\sigma, t)v(t) + a(\sigma, t) \frac{dv}{dt}.$$

Из доказанного выше следует, что производная функции $a(\sigma, t)v(t)$ по t в пространстве $H_{s-q(l,r)}^l$ непрерывна и для нее справедлива оценка вида (2.16).

Пользуясь приведенными рассуждениями, можно по индукции показать непрерывную дифференцируемость функции $a(\sigma, t)v(t)$ по t до порядка r и справедливость формулы Лейбница

$$\frac{d^k}{dt^k}(a(\sigma, t)v(t)) = \sum_{m \leq k} C_k^m \partial_t^{k-m} a(\sigma, t) \frac{d^m v(t)}{dt^m}.$$

Из этой формулы и неравенств (2.16) следуют неравенства

$$\left\| \frac{d^k}{dt^k} a(\sigma, t)v(t) \right\|_{s-q(l,r)}^l \leq c_k (1+t)^{p+p(l,r)} e^{\gamma+\tau)t} \|v(t)\|_{C_{r,p}^r(\mathbb{R}_+, H_s^l)}, \quad 0 \leq k \leq r.$$

Из этих неравенств вытекает справедливость неравенств (2.15). $\square$

Следствие 2.2. Функция $a(\sigma, t)$, удовлетворяющая неравенствам (2.10), является мультипликатором в пространстве $C_{\infty\infty}^r(\mathbb{R}_+, H_s^l)$.

3. Построение решения задачи Коши

Для реализации указанного во введении подхода к построению решения задачи (1.5), (1.6) рассмотрим свойства функции $a(\sigma, t) = e^{a(\sigma)t}$, где $a(\sigma) = \frac{P_0(\sigma)}{P_1(\sigma)}$, которая является решением уравнения (1.5) при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$, $t > 0$ и при $t = 0$ удовлетворяет условию (1.6) для функции $\hat{g}_0(\sigma) = 1$.

Лемма 3.1. Если выполнено условие (Р), то для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$, $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$|\partial^\alpha a(\sigma, t)| \leq c_\alpha (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(2m-1)} |P_1(\sigma)|^{-2|\alpha|}, \quad (3.1)$$

$$|\partial^\alpha (P_1^k(\sigma) a(\sigma, t))| \leq \tilde{c}_\alpha (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(2m-1)} |P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|}, \quad (3.2)$$

где $c_\alpha > 0$, $\tilde{c}_\alpha > 0$ — некоторые числа, $m = \max\{m_0, m_1\}$, $m_0 = \deg P_0(\sigma)$, $m_1 = \deg P_1(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$, $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\partial^\alpha a(\sigma, t) = P_1^{-2|\alpha|}(\sigma) R_\alpha(\sigma, t) e^{a(\sigma)t}, \quad (3.3)$$

где $R_\alpha(\sigma, t)$ — многочлен, степень которого по переменной t не выше $|\alpha|$, а по переменной σ не выше $|\alpha|(2m-1)$.

Если $|\alpha| = 1$, то равенство (3.3) справедливо:

$$\partial_i e^{a(\sigma)t} = P_1^{-2}(\sigma) R_i(\sigma, t) e^{a(\sigma)t},$$

где $R_i(\sigma, t) = t(\partial_i P_0(\sigma) \cdot P_1(\sigma) - \partial_i P_1(\sigma) \cdot P_0(\sigma))$, $\deg R_i(\sigma, t) \leq m_0 + m_1 - 1 \leq 2m - 1$.

Предположим, что равенство (3.3) верно для всех мультииндексов α , $|\alpha| = k$, и $\alpha' = \alpha + \gamma_i$, $|\gamma_i| = 1$. Тогда верны равенства

$$\partial^{\alpha'} e^{a(\sigma)t} = \partial_i (P_1^{-2|\alpha|}(\sigma) R_\alpha(\sigma, t) e^{a(\sigma)t}) = P_1^{-2|\alpha'|}(\sigma) R_{\alpha'}(\sigma, t) e^{a(\sigma)t},$$

где $R_{\alpha'}(\sigma, t) = (-2|\alpha|)P_1(\sigma)\partial_i P_1(\sigma)R_\alpha(\sigma, t) + P_1^2(\sigma)\partial_i R_\alpha(\sigma, t) + tR_\alpha(\sigma, t)(\partial_i P_0(\sigma) \cdot P_1(\sigma) - \partial_i P_1(\sigma) \cdot P_0(\sigma))$. Степень многочлена $R_{\alpha'}(\sigma, t)$ по переменной t не более чем на 1 больше степени по t многочленов $R_\alpha(\sigma, t)$, $\partial_i R_\alpha(\sigma, t)$. По переменной σ степень многочлена $R_{\alpha'}(\sigma, t)$ можно оценить, пользуясь предположением:

$$\deg_\sigma R_{\alpha'}(\sigma, t) \leq \max\{m_1 + m_1 - 1 + |\alpha|(2m-1), 2m_1 + |\alpha|(2m-1) - 1,$$

$$m_1 + m_0 - 1 + |\alpha|(2m-1)\} \leq |\alpha'|(2m-1).$$

Неравенство (3.1) следует непосредственно из равенства (3.3) и условия (Р). Для доказательства неравенства (3.2) воспользуемся равенствами

$$\partial^\alpha (P_1^k(\sigma) a(\sigma, t)) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \partial^{\alpha-\beta} P_1^k(\sigma) \cdot \partial^\beta a(\sigma, t), \quad (3.4)$$

$$\partial^\beta P_1^k(\sigma) = P_1^{k-|\beta|}(\sigma) Q_\beta(\sigma), \quad (3.5)$$

где $Q_\beta(\sigma)$ — многочлен, степень которого не выше $|\alpha|(m_1-1)$.

Равенство (3.4) получено с помощью формулы Лейбница. Равенство (3.5) очевидно, если $|\beta| = 1$. Предположив, что оно справедливо для всех мультииндексов β , $|\beta| = p$, нетрудно показать, что оно имеет место для мультииндексов $\beta' = \beta + \gamma_i$, $|\gamma_i| = 1$.

Применив в правой части равенства (3.4) равенство (3.5) и неравенство (3.1), получим

$$\begin{aligned}
 & |\partial^\alpha (P_1^k(\sigma) a(\sigma, t))| \\
 & \leq c_{1\alpha} \sum_{\beta \leq \alpha} |P_1(\sigma)|^{k-|\alpha-\beta|} |Q_{\alpha-\beta}(\sigma)| (1+t)^{|\beta|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\beta|(2m-1)} |P_1(\sigma)|^{-2|\beta|} \\
 & \leq c_{2\alpha} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} (1+|\sigma|)^{|\alpha-\beta|(m_1-1)+|\beta|(2m-1)} |P_1(\sigma)|^{k-|\alpha+\beta|} \\
 & \leq c_{3\alpha} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(m_1-1)} |P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} (1+|\sigma|)^{|\beta|(2m-m_1)} |P_1(\sigma)|^{|\alpha|-|\beta|} \\
 & \leq c_{4\alpha} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(m_1-1)} |P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} (1+|\sigma|)^{|\alpha|m_1+2|\beta|(m-m_1)} \\
 & \leq c_{5\alpha} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(2m-1)} |P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (3.2) справедливо. $\square$

Пользуясь равенством (3.3), нетрудно получить оценки, аналогичные неравенствам (3.1) и (3.2) для функции $\partial_t^j a(\sigma, t) = \left(\frac{P_0(\sigma)}{P_1(\sigma)}\right)^j a(\sigma, t)$.

Лемма 3.2. Если выполнено условие (Р), то для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $j \in \mathbb{Z}_+$ при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$, $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$|\partial^\alpha \partial_t^j a(\sigma, t)| \leq a_{\alpha j} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(2m-1)+jm} |P_1(\sigma)|^{-2|\alpha|-j}, \quad (3.6)$$

$$|\partial^\alpha (P_1^k(\sigma) \partial_t^j a(\sigma, t))| \leq \tilde{a}_{\alpha j} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(2m-1)+jm} |P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|-j}, \quad (3.7)$$

где $a_\alpha > 0$, $\tilde{a}_\alpha > 0$ — некоторые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $j = 0$ неравенства (3.6) и (3.7) превращаются в (3.1) и (3.2). Дифференцируя равенство (3.3) по t и применяя формулу Лейбница, получим

$$\partial^\alpha \partial_t^j a(\sigma, t) = P_1^{-2|\alpha|-j}(\sigma) R_{\alpha j}(\sigma, t) e^{a(\sigma)t}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1, \quad t \geq 0,$$

где $R_{\alpha j}(\sigma, t) = \sum_{i \leq j} \frac{j!}{i!(j-i)!} \partial_t^{j-i} R_\alpha(\sigma, t) (P_0(\sigma))^i (P_1(\sigma))^{j-i}$ — многочлен, степень которого по переменной t не превосходит $|\alpha|$, а по переменной σ удовлетворяет неравенству

$$\deg_\sigma R_{\alpha j}(\sigma, t) \leq \max_{i \leq j} \{|\alpha|(2m-1) + im_0 + (j-i)m_1\} \leq |\alpha|(2m-1) + jm.$$

Из полученного равенства и условия (Р) следует (3.6).

Пользуясь формулой Лейбница, неравенствами (3.6) и равенствами (3.4), (3.5), получим

$$\begin{aligned}
 |\partial^\alpha (P_1^k(\sigma) \partial_t^j a(\sigma, t))| & \leq a_{1\alpha} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} |P_1(\sigma)|^{k-|\alpha-\beta|} (1+|\sigma|)^{|\alpha-\beta|(m_1-1)} \\
 & \quad \times (1+t)^{|\beta|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\beta|(2m-1)+jm} |P_1(\sigma)|^{-2|\beta|-j} \\
 & \leq a_{2\alpha} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\alpha|(m_1-1)} |P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|-j} \\
 & \quad \times \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} (1+|\sigma|)^{|\beta|(2m-m_1)+jm} |P_1(\sigma)|^{|\alpha-\beta|}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a_{3\alpha}(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}(1+|\sigma|)^{|\alpha|(m_1-1)+jm}|P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|-j} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} (1+|\sigma|)^{2|\beta|(m-m_1)+|\alpha|m_1} \\ &\leq a_{4\alpha}(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}(1+|\sigma|)^{|\alpha|(2m-1)+jm}|P_1(\sigma)|^{k-2|\alpha|-j}. \end{aligned}$$

Следовательно, (3.7) справедливо. $\square$

Рассмотрим семейство функций $\mu_\varepsilon(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 < \varepsilon < 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{supp } \mu_\varepsilon &\subset N_1^\varepsilon = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : d(\sigma, N_1) \leq \varepsilon\}, \text{ где } d(\sigma, N_1) = \inf_{\eta \in N_1} (\sigma - \eta); \\ \mu_\varepsilon(\sigma) &= 1, \quad \sigma \in N_1^{\varepsilon/2}; \\ |\partial^\alpha \mu_\varepsilon(\sigma)| &\leq a_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \sigma \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Построение функции $\mu_\varepsilon(\sigma)$ стандартно (см. [11, § 2.1]).

Для изучения свойств функции $(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))a(\sigma, t) \in C(\mathbb{R}^n)$ воспользуемся известной оценкой модуля многочлена от вещественных переменных [12, теорема А.3, дополнения]:

$$\frac{1}{|P_1(\sigma)|} \leq C(1+|\sigma|)^\tau d^\varkappa(\sigma, N_1), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1, \quad (3.9)$$

где $C > 0$, $\tau, \varkappa < 0$ — некоторые числа.

Лемма 3.3. Если выполнено условие (Р), то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $j \in \mathbb{Z}_+$ при $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$|\partial^\alpha((1 - \mu_\varepsilon(\sigma))\partial_t^j a(\sigma, t))| \leq b_{\alpha j}(\varepsilon)(1+t)^{|\alpha|}e^{\gamma t}(1+|\sigma|)^{\rho_{\alpha j}}, \quad (3.10)$$

где $b_{\alpha j}(\varepsilon) > 0$ — некоторые числа, зависящие от ε , $\rho_{\alpha j} = |\alpha|(2m+2\tau-1)+j(m+\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись формулой Лейбница и неравенствами (3.6), (3.9), получим

$$\begin{aligned} &|\partial^\alpha((1 - \mu_\varepsilon(\sigma))\partial_t^j a(\sigma, t))| \leq b'_{\alpha j} \sum_{\beta \leq \alpha} |(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))^{\alpha-\beta}| |\partial^\beta \partial_t^j a(\sigma, t)| \\ &\leq b''_{\alpha j} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} \sum_{\beta \leq \alpha} |(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))^{\alpha-\beta}| (1+|\sigma|)^{|\beta|(2m-1)+jm+(2|\beta|+j)\tau} d(\sigma, N_1)^{(2|\beta|+j)\varkappa}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из построения функции $\mu_\varepsilon(\sigma)$ следует равенство

$$(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))^{\alpha-\beta} = 0, \quad \sigma \in N_1^{\varepsilon/2}, \quad \beta \leq \alpha,$$

а из (3.8) — оценка

$$|(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))^{\alpha-\beta}| \leq m_{\alpha-\beta} \varepsilon^{-|\alpha-\beta|}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

где $m_{\alpha-\beta} > 0$ — некоторые числа, не зависящие от ε .

Так как $\varkappa < 0$ и $d(\sigma, N_1) \geq \varepsilon/2$, если $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1^{\varepsilon/2}$, справедливо неравенство

$$d(\sigma, N_1)^{(2|\beta|+j)\varkappa} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{(2|\beta|+j)\varkappa}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1^{\varepsilon/2}.$$

Воспользовавшись приведенными оценками для функций $(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))^{\alpha-\beta}$ и $d(\sigma, N_1)$ в правой части (3.11), получим неравенство (3.10). $\square$

Из неравенств (3.10) по теореме 2.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. Если выполнено условие (Р), то для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$, $l, s \in \mathbb{R}$, семейство обобщенных функций $(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))a(\sigma, t)g$ принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_1}^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, где $s_1 = s - \nu(l)(2m + 2\tau - 1) - r(m + \tau)$, и справедливо неравенство

$$\|(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))a(\sigma, t)g\|_{C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_1}^l)} \leq c_1(\varepsilon)\|g\|_s^l, \quad (3.12)$$

где $c_1(\varepsilon)$ — некоторое число, зависящее от ε .

Рассмотрим умножение обобщенных функций на $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)$, $k \in N$.

Теорема 3.2. Если выполнено условие (Р), то для любой обобщенной функции $f \in H_s^l$, $l, s \in \mathbb{R}$, семейство обобщенных функций $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)f$, $k > 2\nu(l) + r$, принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_2}^l)$, где $s_2 = s - q_{lk}$,

$$q_{lk} = \begin{cases} \nu(l)(2m - 2m_1 - 1) - km_1 - r(m - m_1), & \text{если } m > m_1, \\ km_1, & \text{если } m = m_1, \end{cases}$$

и справедливо неравенство

$$\|\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)f\|_{C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_2}^l)} \leq c_2(\varepsilon)\|f\|_s^l, \quad (3.13)$$

где $c_2(\varepsilon) > 0$ — некоторое число, зависящее от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы воспользоваться теоремой 2.2, оценим функцию $\partial^\alpha(\mu_\varepsilon(\sigma)\partial_t^j a(\sigma, t)P_1^k(\sigma))$ при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$, $t \geq 0$, пользуясь неравенствами (3.7), (3.8) и формулой Лейбница:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(\mu_\varepsilon(\sigma)\partial_t^j a(\sigma, t)P_1^k(\sigma))| &\leq c''_{\alpha j} \sum_{\beta \leq \alpha} |\partial^{\alpha-\beta} \mu_\varepsilon(\sigma)| |\partial^\beta \partial_t^j a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)| \\ &\leq c'_{\alpha j} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \varepsilon^{-|\alpha-\beta|} (1+t)^{|\beta|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{|\beta|(2m-1)+jm} |P_1(\sigma)|^{k-2|\beta|-j}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Если $k > 2\nu(l) + r$, то для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leq \nu(l)$, $j \leq r + 1$, справедливы неравенства

$$|\partial^\alpha(\mu_\varepsilon(\sigma)\partial_t^j a(\sigma, t)P_1^k(\sigma))| \leq c''_{\alpha j}(\varepsilon)(1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{q_{\alpha j}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (3.15)$$

где $q_{\alpha j} = |\alpha|(2m - 2m_1 - 1) + km_1 + j(m - m_1)$, если $m > m_1$, и $q_{\alpha j} = km_1$, если $m = m_1$.

По теореме 2.2 умножение на функцию $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)$ является непрерывным отображением пространства H_s^l в пространство $C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_2}^l)$, где $s_2 = s - q_{lk}$ и для любой обобщенной функции $f \in H_s^l$ справедливо неравенство (3.13). $\square$

Если $k < 2\nu(l) + r$, то, как следует из неравенств (3.14), (3.9), производные функции $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)$ порядка $\nu(l)$ имеют степенные особенности в точках $\sigma \in N_1$. В этом случае умножать на функцию $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)$ можно только обычные функции.

Теорема 3.3. Если выполнено условие (Р), то для любой обобщенной функции $f \in H_s^l$, $l > 0$, $s \in \mathbb{R}$, семейство обобщенных функций $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)f$, $r+1 \leq k \leq 2\nu(l)+r$, принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(l')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_3}^{l'})$, где $l' = \frac{k-r-1}{2}$, $s_3 = s - q_{l'k}$, и справедливо неравенство

$$\|\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)f\|_{C_{\gamma\nu(l')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_3}^{l'})} \leq c_3(\varepsilon)\|f\|_s^l, \quad (3.16)$$

где $c_3(\varepsilon)$ — некоторое число, зависящее от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись оценкой (3.14) и условием теоремы, получим неравенства (3.15) для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leq \nu(l')$, $j \leq r+1$.

По теореме 2.2 умножение на функцию $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)$ является непрерывным отображением пространства H_s^l в пространство $C_{\gamma\nu(l')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_3}^{l'})$, где $s_3 = s - q_{l'k}$. Так как $l' < l$ и вложение $H_s^l \subset H_s^{l'}$ непрерывно, справедливо неравенство (3.16). $\square$

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют рассмотреть умножение обобщенных функций на функцию $a(\sigma, t)$ и воспользоваться формулой (1.7) для построения решения задачи (1.5), (1.6).

Теорема 3.4. Если выполнено условие (P), $\hat{g}_0 \in H_s^l$, $l, s \in \mathbb{R}$, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mu_{2\varepsilon}g_0 = P_1^k(\sigma)f$, $f \in H_s^{\tilde{l}}$, $k > 2\nu(\tilde{l}) + r$, то семейство обобщенных функций $a(\sigma, t)\hat{g}_0$ принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(l')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'})$, где $s' = \min\{s - \nu(l)(2m + 2\tau - 1) - r(m + \tau), s - q_{l'k}\}$, $l' = \min\{l, \tilde{l}\}$, является решением задачи Коши (1.5), (1.6), и справедливо неравенство

$$\|a(\sigma, t)\hat{g}_0\|_{C_{\gamma\nu(l')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'})} \leq c_4(\varepsilon)(\|(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))\hat{g}_0\|_s^l + \|f\|_s^{\tilde{l}}), \quad (3.17)$$

где $c_4(\varepsilon) > 0$ — некоторое число, зависящее от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнено условие теоремы, то семейство обобщенных функций $(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))a(\sigma, t)\hat{g}_0$ принадлежит по теореме 3.1 пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_1}^l)$, где $s_1 = s - \nu(l)(2m + 2\tau - 1) - r(m + \tau)$, а семейство обобщенных функций $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)f$ по теореме 3.2 принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(\tilde{l})}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s_2}^{\tilde{l}})$, где $s_2 = \tilde{s} - q_{l'k}$.

Рассмотрим функцию

$$v(t) = (1 - \mu_\varepsilon(\sigma))a(\sigma, t)\hat{g}_0 + \mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)\hat{g}_0.$$

Она принадлежит $C_{\gamma\nu(l')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'})$, где $l' = \min\{l, \tilde{l}\}$, $s' = \min\{s_1, s_2\}$, так как $\mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)\hat{g}_0 = \mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)\mu_{2\varepsilon}(\sigma)\hat{g}_0 = \mu_\varepsilon(\sigma)a(\sigma, t)P_1^k(\sigma)f$.

Покажем, что $v(t)$ является решением уравнения (1.5). Так как

$$P_1(\sigma)\partial_t a(\sigma, t) - P_0(\sigma)a(\sigma, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N_1,$$

подставив $v(t)$ в левую часть уравнения (1.5), получим равенство

$$P_1(\sigma)\partial_t v(t) - P_0(\sigma)v(t) = \mu_\varepsilon(\sigma)(P_1(\sigma)\partial_t a(\sigma, t) - P_0a(\sigma, t))P_1^k(\sigma)f.$$

Если обозначить правую часть полученного равенства через $h(t)$, то для произвольной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ имеем равенство

$$(h(t), \varphi) = (f, \mu_\varepsilon(\sigma)(P_1(\sigma)\partial_t a(\sigma, t) - P_0a(\sigma, t))P_1^k(\sigma)\varphi) = 0,$$

так как из условия теоремы следует, что $\mu_\varepsilon(\sigma)(P_1(\sigma)\partial_t a(\sigma, t) - P_0a(\sigma, t))P_1^k(\sigma)$ локально интегрируема и вне множества меры нуль равна нулю. Следовательно, $h(t) = 0$, $t \geq 0$, и $v(t)$ является решением уравнения (1.5). Она удовлетворяет начальному условию

$$v(t)|_{t=0} = (1 - \mu_\varepsilon(\sigma))\hat{g}_0 + \mu_\varepsilon(\sigma)\hat{g}_0 = \hat{g}_0.$$

Неравенство (3.17) следует из неравенств (3.12) и (3.13). $\square$

Использование в доказательстве теоремы 3.3 вместо теоремы 3.2 приводит к следующему утверждению.

Теорема 3.5. Если выполнено условие (P), $\hat{g}_0 \in H_s^l$, $l > 0$, $s \in \mathbb{R}$, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mu_{2\varepsilon}\hat{g}_0 = P_1^k(\sigma)f$, $f \in H_s^{\tilde{l}}$, $r+1 \leq k \leq 2\nu(\tilde{l})+r$, то семейство обобщенных функций $a(\sigma, t)\hat{g}_0$ принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(l'')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s''}^{l''})$, где $l'' = \min\{l, \frac{k-r-1}{2}\}$, $s'' = \min\{s - \nu(l)(2m+2\tau-1) - r(m+\tau), \tilde{s} - q_{\tilde{l}k}\}$ является решением задачи (1.5), (1.6), и справедливо неравенство

$$\|a(\sigma, t)\hat{g}_0\|_{C_{\gamma\nu(l'')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s''}^{l''})} \leq c_5(\varepsilon)(\|(1 - \mu_\varepsilon(\sigma))\hat{g}_0\|_s^l + \|f\|_s^{\tilde{l}}),$$

где $c_4(\varepsilon) > 0$ — некоторое число, зависящее от ε .

Условие на функцию $\hat{g}_0$ в теоремах 3.4 и 3.5 можно записать в другом виде.

Лемма 3.4. Если обобщенная функция $\hat{g}_0 \in H_s^l$ удовлетворяет условиям теорем 3.4 и 3.5, то ее можно представить в таком виде:

$$\hat{g}_0 = P_1^k(\sigma)\tilde{f}, \quad \tilde{f} \in H_{s_1}^{l_1},$$

где l_1, s_1 — некоторые числа, зависящие от l, s, k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $(1 - \mu_{2\varepsilon}(\sigma))P_1^{-k}(\sigma)$ является мультипликатором в пространстве S' , так как она бесконечно дифференцируема и из (3.5), (3.9), неравенств для функций $(1 - \mu_{2\varepsilon}(\sigma))^{\alpha-\beta}$ и $d(\sigma, N_1)$ в доказательстве леммы 3.3 следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned} & |\partial^\alpha((1 - \mu_{2\varepsilon}(\sigma))P_1^{-k}(\sigma))| \\ & \leq c_{1\alpha} \sum_{\beta \leq \alpha} |(1 - \mu_{2\varepsilon}(\sigma))^{\alpha-\beta}|(1 + |\sigma|)^{|\beta|(m_1-1)}|P_1(\sigma)|^{-k-|\beta|} \\ & \leq c_{2\alpha} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} (2\varepsilon)^{-|\alpha-\beta|}(1 + |\sigma|)^{|\beta|(m_1-1)+(k+|\beta|)\tau} \varepsilon^{\kappa(k+|\beta|)} \\ & \leq c(\varepsilon)(1 + |\sigma|)^{|\alpha|(m_1+\tau-1)+k\tau}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f_1 = (1 - \mu_{2\varepsilon}(\sigma))P_1^{-k}(\sigma)\hat{g}_0$, $\hat{g}_0 \in H_s^l$. По теореме 2.1 $f_1 \in H_{s-q(l)}^l$, где $q(l) = \nu(l)(m + \tau - 1) + k\tau$. Так как по условию $\mu_{2\varepsilon}(\sigma)\hat{g}_0 = P_1^k(\sigma)f_0$, $f_0 \in H_s^{\tilde{l}}$, имеем

$$\hat{g}_0 = (1 - \mu_{2\varepsilon}(\sigma))\hat{g}_0 + \mu_{2\varepsilon}(\sigma)\hat{g}_0 = P_1^k(\sigma)f_1 + P_1^k(\sigma)f_0 = P_1^k(\sigma)(f_1 + f_0).$$

Следовательно, $\hat{g}_0 = P_1^k(\sigma)\tilde{f}$, где $\tilde{f} = f_0 + f_1 \in H_{s_1}^{l_1}$, $l_1 = \min\{l, \tilde{l}\}$, $s_1 = \min\{s - q(l), \tilde{s}\}$. $\square$

Теоремы 3.4, 3.5 и лемма 3.4 позволяют привести компактные достаточные условия существования сильных обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2) в пространстве обобщенных функций медленного роста.

Теорема 3.6. Если выполнено условие (P), $g_0 = P_1^k(D_x)f_0$, $f_0 \in H_{\tilde{l}}^{\tilde{s}}$, $k > 2\nu(\tilde{l}) + r$, то существует решение задачи (1.1), (1.2), принадлежащее пространству $C_{\gamma\nu(\tilde{l})}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{\tilde{l}}^{s'})$, где $s' = \tilde{s} - q_{\tilde{l}k}$.

Теорема 3.7. Если выполнено условие (P), $g_0 = P_1^k(D_x)f_0$, $f_0 \in H_{\tilde{l}}^{\tilde{s}}$, $\tilde{l} > 0$, $r+1 \leq k \leq 2\nu(\tilde{l}) + r$, то существует решение задачи (1.1), (1.2), принадлежащее пространству $C_{\gamma\nu(l'')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{l''}^{s''})$, где $l'' = \frac{k-r-1}{2}$, $s'' = \tilde{s} - q_{\tilde{l}k}$.

Справедливость теорем 3.6 и 3.7 следует непосредственно из справедливости указанных выше утверждений и эквивалентности задач (1.1), (1.2) и (1.5), (1.6).

Если $g_0 \in H_l^s$ и имеется представление $g_0 = P_1^k(D_x)f_0$, $f_0 \in H_l^{\tilde{s}}$, которое удовлетворяет условию $\|f_0\|_{\tilde{l}}^{\tilde{s}} \leq C\|g_0\|_l^s$, то указанные в теоремах 3.6 и 3.7 решения $u(t)$ задачи (1.1), (1.2) удовлетворяют неравенству вида

$$\|u(t)\|_{C_{\gamma\nu(l')}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{l'}^{s'})} \leq C'\|g_0\|_l^s.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для приложений важным является ослабление условий на k в теоремах 3.6, 3.7, обеспечиваемое применением теоремы 2.2' вместо теоремы 2.2. Теорема 3.6 справедлива при условии $\tilde{l} \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2|\tilde{l}| + r$, а теорема 3.7 — при условии $r \leq k < 2|\tilde{l}| + r$.

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим задачу Коши для уравнения медленных волн Россби (1.3). Из теоремы 3.6 с учетом приведенного выше замечания следует, что для любой обобщенной функции $g_0 = \Delta^{2|\tilde{l}|+1}f_0$, $f_0 \in H_l^{\tilde{s}}$, $\tilde{l} \in \mathbb{Z}$, существует решение $u(t)$ уравнения (1.3), принадлежащее пространству $C_{00}^1(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{\tilde{s}-3|\tilde{l}|-2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, и $u(t)|_{t=0} = g_0$. В частности, если $\tilde{l} = 0$, то для начальных данных Δf_0 задача Коши разрешима в соболевских пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. А. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. Костюченко А. Г., Эскин Г. И. Задачи Коши для уравнений типа Соболева — Гальперна // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 273–284.
5. Эскин Г. И. О единственности решения задачи Коши для уравнений не типа Ковалевской // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 285–295.
6. Павлов А. Л. Задача Коши для уравнения типа Соболева — Гальперна в пространствах функций степенного роста // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 11. С. 3–20.
7. Павлов А. Л. Задача Коши для одного уравнения соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Мат. тр. 2018. Т. 21, № 1. С. 125–154.
8. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 4. С. 65–143.
9. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
10. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
11. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4 т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
12. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965.

Поступила в редакцию 3 ноября 2018 г.

После доработки 3 ноября 2018 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Павлов Александр Леонидович
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 83001, Украина;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
alex4909@gmail.com