V. G. Romanov, Plane wave solutions to the equations of electrodynamics in an anisotropic medium, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 845–858

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.411>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.187.69

April 26, 2023, 10:12:11

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, ИНИЦИИРУЕМЫХ ПЛОСКИМИ ВОЛНАМИ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается система уравнений электродинамики для непроводящей и немагнитной среды, обладающей простейшей анизотропией диэлектрической проницаемости. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость характеризуется диагональной матрицей $\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2)$, причем ϵ_1, ϵ_2 являются постоянными положительными числами всюду вне некоторой выпуклой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. При этом в однородной анизотропной среде существуют две моды бегущих плоских волн. Изучается структура решений, отвечающих плоским бегущим волнам, падающим из бесконечности на неоднородность, локализованную в Ω .

DOI 10.33048/smzh.2019.60.411

Ключевые слова: уравнения Максвелла, анизотропия, плоская волна, структура решения.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную систему уравнений Максвелла

$$\text{rot } H = E_t \epsilon(x), \quad \text{rot } E = -\mu_0 H_t, \quad (1)$$

в которой $\epsilon(x) = \text{diag}(\epsilon_1(x), \epsilon_1(x), \epsilon_2(x))$ — положительно определенная диагональная матрица, μ_0 — некоторая положительная постоянная. Предположим, что $\epsilon_1(x) \neq \epsilon_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и вне некоторой компактной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ элементы $\epsilon_1(x), \epsilon_2(x)$ матрицы $\epsilon(x)$ совпадают с постоянными положительными числами $\epsilon_1^0, \epsilon_2^0$.

Характеристические поверхности $t = \varphi(x)$ системы (1) определяются равенством

$$\begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 & -\varphi_{x_3} & \varphi_{x_2} \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & \varphi_{x_3} & 0 & -\varphi_{x_1} \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & -\varphi_{x_2} & \varphi_{x_1} & 0 \\ 0 & \varphi_{x_3} & -\varphi_{x_2} & \mu_0 & 0 & 0 \\ -\varphi_{x_3} & 0 & \varphi_{x_1} & 0 & \mu_0 & 0 \\ \varphi_{x_2} & -\varphi_{x_1} & 0 & 0 & 0 & \mu_0 \end{vmatrix} = \mu_0(\mu_0 \epsilon_1 - |\nabla \varphi|^2) [\mu_0 \epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 (\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2) - \epsilon_2 \varphi_{x_3}^2] = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00120).

Из этого равенства следует, что существуют две характеристические поверхности $t = \varphi^{(j)}(x)$, $j = 1, 2$, для которых выполнены соотношения

$$|\nabla \varphi^{(1)}|^2 = \mu_0 \varepsilon_1, \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 (\varphi_{x_1}^{(2)})^2 + \varepsilon_1 (\varphi_{x_2}^{(2)})^2 + \varepsilon_2 (\varphi_{x_3}^{(2)})^2 = \mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (3)$$

В соответствии с этим с уравнениями (1) связаны две римановы метрики

$$d\tau^{(1)} = (\mu_0 \varepsilon_1(x) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2))^{1/2}, \quad (4)$$

$$d\tau^{(2)} = (\mu_0 (\varepsilon_2(x) dx_1^2 + \varepsilon_2(x) dx_2^2 + \varepsilon_1(x) dx_3^2))^{1/2} \quad (5)$$

и в каждой точке $x \in \mathbb{R}^3$ существуют две скорости распространения волн $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$. Первая из этих скоростей изотропна по отношению к направлению распространения волны, $v^{(1)}(x) = (\mu_0 \varepsilon_1(x))^{-1/2}$, вторая $v^{(2)}$ анизотропна, зависит от x и единичного вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{S}^2$, определяющего направление волны, $\nu = dx/|dx|$, и находится по формуле $v^{(2)}(x, \nu) = (\mu_0 (\varepsilon_2(x) \nu_1^2 + \varepsilon_2(x) \nu_2^2 + \varepsilon_1(x) \nu_3^2))^{-1/2}$. В однородной среде ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0$) существуют решения уравнений (2) и (3) вида

$$\varphi^{(0,1)}(x, \nu) = n_1^0 x \cdot \nu, \quad \varphi^{(0,2)}(x, \nu) = x \cdot \ell^0(\nu). \quad (6)$$

В формулах (6) $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\ell^0(\nu) = (n_2^0 \nu_1, n_2^0 \nu_2, n_1^0 \nu_3)$, $n_1^0 = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_1^0}$, $n_2^0 = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2^0}$. В связи с этим в однородной среде могут распространяться бегущие плоские волны двух мод:

$$\begin{aligned} E^{(0,1)} &= \hat{\alpha}^{(1)}(\nu) f(t - \varphi^{(0,1)}(x, \nu)), & H^{(0,1)} &= \hat{\beta}^{(1)}(\nu) f(t - \varphi^{(0,1)}(x, \nu)), \\ \hat{\alpha}^{(1)}(\nu) &= (\sin \phi, -\cos \phi, 0), & \hat{\beta}^{(1)}(\nu) &= \frac{n_1^0}{\mu_0} (\nu \times \hat{\alpha}^{(1)}(\nu)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E^{(0,2)} &= \hat{\alpha}^{(2)}(\nu) f(t - \varphi^{(0,2)}(x, \nu)), & H^{(2)} &= \hat{\beta}^{(2)}(\nu) f(t - \varphi^{(0,2)}(x, \nu)), \\ \hat{\alpha}^{(2)}(\nu) &= (\hat{\beta}^{(2)}(\nu) \times \ell^0(\nu)) (\epsilon^0)^{-1}, & \hat{\beta}^{(2)}(\nu) &= (\sin \phi, -\cos \phi, 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь в общем случае $f(t)$ — произвольная обобщенная функция, а $(\epsilon^0)^{-1}$ — матрица обратная к матрице $\epsilon^0 = \text{diag}(\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0)$. Заметим, что $(\hat{\alpha}^{(j)}(\nu), \hat{\beta}^{(j)}(\nu))$, $j = 1, 2$, являются решением уравнений

$$\hat{\beta}^{(j)} \times \nabla \varphi^{(0,j)} = \hat{\alpha}^{(j)} \epsilon^0, \quad \hat{\alpha}^{(j)} \times \nabla \varphi^{(0,j)} = -\mu_0 \hat{\beta}^{(j)}, \quad j = 1, 2,$$

в которых $\varphi^{(0,j)}(x, \nu)$, $j = 1, 2$, определены формулами (6).

Рассмотрим задачу о распространении волн (7) и (8), идущих из бесконечности и падающих на неоднородность, сосредоточенную в выпуклой области Ω с гладкой границей S . Пусть

$$t_j^0(\nu) = \inf_{x \in \Omega} \varphi^{(0,j)}(x, \nu), \quad j = 1, 2,$$

и $y_j^0(\nu)$ — точка касания границы S области Ω и плоскости $\Sigma_j(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi^{(0,j)}(x, \nu) = t_j^0(\nu)\}$, $j = 1, 2$.

Задача. Найти решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= E_t \epsilon(x), \quad \operatorname{rot} E = -\mu_0 H_t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \\ E|_{t < t_j^0(\nu)} &= \hat{\alpha}^{(j)}(\nu) \delta(t - \varphi^{(0,j)}(x, \nu)), \quad H|_{t < t_j^0(\nu)} = \hat{\beta}^{(j)}(\nu) \delta(t - \varphi^{(0,j)}(x, \nu)), \quad (9) \\ j &= 1, 2. \end{aligned}$$

Целесообразность рассмотрения этой задачи оправдывается следующим обстоятельством. Если решение задачи (9) найдено, то решение задачи, отвечающей обобщенной функции $f(t)$, выписывается в виде свертки функции $f(t)$ и решения задачи (9).

Основной вопрос, который нас будет интересовать при изучении задачи (9), заключается в том, как устроено решение этой задачи в окрестности фронта $t = \varphi^{(j)}(x, \nu)$, когда этот фронт пересекается с областью Ω .

Исследование структуры решений фундаментального решения системы уравнений электродинамики для изотропной среды в окрестности фронта волны выполнено в [1] на основе использования векторного потенциала и структуры решения задачи Коши для этого потенциала, аналогичной найденной ранее в [2] для обобщенного волнового уравнения второго порядка (см. также в этой связи [3]). Структура решения системы уравнений Максвелла, соответствующая плоской бегущей волне, идущей из бесконечности, изучена в [4] также с помощью введения векторного потенциала. Для анизотропной среды ввести подобный потенциал не удастся. Поэтому приходится работать непосредственно с системой уравнений первого порядка. Какие-либо исследования для анизотропной среды, связанные с поставленной выше задачей, автору неизвестны.

Стимулом изучения структуры решения поставленной задачи в окрестности фронта волны является то обстоятельство, что на основании полученной структуры можно обосновать высокочастотную асимптотику решения стационарной задачи, отвечающей периодическим по времени решениям уравнений (1). Такая асимптотика была успешно использована при исследовании нового типа обратных задач, так называемых безфазовых задач, в которых требуется найти некоторый коэффициент дифференциального уравнения по информации о модуле комплекснозначного решения. Впервые внимание на важность изучения подобных задач было обращено в [5]. Сравнительно недавно исследование безфазовых обратных задач было выполнено для уравнения Шредингера [6–12], обобщенного уравнения Гельмгольца [13–16] и уравнений электродинамики [3, 4, 17].

§ 2. Структура решения задачи (9)

Исследование задачи (9) проведем при условии, что выполнены некоторые предположения об элементах матрицы $\epsilon(x)$ и метриках, определенных формулами (4) и (5).

Предположение 1. Пусть $\varepsilon_j(x) \in C^m(\mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2$, при достаточно большом целом положительном числе m и, кроме того, существуют положительные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что

$$\begin{aligned} 0 \leq c_1 \leq n_j(x) = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_j(x)} \leq c_2, \quad |\nabla \ln n_j(x)| \leq c_3, \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ \|n_j - n_j^0\|_{C^2(\Omega)} \leq c_4, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $\varphi^{(j)}(x, \nu)$, $j = 1, 2$, — непрерывно дифференцируемые решения задач Коши

$$|\nabla \varphi^{(1)}|^2 = \mu_0 \varepsilon_1, \quad \varphi^{(1)}|_{\varphi^{(0,1)}(x, \nu) \leq t_1^0(\nu)} = \varphi^{(0,1)}(x, \nu), \quad (11)$$

$$\varepsilon_1 (\varphi_{x_1}^{(2)})^2 + \varepsilon_1 (\varphi_{x_2}^{(2)})^2 + \varepsilon_2 (\varphi_{x_3}^{(2)})^2 = \mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad \varphi^{(2)}|_{\varphi^{(0,2)}(x, \nu) \leq t_2^0(\nu)} = \varphi^{(0,2)}(x, \nu). \quad (12)$$

Обозначим через $\mathbb{R}_j^+(\nu)$ полупространство $\mathbb{R}_j^+(\nu) = \{x \mid \varphi^{(0,j)}(x, \nu) > t_j^0(\nu)\}$ и через $\Sigma_j(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi^{(0,j)}(x, \nu) = t_j^0(\nu)\}$ — его границу. Пусть $T_j(\nu) = \sup_{x \in \Omega} \varphi^{(0,j)}(x, \nu)$ и $\Pi_j(\nu) = \{x \mid t_j^0(\nu) \leq \varphi^{(j)}(x, \nu) \leq T_j(\nu)\}$. Заметим, что $\Pi_j(\nu)$ — область, расположенная между двумя фронтами $\varphi^{(j)}(x, \nu) = t_j^0(\nu)$ и $\varphi^{(j)}(x, \nu) = T_j(\nu)$, отстоящими друг от друга на время $s_j^*(\nu) = T_j(\nu) - t_j^0(\nu)$. Это время легко оценить, пользуясь определением значения $T_j(\nu)$ и предположением 1. Оценка для $s_j^*(\nu)$ имеет вид $s_j^*(\nu) \leq c_2 \text{diam } \Omega$.

Предположение 2. Метрики (4) и (5) таковы, что при каждом фиксированном $j = 1, 2$ любая точка x полупространства $\mathbb{R}_j^+(\nu)$ может быть соединена с плоскостью $\Sigma_j(\nu)$ единственной геодезической $\Gamma_j(x, \nu)$, ортогональной этой плоскости.

Предположение 2 означает, что геодезические линии, выпущенные ортогонально плоскости $\Sigma_j(\nu)$, нигде не пересекаются. В принципе, будет достаточно, чтобы это предположение выполнялось в области $\Pi_j(\nu)$. Последнее заведомо выполнено для слабо неоднородной среды, а именно, при условии, что произведение $c_4 \text{diam } \Omega$ мало.

Предположение 3. Для решений задач (11), (12) выполнено неравенство

$$(\varphi_{x_1}^{(j)}(x, \nu))^2 + (\varphi_{x_2}^{(j)}(x, \nu))^2 \neq 0, \quad x \in \Pi_j(\nu), \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Достаточное условие выполнения этого предположения дается следующей леммой.

Лемма 1. Если выполнено неравенство

$$(\nu_1)^2 + (\nu_2)^2 = \sin^2 \vartheta \neq 0, \quad (14)$$

то при выполнении условия

$$c_3^2 < \sin^2 \vartheta (e^{s_j^*(\nu)} - 1)^{-1}, \quad s_j^*(\nu) = T_j(\nu) - t_j^0(\nu), \quad (15)$$

верно неравенство (13).

Доказательство этой леммы дано в § 4. Условие (15) выполняется для слабо градиентных сред, если $\sin^2 \vartheta$ не слишком близок к нулю, а также в случае, когда диаметр области Ω мал.

Для $j = 1, 2$ обозначим $\varphi_j'(x, \nu) = t_j^0 - \varphi^{0,j}(x - y_j^0, \nu)$ и через $D_j(\nu) = \{(x, t) \mid t_j^0(\nu) \leq \varphi_j'(x, \nu) \leq t \leq T_j(\nu), t_j^0(\nu) \leq \varphi^{(j)}(x, \nu) \leq t \leq T_j(\nu)\}$ — клиновидную область, ограниченную характеристическими поверхностями $t = \varphi_j'(x, \nu)$ и $t = \varphi^{(j)}(x, \nu)$. Сечение области $D_j(\nu)$ плоскостью $t = T$, $t_j^0(\nu) \leq T \leq T_j(\nu)$, обозначим через $S_j(T, \nu)$.

Введем

$$\theta_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \theta_n(t) = \frac{t^n}{n!} \theta_0(t), \quad \theta_{-n}(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \theta_0(t) = \delta^{(n-1)}(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–3 и $m = 3s + 5$, где s — некоторое целое неотрицательное число. Тогда решение задачи (9) представимо в области $\mathbb{R}_T^3(\nu) = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^3, t \leq T\}$, $T \leq T_j(\nu)$, в виде

$$\begin{aligned} E^j(x, t, \nu) &= \sum_{k=-1}^s \alpha^{(k,j)} \theta_k(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) + E^{(j,s)}(x, t, \nu), \\ H^j(x, t, \nu) &= \sum_{k=-1}^s \beta^{(k,j)} \theta_k(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) + H^{(j,s)}(x, t, \nu), \end{aligned} \quad (16)$$

в котором $(\alpha^{(k,j)}, \beta^{(k,j)}) \in C^{m-2(k+2)}(\Pi_j(\nu))$ и, кроме того, $\alpha^{(-1,j)} = \hat{\alpha}^{(j)}$, $\beta^{-1,j} = \hat{\beta}^{(j)}$ и $\alpha^{(k,j)} = 0$, $\beta^{(k,j)} = 0$ при $\varphi^{(j)}(x, \nu) \leq t_j^0(\nu)$ и $0 \leq k \leq s$. Функции $E^{(j,s)}(x, t, \nu)$, $H^{(j,s)}(x, t, \nu)$ тождественно равны нулю вне области $D_j(\nu)$ и как функции переменных x, t принадлежат $W_2^{s-n}(S_j(T, \nu)) \times C^n[t_j^0(\nu), T_j(\nu)]$ для $n = 0, 1, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\alpha^{(k,j)} = \beta^{(k,j)} = 0$ для значений $k < -1$, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} E_t^j(x, t, \nu) &= \sum_{k=-1}^{s+1} \alpha^{(k,j)}(x, \nu) \theta_{k-1}(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) \\ &\quad - \alpha^{(s+1,j)}(x, \nu) \theta_s(t - \varphi(x, \nu)) + E_t^{(j,s)}(x, t, \nu), \\ H_t^j(x, t, \nu) &= \sum_{k=-1}^{s+1} \beta^{(k,j)}(x, \nu) \theta_{k-1}(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) \\ &\quad - \beta^{(s+1,j)}(x, \nu) \theta_s(t - \varphi(x, \nu)) + H_t^{(j,s)}(x, t, \nu), \\ \operatorname{rot} E^j(x, t, \nu) &= \sum_{k=-1}^{s+1} [\operatorname{rot} \alpha^{(k-1,j)} + \alpha^{(k,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu)] \theta_{k-1}(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) \\ &\quad - \alpha^{(s+1,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) \theta_s(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) + \operatorname{rot} E^{(j,s)}(x, t, \nu), \\ \operatorname{rot} H^j(x, t, \nu) &= \sum_{k=-1}^{s+1} [\operatorname{rot} \beta^{(k-1,j)} + \beta^{(k,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu)] \theta_{k-1}(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) \\ &\quad - \beta^{(s+1,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) \theta_s(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)) + \operatorname{rot} H^{(j,s)}(x, t, \nu). \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\theta_{k-1}(t - \varphi^{(j)}(x, \nu))$, $-1 \leq k \leq s+1$, получаем равенства для определения $\alpha^{(k,j)}$, $\beta^{(k,j)}$:

$$\begin{aligned} \beta^{(k,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) + \operatorname{rot} \beta^{(k-1,j)} &= \alpha^{(k,j)} \epsilon(x), \\ \alpha^{(k,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) + \operatorname{rot} \alpha^{(k-1,j)} &= -\mu_0 \beta^{(k,j)}, \quad -1 \leq k \leq s+1, \end{aligned} \quad (17)$$

и соотношения для $E^{(j,s)}$, $H^{(j,s)}$ в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H^{(j,s)} &= E_t^{(j,s)} \epsilon(x) + [\beta^{(s+1,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) - \alpha^{(s+1,j)} \epsilon(x)] \theta_s(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)), \\ \operatorname{rot} E^{(j,s)} &= -\mu_0 H_t^{(j,s)} + [\alpha^{(s+1,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) + \mu_0 \beta^{(s+1,j)}] \theta_s(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)), \end{aligned} \quad (18)$$

$$(E^{(j,s)}, H^{(j,s)})|_{t < t_j^0(\nu)} = 0.$$

Заметим, что согласно равенствам (17) справедливы формулы

$$\begin{aligned}\beta^{(s+1,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) - \alpha^{(s+1,j)} \epsilon(x) &= -\operatorname{rot} \beta^{(s,j)}, \\ \alpha^{(s+1,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu) + \mu_0 \beta^{(s+1,j)} &= -\operatorname{rot} \alpha^{(s,j)}.\end{aligned}$$

Поэтому уравнения (18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}E_t^{(j,s)} \epsilon(x) - \operatorname{rot} H^{(j,s)} &= \operatorname{rot} \beta^{(s,j)} \theta_s(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)), \\ \mu_0 H_t^{(j,s)} + \operatorname{rot} E^{(j,s)} &= -\operatorname{rot} \alpha^{(s,j)} \theta_s(t - \varphi^{(j)}(x, \nu)), \\ (E^{(j,s)}, H^{(j,s)})|_{t < t_j^0(\nu)} &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

который более удобен для дальнейшего исследования.

Для системы (17) имеет место

Лемма 2. При выполнении условий теоремы 1 функции $\alpha^{(k,j)}(x, \nu)$ и $\beta^{(k,j)}(x, \nu)$ однозначно определяются равенствами (17) для всех $-1 \leq k \leq s$. При этом $\alpha^{(k,j)}(x, \nu)$, $\beta^{(k,j)}(x, \nu)$ как функции переменной x принадлежат классу $C^{m-2(k+2)}(\Pi_j(\nu))$.

Доказательство этой леммы дано в § 3.

Пусть $(x, t) \in \mathbb{R}_T^3(\nu) = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^3, t \leq T\}$, $T \leq T_j(\nu)$. Правые части равенств (19) имеют конечный носитель в области $\mathbb{R}_T^3(\nu)$, содержащейся в области $D_j(\nu)$, ограниченной характеристическими поверхностями. Поэтому в силу гиперболичности этой системы $E^{(j,s)} = H^{(j,s)} = 0$ вне пересечения областей $\mathbb{R}_T^3(\nu)$ и $D_j(\nu)$. Кроме того, согласно лемме 2 $\operatorname{rot} \alpha^{(s,j)}(x, \nu)$ и $\operatorname{rot} \beta^{(s,j)}(x, \nu)$ принадлежат пространству $C^{m-2(s+2)-1}(\Pi_j(\nu))$, а так как $m = 5 + 3s$, — пространству $C^s(\Pi_j(\nu))$. Следовательно, правые части равенств (19) принадлежат пространству $C^s(D_j(\nu))$. Из известных результатов [18] для гиперболических симметрических систем следует, что $E^{(j,s)}$ и $H^{(j,s)}$ принадлежат $W_2^{s-n}(S_j(T, \nu)) \times C^n[t_j^0(\nu), T_j(\nu)]$ для $n = 0, 1, \dots, s$. $\square$

§ 3. Доказательство леммы 2

Найдем $\alpha^{(k,j)}$ и $\beta^{(k,j)}$ из равенств (17). Исключим из первого равенства (17) член $\beta^{(k,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}$. Тогда для отыскания $\alpha^{(k,j)}$, $-1 \leq k \leq s+1$, получим соотношения

$$(\alpha^{(k,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}) \times \nabla \varphi^{(j)} + \alpha^{(k,j)} \mu_0 \epsilon(x) = \nabla \varphi^{(j)} \times \operatorname{rot} \alpha^{(k-1,j)} + \mu_0 \operatorname{rot} \beta^{(k-1,j)}.\tag{20}$$

Покажем, что из этих соотношений можно найти $\alpha^{(k,j)}$ для $-1 \leq k \leq s$ и, кроме того, часть информации относительно вектора $\alpha^{(s+1,j)}$. После этого из второго соотношения (17) можно вычислить $\beta^{(k,j)}$ для $-1 \leq k \leq s$. Как видно из § 2, этого вполне достаточно для доказательства теоремы 1.

Используя для векторов a, b, c равенство

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c,$$

получаем

$$\begin{aligned}(\alpha^{(k,j)} \times \nabla \varphi^{(j)}(x, \nu)) \times \nabla \varphi^{(j)} + \alpha^{(k,j)} \mu_0 \epsilon(x) \\ = (\epsilon \mu_0 - I |\nabla \varphi^{(j)}|^2) \alpha^{(k,j)} + (\alpha^{(k,j)} \cdot \nabla \varphi^{(j)}) \nabla \varphi^{(j)}.\end{aligned}$$

Поэтому соотношения (17) можно представить в виде

$$\alpha^{(k,j)}(\epsilon\mu_0 - I|\nabla\varphi^{(j)}|^2) + (\alpha^{(k,j)} \cdot \nabla\varphi^{(j)})\nabla\varphi^{(j)} = \nabla\varphi^{(j)} \times \text{rot } \alpha^{(k-1,j)} + \mu_0 \text{rot } \beta^{(k-1,j)}. \quad (21)$$

Используя формулу векторного анализа

$$\text{rot}(a \times b) = a \text{div } b - b \text{div } a + (b \cdot \nabla)a - (a \cdot \nabla)b$$

и вторую формулу (17), находим, что

$$\begin{aligned} \mu_0 \text{rot } \beta^{(k,j)} &= (\text{div } \alpha^{(k,j)})\nabla\varphi^{(j)} - \alpha^{(k,j)}\Delta\varphi^{(j)} - (\nabla\varphi^{(j)} \cdot \nabla)\alpha^{(k,j)} \\ &\quad + (\alpha^{(k,j)} \cdot \nabla)\nabla\varphi^{(j)} - \text{rot rot } \alpha^{(k-1,j)}. \end{aligned}$$

Тогда равенства (21) преобразуются к виду

$$\alpha^{(k,j)}(\epsilon\mu_0 - I|\nabla\varphi|^2) + (\alpha^{(k,j)} \cdot \nabla\varphi)\nabla\varphi^{(j)} = G^{k-1,j}, \quad -1 \leq k \leq s+1, \quad (22)$$

в котором

$$\begin{aligned} G^{k-1,j} &= \nabla\varphi^{(j)} \times \text{rot } \alpha^{k-1,j} + (\text{div } \alpha^{k-1,j})\nabla\varphi^{(j)} - \alpha^{k-1,j}\Delta\varphi^{(j)} \\ &\quad - (\nabla\varphi^{(j)} \cdot \nabla)\alpha^{k-1,j} + (\alpha^{k-1,j} \cdot \nabla)\nabla\varphi^{(j)} - \text{rot rot } \alpha^{k-2,j}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случаи $j = 1$ и $j = 2$ отдельно.

Мода $j = 1$.

В этом случае равенство (22) можно записать в виде

$$\mu_0(\epsilon - I\varepsilon_1)\alpha^{k,1} + (\alpha^{k,1} \cdot \nabla\varphi^{(1)})\nabla\varphi^{(1)} = G^{k-1,1}, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (23)$$

Введем векторы

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= (\varphi_{x_2}^{(1)}, -\varphi_{x_1}^{(1)}, 0) [(\varphi_{x_1}^{(1)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(1)})^2]^{-1/2}, \\ z^{(2)} &= (\varphi_{x_1}^{(1)}, \varphi_{x_2}^{(1)}, 0) [(\varphi_{x_1}^{(1)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(1)})^2]^{-1/2}, \quad z^{(3)} = z^{(1)} \times z^{(2)} = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$|z^{(n)}| = 1, \quad n = 1, 2, 3; \quad z^{(n)} \cdot z^{(i)} = 0, \quad n \neq i.$$

Умножая (23) на $[(\varphi_{x_1}^{(1)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(1)})^2]^{-1/2} z^{(2)}$, находим

$$\alpha^{k,1} \cdot \nabla\varphi^{(1)} = (G^{k-1,1} \cdot z^{(2)}) [(\varphi_{x_1}^{(1)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(1)})^2]^{-1/2} \equiv g_1^k, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (24)$$

Аналогично, умножая (23) на $z^{(3)}$, получаем соотношение

$$\mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\alpha^{k,1} \cdot z^{(3)} + (\alpha^{k,1} \cdot \nabla\varphi^{(1)})\varphi_{x_3}^{(1)} = G^{k-1,1} \cdot z^{(3)} \equiv g_2^k, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (25)$$

Представим вектор $\alpha^{k,1}$ в виде

$$\alpha^{k,1} = A_1^{k,1} z^{(1)} + A_2^{k,1} z^{(2)} + A_3^{k,1} z^{(3)}, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (26)$$

Тогда $A_2^{k,1}$ и $A_3^{k,1}$ однозначно определяются равенствами (24) и (25). В самом деле,

$$\alpha^{k,1} \cdot \nabla\varphi^{(1)} = A_2^{k,1} [(\varphi_{x_1}^{(1)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(1)})^2]^{1/2} + \varphi_{x_3}^{(1)} A_3^{k,1} = g_1^k,$$

$$\begin{aligned} \mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\alpha^{k,1} \cdot z^{(3)} + (\alpha^{k,1} \cdot \nabla\varphi^{(1)})\varphi_{x_3}^{(1)} &= \varphi_{x_3}^{(1)} [(\varphi_{x_1}^{(1)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(1)})^2]^{1/2} A_2^{k,1} \\ &\quad + (\mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\varphi_{x_3}^{(1)})^2) A_3^{k,1} = g_2^k. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_2^{k,1} = \frac{g_1^k [\mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\varphi_{x_3}^{(1)})^2] - g_2^{k,1} \varphi_{x_3}^{(1)}}{\mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) [(\varphi_{x_1}^{(1)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(1)})^2]^{1/2}}, \quad A_3^{k,1} = \frac{g_2^k - g_1^k \varphi_{x_3}^{(1)}}{\mu_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (27)$$

Равенства (27) представляют собой рекуррентную систему соотношений. Они позволяют вычислить $A_2^{k,1}$ и $A_3^{k,1}$, если уже найдены $\alpha^{(k-1,1)}$, $\alpha^{(k-2,1)}$. В частности,

$$A_2^{-1,1}(x, \nu) = A_3^{-1,1}(x, \nu) = 0.$$

Для определения $A_3^{k,1}(x, \nu)$ имеем уравнение

$$0 = -(G^{k,1} \cdot z^{(1)}) = [\text{rot } \alpha^{k,1} \times \nabla \varphi^{(1)} - (\text{div } \alpha^{k,1}) \nabla \varphi^{(1)} + \alpha^{k,1} \Delta \varphi^{(1)} + (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) \alpha^{k,1} - (\alpha^{k,1} \cdot \nabla) \nabla \varphi^{(1)} + \text{rot rot } \alpha^{k-1,1}] \cdot z^{(1)}, \quad -1 \leq k \leq s. \quad (28)$$

Воспользуемся равенством

$$\nabla(a \cdot b) = (b \cdot \nabla)a + (a \cdot \nabla)b + a \times \text{rot } b + b \times \text{rot } a.$$

Полагая в этом равенстве $a = \alpha^{k,1}$, $b = \nabla \varphi^{(1)}$ и используя формулу $\text{rot } \nabla = 0$, находим

$$\nabla(\alpha^{k,1} \cdot \nabla \varphi^{(1)}) = (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) \alpha^{k,1} + (\alpha^{k,1} \cdot \nabla) \nabla \varphi^{(1)} + \nabla \varphi^{(1)} \times \text{rot } \alpha^{k,1}.$$

Следовательно,

$$\text{rot } \alpha^{k,1} \times \nabla \varphi^{(1)} = (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) \alpha^{k,1} + (\alpha^{k,1} \cdot \nabla) \nabla \varphi^{(1)} - \nabla(\alpha^{k,1} \cdot \nabla \varphi^{(1)}).$$

Подставляя это выражение в равенство (28), приходим к уравнению

$$[2(\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) \alpha^{k,1} - (\text{div } \alpha^{k,1}) \nabla \varphi^{(1)} + \alpha^{k,1} \Delta \varphi^{(1)} - \nabla(\alpha^{k,1} \cdot \nabla \varphi^{(1)}) + \text{rot rot } \alpha^{k-1,1}] \cdot z^{(1)} = 0, \quad -1 \leq k \leq s. \quad (29)$$

Так как $z^{(1)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} = (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla |z^{(1)}|^2)/2 = 0$, то

$$\begin{aligned} 2(\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) \alpha^{k,1} \cdot z^{(1)} &= 2\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla(\alpha^{k,1} \cdot z^{(1)}) - 2\alpha^{k,1} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} \\ &= 2\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla A_1^{k,1} - 2\alpha^{k,1} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^{k,1} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} &= A_1^{k,1} z^{(1)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} + A_2^{k,1} z^{(2)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} \\ &+ A_3^{k,1} z^{(3)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} = A_2^{k,1} z^{(2)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} + A_3^{k,1} z^{(3)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\alpha^{k,1} \cdot \nabla \varphi^{(1)} = A_2^{k,1} (z^{(2)} \cdot \nabla \varphi^{(1)}) + A_3^{k,1} (z^{(3)} \cdot \nabla \varphi^{(1)}).$$

Поэтому можно записать уравнение (29) в виде

$$2\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla A_1^{k,1} + A_1^{k,1} \Delta \varphi^{(1)} + F^{k,1} = 0, \quad -1 \leq k \leq s, \quad (30)$$

в котором

$$\begin{aligned} F^{k,1}(x, \nu) &= -\nabla(A_2^{k,1} (z^{(2)} \cdot \nabla \varphi^{(1)}) + A_3^{k,1} (z^{(3)} \cdot \nabla \varphi^{(1)})) \cdot z^{(1)} \\ &- 2A_2^{k,1} z^{(2)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} - 2A_3^{k,1} z^{(3)} \cdot (\nabla \varphi^{(1)} \cdot \nabla) z^{(1)} \\ &+ \text{rot rot } \alpha^{k-1,1} \cdot z^{(1)}. \end{aligned}$$

В соответствии с начальными данными задачи Коши (9) примем, что

$$A_1^{-1,1}(x, \nu) = 1, \quad A_1^{k,1}(x, \nu) = 0, \quad x \in \{x \mid \varphi^{(0,1)}(x, \nu) \leq t_1(\nu)\}, \quad k = 0, 1, \dots, s. \quad (31)$$

Уравнение (30) представляет собой рекуррентное соотношение для отыскания $A_1^{(k,1)}(x, \nu)$ при уже вычисленной функции $\alpha^{(k-1,1)}(x, \nu)$. Заметим, что $\alpha^{(-2,1)}(x, \nu) = 0$ по определению. С другой стороны, это уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль геодезических, определяемых метрикой $d\tau^{(1)} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_1(x)} |dx|$. Пусть ξ — произвольная точка полупространства $\mathbb{R}_{1+}^3(\nu) = \{x \mid \varphi^{(0,1)}(x, \nu) \geq t_1(\nu)\}$. Обозначим $p^{(1)}(\xi, \nu) = \nabla_\xi \varphi^{(1)}(\xi, \nu)$, $Q^{(1)}(\xi, \nu) = \varphi_{\xi_i \xi_n}^{(1)}(\xi, \nu)$, $i, n = 1, 2, 3$, и через s — время пробега электромагнитной волны от плоскости $\Sigma_1(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi^{(0,1)}(x, \nu) = t_1(\nu)\}$ до точки ξ . Для $\xi \in \mathbb{R}_{1+}^3(\nu)$ уравнения для построения геодезической, выходящей из точки $y \in \Sigma_1(\nu)$ ортогонально плоскости $\Sigma_1(\nu)$, функции $\varphi^{(1)}(\xi, \nu)$, вектора $p^{(1)}$ и матрицы $Q^{(1)}$ имеют вид

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{p^{(1)}}{n_1^2(\xi)}, \quad \frac{dp^{(1)}}{ds} = \nabla \ln n_1(\xi), \quad \frac{d\varphi^{(1)}}{ds} = 1, \quad \frac{dQ^{(1)}}{ds} + \frac{(Q^{(1)})^2}{n_1^2(\xi)} = \frac{(n_1^2)_{\xi\xi}}{2n_1^2(\xi)}, \quad (32)$$

$$\xi|_{s=0} = y, \quad p^{(1)}|_{s=0} = n_1^0 \nu, \quad \varphi^{(1)}|_{s=0} = t_1^0(\nu), \quad Q^{(1)}|_{s=0} = 0. \quad (33)$$

В уравнениях (32) $(n_1^2)_{\xi\xi}$ — матрица с компонентами $(n_1^2)_{\xi_i \xi_n}$, $i, n = 1, 2, 3$. Уравнение (30) вместе с начальными данными записывается в виде

$$\frac{dA_1^{k,1}}{ds} + \frac{1}{2n^2(\xi)} A_1^{k,1} \operatorname{tr} Q^{(1)} + \frac{1}{2n^2(\xi)} F^{k,1}(\xi, \nu) = 0, \quad -1 \leq k \leq s, \quad (34)$$

$$(A_1^{-1,1})_{s=0} = 1, \quad (A_1^{k,1})_{s=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s, \quad (35)$$

в котором $\operatorname{tr} Q^{(1)}$ — след матрицы $Q^{(1)}$.

Система равенств (32)–(35) определяет ξ , $\varphi^{(1)}$, $p^{(1)}$, $Q^{(1)}$, $A^{(k,1)}$ как функции переменных s , y и параметра $\nu \in \mathbb{S}^2$. Так как $y \in \Sigma_1(\nu)$, точка y может быть представлена в виде $y = y^{(1)}(\nu) + \zeta_1 e^{(1)} + \zeta_2 e^{(2)}$, в котором $y^{(1)}(\nu)$ — точка касания $\Sigma_1(\nu)$ и S , а $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ — произвольные единичные векторы, ортогональные друг другу и вектору ν . Следовательно, ξ , $\varphi^{(1)}$, $p^{(1)}$, $Q^{(1)}$, $A^{(k,1)}$ являются также функциями переменных s , ζ_1 , ζ_2 при каждом фиксированном значении $\nu \in \mathbb{S}^2$. Их гладкость определяется гладкостью элементов матрицы $\epsilon(x)$. А именно, ξ , $p^{(1)}$ принадлежат классу $C^{m-1}(\Pi_j(\nu))$, $Q^{(1)}$ — классу $C^{m-2}(\Pi_j(\nu))$, а $A^{(k,1)}$ — классу $C^{m-2(k+2)}(\Pi_j(\nu))$. В силу предположения 2 между $x \in \Pi_j(\nu)$ и переменными s, ζ_1, ζ_2 существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому равенство $x = \xi(s, \zeta_1, \zeta_2, \nu)$, определяющее геодезическую $\Gamma_1(x, \nu)$, может быть разрешено относительно переменных s, ζ_1, ζ_2 . В результате этого однозначно определяются s, ζ_1, ζ_2 как функции переменных x, ν , а также $\varphi^{(1)} = \varphi^{(1)}(x, \nu)$ и $A^{(k,1)} = A^{(k,1)}(x, \nu)$, $k = -1, 0, \dots, s$. В итоге вычисляются все $\alpha^{(k,1)}(x, \nu)$, $k = -1, 0, \dots, s$, по формуле (26). При этом $\alpha^{(k,1)}(x, \nu)$ принадлежит классу $C^{m-2(k+2)}(\Pi_j(\nu))$. Очевидно, что тому же классу принадлежат и $\beta^{(k,1)}(x, \nu)$, $k = -1, 0, \dots, s$.

Модя $j = 2$.

В этом случае $\varphi^{(2)}(x, \nu)$ — решение задачи (12) и уравнение для нахождения $\alpha^{k,2}$ имеет вид

$$\alpha^{k,2}(\mu_0 \epsilon - I |\nabla \varphi^{(2)}|^2) + (\alpha^{k,2} \cdot \nabla \varphi^{(2)}) \nabla \varphi^{(2)} = G^{k-1,2}, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (36)$$

Введем векторы

$$\begin{aligned}\eta^{(1)} &= (\varphi_{x_3}^{(2)} \nabla \varphi^{(2)} - \mu_0 \varepsilon_1 e^{(3)}) [(\varphi_{x_3}^{(2)})^2 (|\nabla \varphi^{(2)}|^2 - 2\mu_0 \varepsilon_1) + (\mu_0 \varepsilon_1)^2]^{-1/2}, \\ \eta^{(2)} &= \left(\frac{\varphi_{x_1}^{(2)}}{\mu_0 \varepsilon_2}, \frac{\varphi_{x_2}^{(2)}}{\mu_0 \varepsilon_2}, \frac{\varphi_{x_1}^{(3)}}{\mu_0 \varepsilon_1} \right), \quad \eta^{(3)} = (\varphi_{x_2}^{(2)}, -\varphi_{x_1}^{(2)}, 0).\end{aligned}\quad (37)$$

Здесь использовано обозначение $e^{(3)} = (0, 0, 1)$. Заметим, что

$$|\eta^{(1)}| = 1, \quad \nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(2)} = 1; \quad \eta^{(n)} \cdot \eta^{(i)} = 0, \quad n \neq i, \quad n, i = 1, 2, 3. \quad (38)$$

Пусть

$$\alpha^{k,2} = A_1^{k,2} \eta^{(1)} + A_2^{k,2} \eta^{(2)} + A_3^{k,2} \eta^{(3)}, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (39)$$

Умножая (36) на $(\mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 |\eta^{(2)}|^2)^{-1} \nabla \varphi^{(2)}$, находим, что

$$A_2^{k,2} = (G^{k-1,2} \cdot \nabla \varphi^{(2)}) (\mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 |\eta^{(2)}|^2)^{-1}, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (40)$$

Умножая (36) на $(\mu_0 \varepsilon_1 - |\nabla \varphi^{(2)}|^2)^{-1} |\eta^{(3)}|^{-2} \eta^{(3)}$, получаем равенство

$$A_3^{k,2} = (G^{k-1,2} \cdot \eta^{(3)}) (\mu_0 \varepsilon_1 - |\nabla \varphi^{(2)}|^2)^{-1} |\eta^{(3)}|^{-2}, \quad -1 \leq k \leq s+1. \quad (41)$$

Из равенств (40) и (41) следует, что $A_2^{-1,2}(x, \nu) = A_3^{-1,2}(x, \nu) = 0$.

Для нахождения $A_1^{k,2}$ имеем равенство

$$\begin{aligned}0 &= -(G^{k,2} \cdot \eta^{(1)}) = [\text{rot } \alpha^{k,2} \times \nabla \varphi^{(2)} - (\text{div } \alpha^{k,2}) \nabla \varphi^{(2)} - \alpha^{k,2} \Delta \varphi^{(2)} \\ &\quad + (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla) \alpha^{k,2} - (\alpha^{k,2} \cdot \nabla) \nabla \varphi^{(2)} + \text{rot rot } \alpha^{k-1,2}] \cdot \eta^{(1)}, \quad -1 \leq k \leq s.\end{aligned}\quad (42)$$

Точно так же, как и в случае $j = 1$, это уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&[2(\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla) \alpha^{k,2} - (\text{div } \alpha^{k,2}) \nabla \varphi^{(2)} - \nabla(\alpha^{k,2} \cdot \nabla \varphi^{(2)}) \\ &\quad + \alpha^{k,2} \Delta \varphi^{(2)} + \text{rot rot } \alpha^{k-1,2}] \cdot \eta^{(1)} = 0, \quad -1 \leq k \leq s.\end{aligned}\quad (43)$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned}2[(\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla) \alpha^{k,2}] \cdot \eta^{(1)} &= 2\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla A_1^{k,2} - 2\alpha^{k,2} \cdot [(\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla) \eta^{(1)}] \\ &= 2\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla A_1^{k,2} - 2(B^{k,2} \eta^{(2)} + C^{k,2} \eta^{(3)}) \cdot [(\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla) \eta^{(1)}],\end{aligned}$$

при получении которого использовано то, что $|\eta^{(1)}|^2 = 1$, поэтому

$$2\eta^{(1)} \cdot (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla) \eta^{(1)} = (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \nabla) |\eta^{(1)}|^2 = 0.$$

Справедлива также цепочка равенств

$$\begin{aligned}&-[(\text{div } \alpha^{k,2}) \nabla \varphi^{(2)} - \nabla(\alpha^{k,2} \cdot \nabla \varphi^{(2)})] \cdot \eta^{(1)} \\ &= -\text{div}[\alpha^{k,2} (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + (\alpha^{k,2} \cdot \nabla \varphi^{(2)}) \eta^{(1)}] \\ &\quad + \alpha^{k,2} \cdot \nabla (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + (\alpha^{k,2} \cdot \nabla \varphi^{(2)}) \text{div } \eta^{(1)} \\ &= -2\nabla A_1^{k,2} \cdot \eta^{(1)} (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) - 2A_1^{k,2} \text{div}[\eta^{(1)} (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})] \\ &\quad - \text{div}[A_2^{k,2} \eta^{(2)} (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + A_2^{k,2} (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(2)}) \eta^{(1)}] \\ &\quad - \text{div}[A_3^{k,2} \eta^{(3)} (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + A_3^{k,2} (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(3)}) \eta^{(1)}] \\ &\quad + A_1^{k,2} [\eta^{(1)} \cdot \nabla (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) \text{div } \eta^{(1)}] \\ &\quad + A_2^{k,2} [\eta^{(2)} \cdot \nabla (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(2)}) \text{div } \eta^{(1)}] \\ &\quad + A_3^{k,2} [\eta^{(3)} \cdot \nabla (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + (\nabla \varphi^{(2)} \cdot \eta^{(3)}) \text{div } \eta^{(1)}].\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(3)} = 0$, из (43) приходим к равенству

$$\begin{aligned} & 2\nabla A_1^{k,2} \cdot (\nabla\varphi^{(2)} - (\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})\eta^{(1)}) - 2(A_2^{k,2}\eta^{(2)} + A_2^{k,2}\eta^{(3)}) \cdot [(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \nabla)\eta^{(1)}] \\ & - A_1^{k,2} \operatorname{div}[\eta^{(1)}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})] - \operatorname{div}[A_2^{k,2}\eta^{(2)}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + A_2^{k,2}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(2)})\eta^{(1)}] \\ & - \operatorname{div}[A_3^{k,2}\eta^{(3)}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})] + A_2^{k,2}[\eta^{(2)} \cdot \nabla(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + (\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(2)}) \operatorname{div}\eta^{(1)}] \\ & + A_3^{k,2}[\eta^{(3)} \cdot \nabla(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})] + A_1^{k,2}\Delta\varphi^{(2)} + (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \alpha^{k-1,2}) \cdot \eta^{(1)} = 0, \quad -1 \leq k \leq s. \end{aligned} \quad (44)$$

Используя равенства

$$\begin{aligned} \nabla\varphi^{(2)} - (\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})\eta^{(1)} &= \eta^{(2)}|\eta^{(2)}|^{-2}, \\ \Delta\varphi^{(2)} - \operatorname{div}[\eta^{(1)}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})] &= \operatorname{div}(\eta^{(2)}|\eta^{(2)}|^{-2}), \end{aligned}$$

получаем уравнение для отыскания $A_1^{k,2}$ в виде

$$2\nabla A_1^{k,2} \cdot \eta^{(2)} + A_1^{k,2}|\eta^{(2)}|^2 \operatorname{div}(\eta^{(2)}|\eta^{(2)}|^{-2}) + F^{k,2} = 0, \quad -1 \leq k \leq s, \quad (45)$$

в котором

$$\begin{aligned} F^{k,2}(x, \nu) &= |\eta^{(2)}|^2 \{ -2(A_2^{k,2}\eta^{(2)} + A_3^{k,2}\eta^{(3)}) \cdot [(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \nabla)\eta^{(1)}] \\ & - \operatorname{div}[A_2^{k,2}\eta^{(2)}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + A_2^{k,2}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(2)})\eta^{(1)} + A_3^{k,2}\eta^{(3)}(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})] \\ & + A_2^{k,2}[\eta^{(2)} \cdot \nabla(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)}) + (\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(2)}) \operatorname{div}\eta^{(1)}] \\ & + A_3^{k,2}[\eta^{(3)} \cdot \nabla(\nabla\varphi^{(2)} \cdot \eta^{(1)})] + (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \alpha^{k-1,2}) \cdot \eta^{(1)} \}. \end{aligned}$$

Полагая

$$A_1^{-1,2}(x, \nu) = 1, \quad A_1^{k,2}(x, \nu) = 0, \quad x \in \{x \mid \varphi^{(0,2)}(x, \nu) \leq t_2(\nu)\}, \quad k = 0, 1, \dots, s, \quad (46)$$

получим для нахождения $A_1^{k,2}$ задачу Коши (45), (46). Равенства (45) представляют собой рекуррентные соотношения для отыскания $A_1^{(k,2)}(x, \nu)$, если функция $\alpha^{(k-1,2)}(x, \nu)$ уже вычислена. Заметим, что $\alpha^{(-2,2)}(x, \nu) = 0$ по определению.

Выпишем систему дифференциальных уравнение вдоль геодезических, определяемых метрикой (5). Пусть ξ — произвольная точка полупространства $\mathbb{R}_{2+}^3(\nu) = \{x \mid \varphi^{(0,2)}(x, \nu) \geq t_2(\nu)\}$. Обозначим

$$p(\xi, \nu) = \nabla_\xi \varphi^{(2)}(\xi, \nu), \quad \mathcal{N}(\xi) = \operatorname{diag}(n_2^{-2}(\xi), n_2^{-2}(\xi), n_1^{-2}(\xi)),$$

$$Q^{(2)}(\xi, \nu) = \varphi_{\xi \xi_n}^{(2)}(\xi, \nu), \quad i, n = 1, 2, 3,$$

и через s — время пробега электромагнитной волны от плоскости $\Sigma_2(\nu) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi^{(0,2)}(y, \nu) = t_2(\nu)\}$ до точки ξ . Введем гамильтониан

$$\mathcal{H}(\xi, p) = \frac{1}{2}[(p \cdot \mathcal{N}(\xi)) \cdot p - 1].$$

Для $\xi \in \mathbb{R}_{2+}^3(\nu)$ уравнения для построения геодезической, выходящей из точки $y \in \Sigma_2(\nu)$ ортогонально плоскости $\Sigma_2(\nu)$, функции $\varphi^{(2)}$ и вектора p имеют вид

$$\frac{d\xi}{ds} = \mathcal{H}_p, \quad \frac{dp}{ds} = -\mathcal{H}_\xi, \quad \frac{d\varphi^{(2)}}{ds} = 1, \quad (47)$$

$$\xi|_{s=0} = y, \quad p|_{s=0} = \ell^0(\nu), \quad \varphi^{(2)}|_{s=0} = t_2^0(\nu). \quad (48)$$

Здесь $\mathcal{H}_p = \nabla_p \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_\xi = \nabla_\xi \mathcal{H}$ и $\ell^0(\nu) = (n_2^0 \nu_1, n_2^0 \nu_2, n_1^0 \nu_3)$.

Чтобы найти уравнение для матрицы $Q^{(2)}$, запишем вдоль геодезической равенство, вытекающее из формул (47), а именно

$$\mathcal{H}_p(\xi, p(\xi, \nu))Q^{(2)}(\xi) + \mathcal{H}_\xi(\xi, p(\xi, \nu)) = 0.$$

Дифференцируя его по ξ , получаем новое равенство

$$\mathcal{H}_p Q_\xi^{(2)} + (p_\xi \mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{p\xi})Q^{(2)} + p_\xi \mathcal{H}_{\xi p} + \mathcal{H}_{\xi\xi} = 0.$$

В этом равенстве $\mathcal{H}_{pp}$, $\mathcal{H}_{p\xi}$, $\mathcal{H}_{\xi\xi}$ — матрицы, образованные вторыми смешанными производными по соответствующим переменным. Замечая, что $\mathcal{H}_p Q_\xi^{(2)} = dQ^{(2)}/ds$ и $p_\xi = Q^{(2)}$, запишем это равенство в виде

$$\frac{dQ^{(2)}}{ds} + (Q^{(2)} \mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{p\xi})Q^{(2)} + Q^{(2)} \mathcal{H}_{\xi p} + \mathcal{H}_{\xi\xi} = 0. \quad (49)$$

Начальные данные для матрицы $Q^{(2)}$ имеют вид

$$Q^{(2)}|_{s=0} = 0. \quad (50)$$

Уравнение (44) является обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль геодезических линий метрики (5). Так как $\eta^{(2)}(\xi, \nu) = \mathcal{H}_p(\xi, p(\xi, \nu))$, то $\nabla A_1^{(k,2)}$. $\eta^{(2)} = dA_1^{k,2}/ds$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\eta^{(2)}|\eta^{(2)}|^2) &= |\mathcal{H}_p(\xi, p(\xi, \nu))|^2 \operatorname{tr}(\mathcal{H}_p(\xi, p(\xi, \nu)))_\xi \\ &\quad + (\mathcal{H}_p(\xi, p(\xi, \nu)) \cdot (\mathcal{H}_p(\xi, p(\xi, \nu)) \cdot \mathcal{H}_p(\xi, p(\xi, \nu))))_\xi \\ &= |\mathcal{H}_p|^2 \operatorname{tr}(Q^{(2)} \mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{p\xi}) + 2[\mathcal{H}_p \cdot (\mathcal{H}_p(Q^{(2)} \mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{p\xi}))]. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (45) и начальные данные для функции $A_1^{k,2}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA_1^{k,2}}{ds} + \frac{1}{2} A_1^{k,2} \{ \operatorname{tr}(Q^{(2)} \mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{p\xi}) \\ + 2|\mathcal{H}_p|^{-2} [\mathcal{H}_p \cdot (Q^{(2)} \mathcal{H}_p(\mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{p\xi}))] \} + \frac{1}{2} F^{k,2}(\xi, \nu) = 0, \quad -1 \leq k \leq s, \end{aligned} \quad (51)$$

$$(A_1^{-1,2})_{s=0} = 1, \quad (A_1^{k,2})_{s=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s. \quad (52)$$

Система равенств (47)–(52) определяет ξ , $\varphi^{(2)}$, p , $Q^{(2)}$, $A_1^{(k,2)}$ как функции переменных s, y и параметра $\nu \in \mathbb{S}^2$. Так же, как и в случае моды 1, эти функции могут быть найдены как функции переменных x, ν . При этом $\varphi^{(2)}(x, \nu)$ является при каждом фиксированном ν функцией класса $C^{m-1}(\Pi_j(\nu))$, а $A_1^{(k,2)}(x, \nu)$ — функцией класса $C^{m-2(k+2)}(\Pi_j(\nu))$. В итоге по формуле (39) вычисляются $\alpha^{(k,2)}(x, \nu)$, а затем по формулам (17) находятся $\beta^{(k,2)}(x, \nu)$ для $k = -1, 0, \dots, s$. При этом $\alpha^{(k,2)}(x, \nu)$ и $\beta^{(k,2)}(x, \nu)$ принадлежат классу $C^{m-2(k+2)}(\Pi_j(\nu))$. $\square$

§ 4. Доказательство леммы 1

Пусть $p^{(j)} = \nabla_{\xi} \varphi^{(j)}(\xi, \nu) = (p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, p_3^{(j)})$ и $P^{(j)} = (p_1^{(j)})^2 + (p_2^{(j)})^2$, $j = 1, 2$. Из равенств (32), (47), определяющих уравнения геодезических линий, следует, что

$$\left| \frac{dP^{(1)}}{ds} \right| \leq 2(|p_1^{(j)}| |(\ln n_1(\xi))_{\xi_1}| + |p_2^{(j)}| |(\ln n_1(\xi))_{\xi_2}|),$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{dP^{(2)}}{ds} \right| &\leq 2|p_1^{(2)}| |(\ln n_2(\xi))_{\xi_1} n_2^{-2} [(p_1^{(2)})^2 + (p_2^{(2)})^2] + (\ln n_1(\xi))_{\xi_1} n_1^{-2} (p_3^{(2)})^2| \\ &\quad + 2|p_2^{(2)}| |(\ln n_2(\xi))_{\xi_2} n_2^{-2} [(p_1^{(2)})^2 + (p_2^{(2)})^2] + (\ln n_1(\xi))_{\xi_2} n_1^{-2} (p_3^{(2)})^2| \\ &\leq 2(|p_1^{(2)}| \max_{j=1,2} |(\ln n_j(\xi))_{\xi_1}| + |p_2^{(2)}| \max_{j=1,2} |(\ln n_j(\xi))_{\xi_2}|). \end{aligned}$$

Отсюда, используя второе неравенство (10), получаем оценку

$$\left| \frac{dP^{(j)}}{ds} \right| \leq c_3^2 + P^{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда вдоль геодезической $\xi = \xi^{(j)}(s, y, \nu)$ с учетом равенства (14) имеем

$$P^{(j)}(s, y, \nu) \geq \sin^2 \vartheta - \int_0^s [c_3^2 + P^{(j)}(s', y, \nu)] ds', \quad j = 1, 2. \quad (53)$$

Из неравенства (53) следует, что

$$P^{(j)}(s, y, \nu) \geq (\sin^2 \vartheta + c_3^2) e^{-s} - c_3^2, \quad j = 1, 2.$$

Для геодезических $\Gamma_j(x, \nu)$, лежащих в области $\Pi_j(\nu)$, параметр s , определяющий время пробега по этим геодезическим от точки $\xi \in \Pi_j(\nu)$ до плоскости $\Sigma_j(\nu)$, не превосходит $s_j^*(\nu) = T_j(\nu) - t_j^0(\nu)$. Поэтому при выполнении условия (15) имеют место неравенства $P^{(j)} > 0$, $j = 1, 2$, эквивалентные (13). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г. О структуре фундаментального решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1577–1587.
2. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. Романов В. Г. Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 916–924.
4. Романов В. Г. Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости в стационарной системе уравнений Максвелла // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 4. С. 413–417.
5. Chadan K., Sabatier P. C. Inverse problems in quantum scattering theory. New York: Springer, 1977.
6. Klibanov M. V., Romanov V. G. The first solution of a long standing problem: Reconstruction formula for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the Schrödinger equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 4. P. 415–428.
7. Klibanov M. V., Romanov V. G. Explicit solution of 3-D phaseless inverse scattering problems for the Schrödinger equation: the plane wave case // Euras. J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 1. P. 48–63.
8. Novikov R. G. Explicit formulas and global uniqueness for phaseless inverse scattering in multidimensions // J. Geom. Anal. 2015. DOI: 10.1007/5.12220-014-9553-7.
9. Novikov R. G. Formulas for phase recovering from phaseless scattering data at fixed frequency // Bull. Sci. Math. 2015. DOI: 10.1016/j.bulsci.2015.04.005.

10. Klibanov M. V., Romanov V. G. Explicit formula for the solution of the phaseless inverse scattering problem of imaging of nanostructures // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 2. P. 187–193.
11. Romanov V. G. Some geometric aspects in inverse problems // Euras. J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 4. P. 68–84.
12. Klibanov M. V., Romanov V. G. Reconstruction procedures for two inverse scattering problem without the phase information // SIAM J. Appl. Math. 2016. V. 76, N 1. P. 178–196.
13. Klibanov M. V., Romanov V. G. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation // Inverse Probl. 2016. V. 32, N 2. P. 015005 (16pp). DOI: 10.1088/0266-5611/32/1/015005.
14. Klibanov M. V., Romanov V. G. Uniqueness of a 3-D coefficient inverse scattering problem without the phase information // Inverse Probl. 2017. V. 33, N 9. 095007 (10 pp). DOI: 10.1088/1361-6420/aa7a18.
15. Romanov V. G., Yamamoto M. Phaseless inverse problems with interference waves // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26, N 5. P. 681–688.
16. Romanov V. G., Yamamoto M. Recovering two coefficients in an elliptic equation via phaseless information // Inverse Probl. Imag. 2019. V. 13, N 1. P. 81–91.
17. Романов В. Г. Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 626–638.
18. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию 15 февраля 2019 г.

После доработки 15 февраля 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`romanov@math.nsc.ru`