L. I. Rubina, O. N. Ulyanov, On double wave type flows, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 859–873

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.412>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.162.85.209
April 26, 2023, 11:44:25

УДК 517.977

О ТЕЧЕНИЯХ ТИПА ДВОЙНОЙ ВОЛНЫ

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Аннотация. Рассматриваются уравнение потенциальных двойных волн и система уравнений пространственных двойных волн. В классе решений типа кратных волн проведена редукция этих уравнений к ОДУ и системе ОДУ соответственно. Найдены некоторые точные решения. Получены формулы для линий примыкания соответствующих двойных волн к простой волне. Показано, что в окрестности любой точки в плоскости автомодельных переменных существует течение типа потенциальной двойной волны специального вида. Построено течение типа пространственной двойной волны в окрестности заданного гладкого тела.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.412

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, потенциальные двойные волны, пространственные двойные волны, метод характеристик, точные решения.

Введение

Рассматривается уравнение для потенциальных двойных волн в плоскости годографа [1]:

$$\frac{\gamma-1}{2}\Theta[(1-\Theta_1^2)\Theta_{22}+2\Theta_1\Theta_2\Theta_{12}+(1-\Theta_2^2)\Theta_{11}]+\frac{\gamma-3}{2}(\Theta_1^2+\Theta_2^2)+2=0, \quad (0.1)$$

$$\Theta = \frac{2}{\gamma-1}c, \quad c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S, \quad p = a^2(S)\rho^\gamma,$$

$$\Theta_i = \frac{\partial\Theta}{\partial u_i}, \quad \Theta_{ik} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial u_i\partial u_k}, \quad i, k = 1, 2.$$

Здесь c — скорость звука, S — энтропия, p — давление, ρ — плотность, u_1 , u_2 — компоненты вектора скорости, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты в уравнении состояния.

Отметим, что переход от плоскости годографа скоростей в плоскость автомодельных переменных $\xi_i = x_i/t$ осуществляется по формулам

$$\xi_i = u_i + \frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta_i, \quad i = 1, 2, \quad (0.2)$$

где x_1 , x_2 — декартовы координаты, t — время.

В работе [2] выписанное выше уравнение использовалось для решения задачи о движении двух поршней. Было отмечено, что в виду нелинейности уравнения (0.1) получить его аналитическое решение не удастся. В общей постановке задача решалась численно, аналитическое решение в этой работе приводилось только для частного случая.

В первой части работы получены точные решения полного уравнения потенциальных двойных волн с применением используемых авторами подходов [3–6].

Выписано точное решение, для которого при специальном выборе направления вектора скорости газа с компонентами u_1, u_2 можно получить бесконечно большую скорость звука и, следовательно, сколь угодно сильное безударное сжатие политропного газа. Задачи с такой проблематикой рассматривались в целом ряде работ (см., например, [7, 8]).

Для некоторых решений уравнения (0.1) выписаны точные формулы линий примыкания их к решениям типа простых волн. Во второй части работы рассматриваются уравнения пространственных двойных волн в плоскости годографа скоростей u_1, u_2 в виде [9]

$$\begin{aligned} R_{11}\Psi_{22} - 2R_{12}\Psi_{12} + R_{22}\Psi_{11} &= 0, & R_{11}X_{22} - 2R_{12}X_{12} + R_{22}X_{11} &= 0, \\ R_{11}(\Gamma_{22} + 1 + \Psi_2^2) - 2R_{12}(\Gamma_{12} + \Psi_1\Psi_2) + R_{22}(\Gamma_{11} + 1 + \Psi_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Здесь

$$\Psi(u_1, u_2) = u_3, \quad \Gamma(u_1, u_2) = \kappa c^2,$$

$X(u_1, u_2)$ — функция размещения (см. [9]),

$$R_{ik} = -\Gamma_i\Gamma_k + \Gamma/\kappa(\delta_{ik} + \Psi_i\Psi_k), \quad i, k = 1, 2,$$

нижние индексы у функций Ψ, Γ, X обозначают дифференцирование по переменным u_1, u_2 ; $\kappa = 1/(\gamma - 1)$, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты, c — скорость звука, δ_{ik} — символ Кронекера.

В пространстве (x_1, x_2, x_3) в каждый момент времени t течение описывается соотношениями

$$(\Gamma_i + u_i + \Psi\Psi_i)t + X_i = x_i + \Psi_i x_3, \quad i = 1, 2. \quad (0.4)$$

Для уравнений (0.3) методом, который развит для систем уравнений (см. [10]), также получен ряд точных решений. Показано, что при $t > 0$ можно построить около произвольно заданного неподвижного гладкого тела течение типа пространственной двойной волны.

1. Сведение уравнения потенциальных двойных волн к ОДУ

Уравнение (0.1) сведем к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Для получения ОДУ используем два подхода. В одном случае предполагается, что $\psi = \psi(u_1, u_2)$ — неизвестная поверхность уровня решения, в другом считаем, что ψ совпадает с Θ .

1.1. Первый подход. Предполагаем, что $\Theta = \Theta(\psi)$, тогда $\Theta_i = \Theta'\psi_i$. Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по переменной ψ , $\psi_i = \partial\psi/\partial u_i$. Очевидно, что

$$\Theta_{ik} = \Theta''\psi_i\psi_k + \Theta'\psi_{ik}, \quad i, k = 1, 2.$$

Тогда уравнение (0.1) можно записать в виде

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'' + \frac{\gamma-3}{2}\Theta'^2\right)f(\psi) + \frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'f_1(\psi) - \frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'^3f_2(\psi) + 2 = 0, \quad (1.1)$$

здесь

$$f = \psi_1^2 + \psi_2^2, \quad f_1 = \psi_{11} + \psi_{22}, \quad f_2 = \psi_1^2 \psi_{22} - 2\psi_1 \psi_2 \psi_{12} + \psi_2^2 \psi_{11}. \quad (1.2)$$

Для доказательства совместности системы (1.2) выпишем дифференциальные следствия первого уравнения этой системы и добавим к ним второе уравнение системы:

$$2\psi_1 \psi_{11} + 2\psi_2 \psi_{12} = f' \psi_1, \quad 2\psi_1 \psi_{12} + 2\psi_2 \psi_{22} = f' \psi_2, \quad \psi_{11} + \psi_{22} = f_1.$$

Рассматривая эту систему уравнений как алгебраическую относительно вторых производных, находим

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \frac{\psi_1^2 f' + \psi_2^2 (2f_1 - f')}{2f}, \quad \psi_{12} = \frac{\psi_1 \psi_2 (f' - f_1)}{f}, \\ \psi_{22} &= \frac{\psi_2^2 f' + \psi_1^2 (2f_1 - f')}{2f}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Утверждение 1. Если

$$\left(\frac{f_1}{f}\right)' + \left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - \left(\frac{f_1}{f}\right)\left(\frac{f'}{2f}\right) - \left(\frac{f'}{2f}\right)' = 0$$

и $f_2 = 0.5f(2f_1 - f')$, то система (1.2) совместна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения условий совместности двух первых уравнений системы (1.2) выпишем расширенную систему уравнений характеристик для первого уравнения системы (1.2), выбрав переменную ψ в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристик [3]:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\psi} &= \frac{\psi_1}{f}, \quad \frac{du_2}{d\psi} = \frac{\psi_2}{f}, \quad \frac{d\psi_1}{d\psi} = \frac{f'}{2f} \psi_1, \quad \frac{d\psi_2}{d\psi} = \frac{f'}{2f} \psi_2, \\ \frac{d\psi_{11}}{d\psi} &= -\psi_{11} \left(\frac{\psi_{11}}{f} - \frac{\psi_1^2 f'}{f^2} \right) - \psi_{12} \left(\frac{\psi_{12}}{f} - \frac{\psi_2 \psi_1 f'}{f^2} \right) + \left(\frac{f'}{2f} \right)' \psi_1^2 + \left(\frac{f'}{2f} \right) \psi_{11}, \\ \frac{d\psi_{22}}{d\psi} &= -\psi_{12} \left(\frac{\psi_{12}}{f} - \frac{\psi_1 \psi_2 f'}{f^2} \right) - \psi_{22} \left(\frac{\psi_{22}}{f} - \frac{\psi_2^2 f'}{f^2} \right) + \left(\frac{f'}{2f} \right)' \psi_2^2 + \left(\frac{f'}{2f} \right) \psi_{22}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Потребуем, чтобы второе уравнение системы было первым интегралом выписанной системы, т. е. чтобы тождественно выполнялось соотношение

$$\frac{d\psi_{11}}{d\psi} + \frac{d\psi_{22}}{d\psi} = f'_1.$$

Подставив соответствующие значения из (1.3), (1.4) в это выражение, придем к зависимости

$$\left(\frac{f_1}{f}\right)' + \left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - \left(\frac{f_1}{f}\right)\left(\frac{f'}{2f}\right) - \left(\frac{f'}{2f}\right)' = 0.$$

Подставив (1.3) в третье соотношение системы (1.2), приходим к зависимости

$$f_2 = 0.5f(2f_1 - f'),$$

которая должна выполняться для совместности системы (1.2), что и требовалось доказать.

Исследование на совместность первых двух уравнений системы (1.2) проведено также в [11, 12].

Следствие 1. Если $f = \text{const}$, $f_1 = f/\psi$, $f_2 = f^2/\psi$, то система (1.2) совместна. Тогда уравнение (1.1) имеет вид

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'' + \frac{\gamma-3}{2}\Theta'^2\right)f + \frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'\left(\frac{f}{\psi}\right) - \frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'^3\left(\frac{f^2}{\psi}\right) + 2 = 0. \quad (1.5)$$

Следствие 2. Если $f_1 = 0.5f'$ и $f_2 = 0$, то система (1.2) совместна. Тогда уравнение (1.1) имеет вид

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'' + \frac{\gamma-3}{2}\Theta'^2\right)f + \frac{\gamma-1}{4}\Theta\Theta'f' + 2 = 0. \quad (1.6)$$

Следствие 3. Если $f_2 = \text{const}$,

$$f = \sqrt{\frac{4f_2\psi}{3} + C}, \quad f_1 = \frac{4f_2}{3\sqrt{\frac{4f_2\psi}{3} + C}}, \quad C = \text{const},$$

то система (1.2) совместна. Тогда уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'' + \frac{\gamma-3}{2}\Theta'^2\right)\left(\frac{4f_2\psi}{3} + C\right) + (\gamma-1)\Theta\Theta'\left(\frac{2f_2}{3}\right) \\ - \left(\frac{\gamma-1}{2}\Theta\Theta'^3f_2 - 2\right)\sqrt{\frac{4f_2\psi}{3} + C} = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Решив ОДУ (1.5)–(1.7), получим $\Theta = \Theta(\psi)$. Покажем, как определить функцию $\psi = \psi(u_1, u_2)$.

Из системы уравнений характеристик (1.4) имеем преобразование координат, которое при заданных C_j , $j = 1, 2, 3$, удовлетворяющих выписанным ниже необходимым условиям, позволит определить $\psi = \psi(u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned} u_1 = C_1w + C_2, \quad u_2 = \pm w\sqrt{1 - C_1^2} + C_3, \quad w = \int \frac{d\psi}{\sqrt{f}}, \\ \psi_1 = C_1\sqrt{f}, \quad \psi_2 = \pm\sqrt{f(1 - C_1^2)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $C_j = C_j(\alpha)$, $j = 1, 2, 3$. В новых переменных $\psi = \psi(u_1(\psi, \alpha), u_2(\psi, \alpha))$, отсюда

$$1 = \psi_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi}, \quad 0 = \psi_1 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \psi_2 \frac{\partial u_2}{\partial \alpha}.$$

После подстановки соответствующих значений получаем условие для выбора $C_j(\alpha)$:

$$C_1 \frac{dC_2}{d\alpha} \pm \sqrt{1 - C_1^2} \frac{dC_3}{d\alpha} = 0.$$

В частности, если $C_2 = C_3 = 0$ и $f = 1$, имеем

$$w = \psi = \pm\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

1.2. Второй подход. Остановимся на частном случае метода, когда $\psi = \Theta$ [6]. Поставим в соответствие уравнению (0.1) систему уравнений

$$\begin{aligned} (1 - \Theta_1^2)\Theta_{22} + 2\Theta_1\Theta_2\Theta_{12} + (1 - \Theta_2^2)\Theta_{11} = g(\Theta), \\ \frac{\gamma-1}{2}\Theta g(\Theta) + \frac{\gamma-3}{2}(\Theta_1^2 + \Theta_2^2) + 2 = 0, \quad \text{где } \gamma \neq 3, \quad \Theta_1^2 + \Theta_2^2 \neq \text{const}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $g(\Theta)$ — пока произвольная функция, которую нужно выбрать так, чтобы система (1.9) была совместной. Очевидно, что решение совместной системы (1.9) удовлетворяет уравнению (0.1).

Выпишем дифференциальные следствия второго уравнения системы (1.9) и добавим к полученным уравнениям первое уравнение системы (1.9). Получим линейную алгебраическую систему для определения вторых производных функции $\Theta(u_1, u_2)$:

$$\begin{aligned}(\gamma - 3)(\Theta_1\Theta_{11} + \Theta_2\Theta_{21}) &= -0.5(\gamma - 1)\Theta_1(g + g'\Theta), \\(\gamma - 3)(\Theta_1\Theta_{12} + \Theta_2\Theta_{22}) &= -0.5(\gamma - 1)\Theta_2(g + g'\Theta), \\(1 - \Theta_1^2)\Theta_{22} + 2\Theta_1\Theta_2\Theta_{12} + (1 - \Theta_2^2)\Theta_{11} &= g(\Theta).\end{aligned}\quad (1.10)$$

Здесь и далее в рамках этого подхода штрих обозначает дифференцирование по Θ . Из (1.10) имеем

$$\begin{aligned}\Theta_{11} &= \frac{(\gamma - 1)(\Theta_1^4 - \Theta_1^2 + \Theta_1^2\Theta_2^2 + \Theta_2^2)(g + \Theta g') + 2(\gamma - 3)g\Theta_2^2}{2(\gamma - 3)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)(1 - \Theta_1^2 - \Theta_2^2)}, \\ \Theta_{22} &= \frac{(\gamma - 1)(\Theta_2^4 - \Theta_2^2 + \Theta_1^2\Theta_2^2 + \Theta_1^2)(g + \Theta g') + 2(\gamma - 3)g\Theta_1^2}{2(\gamma - 3)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)(1 - \Theta_1^2 - \Theta_2^2)}, \\ \Theta_{12} &= -\frac{\Theta_1\Theta_2[(\gamma - 1)(2 - \Theta_1^2 - \Theta_2^2)(g + \Theta g') + 2(\gamma - 3)g]}{2(\gamma - 3)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)(1 - \Theta_1^2 - \Theta_2^2)}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Выпишем расширенную систему уравнений характеристик для второго уравнения системы (1.9), выбрав Θ в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристик [3, 5]:

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{d\Theta} &= \frac{(3 - \gamma)\Theta_i}{(\gamma - 1)g\Theta + 4}, \quad \frac{d\Theta_i}{d\Theta} = \frac{0.5(\gamma - 1)\Theta_i(g + \Theta g')}{(\gamma - 1)g\Theta + 4}, \\ \frac{d\Theta_{1i}}{d\Theta} &= -\Theta_{11}\left(\frac{du_1}{d\Theta}\right)_i - \Theta_{12}\left(\frac{du_2}{d\Theta}\right)_i + \left(\frac{0.5(\gamma - 1)\Theta_1(g + \Theta g')}{(\gamma - 1)g\Theta + 4}\right)_i, \quad i = 1, 2, \\ \frac{d\Theta_{22}}{d\Theta} &= -\Theta_{21}\left(\frac{du_1}{d\Theta}\right)_2 - \Theta_{22}\left(\frac{du_2}{d\Theta}\right)_2 + \left(\frac{0.5(\gamma - 1)\Theta_2(g + \Theta g')}{(\gamma - 1)g\Theta + 4}\right)_2.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Потребуем, чтобы первое уравнение системы (1.9) было первым интегралом системы (1.12):

$$\begin{aligned}(1 - \Theta_2^2)\frac{d\Theta_{11}}{d\Theta} + (1 - \Theta_1^2)\frac{d\Theta_{22}}{d\Theta} + 2\Theta_1\Theta_2\frac{d\Theta_{12}}{d\Theta} - 2\Theta_2\Theta_{11}\frac{d\Theta_2}{d\Theta} - 2\Theta_1\Theta_{22}\frac{d\Theta_1}{d\Theta} \\ + 2\Theta_{12}\left(\Theta_2\frac{d\Theta_1}{d\Theta} + \Theta_1\frac{d\Theta_2}{d\Theta}\right) = g'.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Подставив соответствующие выражения из системы (1.12) и соотношений (1.11) в (1.13), получим зависимость $S(\Theta, \Theta_1, \Theta_2) = 0$. Рассматривая $S(\Theta, \Theta_1, \Theta_2) = 0$ вместе со вторым уравнением системы (1.9), получаем, что система двух уравнений первого порядка совместна при

$$\Theta = \Theta(z), \quad \text{где } z = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3, \quad a_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, 3.\quad (1.14)$$

Тогда уравнение (0.1) сведется к ОДУ

$$(\gamma - 1)\Theta\Theta'' + (\gamma - 3)\Theta'^2 + 4/(a_1^2 + a_2^2) = 0.\quad (1.15)$$

Легко видеть, что при подстановке (1.14) в исходное уравнение (0.1) получаем уравнение (1.15) и в случае $\gamma = 3$, естественно без слагаемого, содержащего сомножителем $(\gamma - 3)$.

2. Получение точных решений уравнения потенциальных двойных волн

Рассмотрим уравнение

$$(\gamma - 1)\Theta\Theta'' + (\gamma - 3)\Theta'^2 + 4/(a_1^2 + a_2^2) = 0.$$

В этом уравнении сделаем замену $\Theta' = p(\Theta)$. Получим уравнение

$$0.5(\gamma - 1)\Theta q' + (\gamma - 3)q = -4/(a_1^2 + a_2^2),$$

где $q = p^2$. Отсюда, решая линейное уравнение, имеем

$$q = p^2 = \Theta'^2 = \eta\Theta^{2(3-\gamma)/(\gamma-1)} - \frac{4}{(3-\gamma)(a_1^2 + a_2^2)}, \quad \text{где } \eta = \text{const}, \quad \gamma \neq 3.$$

Если $\gamma = 3$ (продукты детонации), то $q = -\frac{4}{a_1^2 + a_2^2} \ln \Theta$, отсюда

$$z = -\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \int \exp(-r^2) dr, \quad r^2 = \ln(1/\Theta).$$

Если $\eta \neq 0$ и $\gamma \neq 3$, то

$$z = \int \left(\eta\Theta^{2(3-\gamma)/(\gamma-1)} - \frac{4}{(3-\gamma)(a_1^2 + a_2^2)} \right)^{-1/2} d\Theta.$$

Выпишем решение уравнения (0.1) для $\gamma = 2$ (мелкая вода):

$$\Theta = \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \exp(z\sqrt{\eta}) + \frac{2}{(a_1^2 + a_2^2)\sqrt{\eta}} \exp(-z\sqrt{\eta}), \quad z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3.$$

Если $\eta = 0$ и $\gamma \neq 3$, то

$$\Theta = 2(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3) / \sqrt{(3-\gamma)(a_1^2 + a_2^2)}. \quad (2.1)$$

В плоскости автомодельных переменных из (2.1) имеем

$$u_1 = \xi_1 - \frac{2(\gamma-1)a_1}{(\gamma+1)(a_1^2 + a_2^2)} \xi, \quad u_2 = \xi_2 - \frac{2(\gamma-1)a_2}{(\gamma+1)(a_1^2 + a_2^2)} \xi,$$

$$\Theta = \frac{2}{\gamma+1} \xi \sqrt{\frac{3-\gamma}{(a_1^2 + a_2^2)}}, \quad \xi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3. \quad (2.2)$$

Рассмотрим уравнение (1.5). Полагая $\Theta = a\psi^\beta$ и подставив это выражение в уравнение (1.5), получаем, что $\beta = 1$, $a^2 = -2/[f(\gamma-1)]$, если $f < 0$. Если $f > 0$, то $a^2 = 2$. Но в области действительных переменных $f = \psi_1^2 + \psi_2^2 > 0$, поэтому остановимся на решении уравнения (1.5):

$$\Theta = \pm\sqrt{2}\psi.$$

В частности, как показано выше, если $f = 1$, то $\psi = \pm\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, тогда $\Theta = \pm\sqrt{2(u_1^2 + u_2^2)}$. В автомодельных переменных получаем

$$u_1 = \xi_1/\gamma, \quad u_2 = \xi_2/\gamma, \quad \Theta = \sqrt{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)/\gamma^2}.$$

Рассмотрим уравнение (1.6). Здесь можно считать, что $\Theta = \Theta(\psi)$ — произвольная функция, задав которую, получим линейное уравнение для определения функции $f(\psi)$:

$$f' + \left(2 \frac{\Theta''}{\Theta'} + \frac{2(\gamma-3)}{\gamma-1} \frac{\Theta'}{\Theta} \right) f = - \frac{8}{(\gamma-1)\Theta\Theta'}.$$

Отсюда

$$f = (\Theta')^{-2} \Theta^{2(3-\gamma)/(\gamma-1)} \left(\eta - \frac{4}{\gamma-3} \Theta^{2(\gamma-3)/(\gamma-1)} \right).$$

Можно задавать такие $\Theta = \Theta(\psi)$, при которых $f(\psi) > 0$. Например, пусть $\Theta = b \exp(a\psi)$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, тогда $f(\psi)$ определится из линейного уравнения

$$f' + \frac{4(\gamma-2)}{\gamma-1} a f = - \frac{8}{(\gamma-1)ab^2} e^{-(2a\psi)}.$$

Отсюда

$$f = e^{4(2-\gamma)a\psi/(\gamma-1)} \left(\eta - \frac{4}{(\gamma-3)a^2b^2} e^{2a(\gamma-3)\psi/(\gamma-1)} \right),$$

где $\eta = \text{const}$. Если $\eta = 0$, то $f(\psi) = -4e^{-2a\psi}/[(\gamma-3)a^2b^2] > 0$ при $\gamma < 3$, как и должно быть. Для такого $f(\psi)$ решение уравнения характеристик дает (см. (1.8))

$$u_1 = \frac{\sqrt{3-\gamma}}{2} C_1 b e^{a\psi} + C_2, \quad u_2 = \pm \frac{\sqrt{(3-\gamma)(1-C_1^2)}}{2} b e^{a\psi} + C_3.$$

При $C_2(\alpha) = C_3(\alpha) \neq 0$ имеем $C_1 = \mp \sqrt{1-C_1^2}$, $C_1 = \pm 1/\sqrt{2}$,

$$\psi = (1/a) \ln [(u_2 - u_1) \sqrt{2/(3-\gamma)}], \quad \Theta = (u_2 - u_1) \sqrt{2/(3-\gamma)}.$$

В автомодельных переменных

$$u_1 = \frac{3-\gamma}{4+(\gamma-1)^2} [2\xi_1 - (\gamma-1)\xi_2], \quad u_2 = \frac{3-\gamma}{4+(\gamma-1)^2} [2\xi_2 + (\gamma-1)\xi_1],$$

$$\Theta = \frac{\sqrt{2(3-\gamma)}}{4+(\gamma-1)^2} [(\gamma+1)\xi_2 + (\gamma-3)\xi_1].$$

Заметим, что можно задавать произвольно $f(\psi) > 0$ и, подставив его в (1.6), находить из ОДУ $\Theta(\psi)$.

Рассмотрим уравнение (1.7). Ищем решение в виде $\Theta = A(4f_2\psi/3 + C)^\alpha$. После подстановки этого выражения в (1.7) получаем, что если $\alpha = 3/4$ и A определяется из уравнения

$$A^4 - \frac{2(\gamma-2)}{(\gamma-1)f_2^2} A^2 - \frac{4}{(\gamma-1)f_2^4} = 0, \quad A = \frac{\sqrt{2}}{f_2}, \quad f_2 > 0,$$

то (1.7) обращается в тождество. В этом случае имеем преобразование координат

$$u_1 = \frac{C_1}{f_2} \left(\frac{4f_2\psi}{3} + C \right)^{3/4} + C_2, \quad u_2 = \pm \frac{\sqrt{1-C_1^2}}{f_2} \left(\frac{4f_2\psi}{3} + C \right)^{3/4} + C_3.$$

Полагая, например, $C_2 = n$, $C_3 = m$, $n = \text{const}$, $m = \text{const}$, получаем

$$\Theta = f_2 A \sqrt{(u_1 - n)^2 + (u_2 - m)^2}.$$

**3. О возможности построения течения
типа потенциальной двойной волны
в окрестности каждой точки заданной области**

Утверждение 2. В окрестности любой точки в плоскости автомодельных переменных существует течение типа потенциальной двойной волны вида

$$\Theta = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} [M^2 - (n - u_1)^2 - (m - u_2)^2]},$$

где $M = \text{const}$, $n = \text{const}$, $m = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области автомодельных переменных зададим два однопараметрических семейства линий $\xi_2 = ar(\xi_1)$, $\xi_2 = bv(\xi_1)$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ — параметры. Выпишем соотношения, которые следуют из зависимостей (0.2), связывающих плоскость автомодельных переменных и плоскость годографа:

$$\xi_i = u_i + 0.25(\gamma - 1)p_i, \quad p = \Theta^2, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда для заданных семейств линий получаем

$$u_2 + 0.25(\gamma - 1)p_2 = ar(\beta), \quad u_2 + 0.25(\gamma - 1)p_2 = bv(\beta), \quad \beta = u_1 + 0.25(\gamma - 1)p_1.$$

В каждой точке пересечения этих семейств $ar(\beta) = bv(\beta)$. Тогда

$$\beta = u_1 + 0.25(\gamma - 1)p_1 = n(a, b), \quad u_2 + 0.25(\gamma - 1)p_2 = m(a, b).$$

Имеем два уравнения в частных производных первого порядка для функции $p(u_1, u_2)$:

$$p_1 = 4(n - u_1)/(\gamma - 1), \quad p_2 = 4(m - u_2)/(\gamma - 1).$$

Решая систему

$$p_1 = 4(n - u_1)/(\gamma - 1), \quad p_2 = 4(m - u_2)/(\gamma - 1),$$

находим

$$\Theta = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} [M^2 - (n - u_1)^2 - (m - u_2)^2]}. \quad (3.1)$$

Легко проверить, что полученная функция $\Theta(u_1, u_2)$ — решение уравнения (0.1) при любых M , $n(a, b)$, $m(a, b)$, что и требовалось доказать.

Из формулы перехода из плоскости годографа в плоскость автомодельных переменных для данного решения следует, что u_1 и u_2 могут быть произвольными. Полученная формула показывает, что в плоскости годографа u_1 и u_2 могут принимать любые значения в круге радиуса M с центром в точке $\{n(a, b), m(a, b)\}$. Зададим, например, $n = \xi_1$, $m = \xi_2$ и положим $u_1 = \xi_1$, $u_2 = \xi_2$, тогда $\Theta = M\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$, следовательно, $\lim_{M \rightarrow \infty} \Theta = \infty$. Если считать, что скорость звука в неподвижном газе равна единице, то

$$M^2 = 2/(\gamma - 1) + n^2 + m^2$$

и в плоскости автомодельных переменных имеем

$$\Theta = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma-1} + \xi_1^2 + \xi_2^2 \right)}, \quad u_1 = \xi_1, \quad u_2 = \xi_2.$$

4. О примыкании потенциальной двойной волны к простой волне

В [2] изучаются некоторые аспекты примыкания простых и двойных волн. Полученные выше точные решения уравнения двойных волн позволяют выписать точные формулы линий примыкания для каждого известного решения.

Рассмотрим примыкание простой волны

$$u_1'^2 + u_2'^2 = 1, \quad \xi_1 u_1' + \xi_2 u_2' - \frac{\gamma - 1}{2} \Theta - u_1 u_1' - u_2 u_2' = 0 \quad (4.1)$$

к двойной волне

$$\Theta = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3, \quad b_i = 2a_i / \sqrt{(3 - \gamma)(a_1^2 + a_2^2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Считаем, что на линии примыкания скорость звука непрерывна. Тогда на линии примыкания волн имеем

$$b_1 u_1' + b_2 u_2' = 1, \quad u_1'^2 + u_2'^2 = 1.$$

Отсюда

$$u_1 = k_1 \Theta + k_2, \quad u_2 = m_1 \Theta + m_2,$$

где

$$k_1 = \frac{b_1 \pm b_2 \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 1}}{b_1^2 + b_2^2}, \quad m_1 = \frac{b_2 \mp b_1 \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 1}}{b_1^2 + b_2^2}, \quad k_2 = \text{const}, \quad m_2 = \text{const}.$$

Подставив u_1, u_2 в выражение $\Theta = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3$, найдем, что $m_2 = -(b_3 + b_1 k_2)/b_2$. Далее, подставив во вторую формулу (4.1) полученную простую волну

$$u_1 = k_1 \Theta + k_2, \quad u_2 = m_1 \Theta - (b_3 + b_1 k_2)/b_2$$

и записанное в автомодельных переменных (см. (2.2)) $\Theta = 2(3 - \gamma)\xi/(\gamma + 1)$, где $\xi = b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3$, получим линию примыкания простой и двойной волны:

$$\sqrt{\gamma + 1}(a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2) - \sqrt{3 - \gamma}(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3) - \frac{\sqrt{\gamma + 1}}{a_2} [a_3 - k_2(a_1^2 + a_2^2)] = 0.$$

Рассмотрим примыкание простой волны (4.1) к двойной волне $\Theta = \sqrt{2(u_1^2 + u_2^2)}$.

Продифференцировав это выражение по Θ , получаем, что $\sqrt{2}(u_1 u_1' + u_2 u_2') - \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 0$. Тогда на линии примыкания, где $u_1^2 + u_2^2 = 1$, имеем

$$u_1' = \frac{u_1 \pm u_2}{\sqrt{2(u_1^2 + u_2^2)}}, \quad u_2' = \frac{u_2 \mp u_1}{\sqrt{2(u_1^2 + u_2^2)}}.$$

Решив систему, получаем вид простой волны, примыкающей к рассматриваемой двойной волне:

$$u_1 = \Theta(C_1 \cos \ln \Theta + C_2 \sin \ln \Theta), \quad u_2 = \pm \Theta(C_2 \cos \ln \Theta - C_1 \sin \ln \Theta),$$

где $C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$, $C_1^2 + C_2^2 = 0.5$. Далее подставим полученные $u_1(\Theta)$, $u_2(\Theta)$ и вычисленные по ним u_1' и u_2' во второе соотношение (4.1). В результате вид линии примыкания рассматриваемой двойной волны к простой волне следующий:

$$(C_1 + C_2)(\xi_1 \cos \ln \Theta - \xi_2 \sin \ln \Theta) + (C_2 - C_1)(\xi_2 \cos \ln \Theta + \xi_1 \sin \ln \Theta) - 0.5\gamma\Theta = 0,$$

где $\Theta = \sqrt{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}/\gamma^2$.

**5. Получение точных решений системы
уравнений пространственных двойных волн**

Пусть в (0.3) $\Psi = \Psi(\varphi)$, $\Gamma = \Gamma(\varphi)$, $X = X(\varphi)$, $\varphi = \varphi(u_1, u_2)$. Тогда

$$\Psi_i = \Psi' \varphi_i, \quad \Gamma_i = \Gamma' \varphi_i, \quad X_i = X' \varphi_i, \quad i, k = 1, 2,$$

$$\Psi_{ik} = \Psi'' \varphi_i \varphi_k + \Psi' \varphi_{ik}, \quad \Gamma_{ik} = \Gamma'' \varphi_i \varphi_k + \Gamma' \varphi_{ik}, \quad X_{ik} = X'' \varphi_i \varphi_k + X' \varphi_{ik}.$$

Штрих здесь и далее обозначает дифференцирование по φ . Очевидно, что $\varphi = \varphi(u_1, u_2)$ — поверхность уровня выписанных выше функций. Подставив соответствующие выражения в уравнения системы (0.3), получим

$$\begin{aligned} & -2\Gamma\Psi'' - 2\Gamma\Psi'f_1 - \Gamma\Psi'^2\Psi''f_2 + \Gamma\Psi'^4\Psi''f_3 + \Gamma\Psi'^3f_4 + \Gamma\Psi'^5f_5 + \kappa\Gamma'^2\Psi'^3f_6 \\ & \quad + \kappa\Gamma'^2\Psi'^5f_7 + \kappa\Gamma'^2\Psi'^7f_8 = 0, \\ & -2\Gamma X'' - 2\Gamma X'f_1 - \Gamma\Psi'^2X''f_2 + \Gamma\Psi'^4X''f_3 + \Gamma\Psi'^2X'f_4 + \Gamma\Psi'^4X'f_5 \\ & \quad + \kappa\Gamma'^2\Psi'^2X'f_6 + \kappa\Gamma'^2\Psi'^4X'f_7 + \kappa\Gamma'^2\Psi'^6X'f_8 = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} & -2\Gamma(\Gamma'' + \Psi'^2) - 2\Gamma\Gamma'f_1 - \Gamma\Psi'^2(\Gamma'' + \Psi'^2)f_2 + \Gamma\Psi'^4(\Gamma'' + \Psi'^2)f_3 + \Gamma\Psi'^2\Gamma'f_4 \\ & \quad + \Gamma\Psi'^4\Gamma'f_5 + \kappa\Gamma'^2\Psi'^2\Gamma'f_6 + \kappa\Gamma'^2\Psi'^4\Gamma'f_7 + \kappa\Gamma'^2\Psi'^6\Gamma'f_8 - 2\Gamma + 2\Gamma\Psi'^2(f_0 - f_2) \\ & + (\Gamma\Psi'^4 - \kappa\Gamma'^2\Psi'^2)f_0(f_2 - 2f_0) - \kappa\Gamma'^2\Psi'^4f_0f_2(f_2 - 2f_0) - \kappa\Gamma'^2\Psi'^6f_0^3(f_2 - 2f_0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_0 &= \varphi_1\varphi_2, \quad f_1(\varphi) = \varphi_{12}/(\varphi_1\varphi_2), \quad f_2(\varphi) = \varphi_1^2 + \varphi_2^2, \quad f_3(\varphi) = \varphi_1^4 - \varphi_2^4, \\ f_4(\varphi) &= \varphi_{22} + \varphi_{11} - 2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_{12}/(\varphi_1\varphi_2), \\ f_5(\varphi) &= \varphi_2^2\varphi_{22} + \varphi_1^2\varphi_{11} - 2\varphi_1\varphi_2\varphi_{12}, \quad f_6(\varphi) = 2\varphi_1\varphi_2\varphi_{12} - \varphi_2^2\varphi_{11} - \varphi_1^2\varphi_{22}, \\ f_7(\varphi) &= f_6(\varphi)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad f_8(\varphi) = f_5(\varphi)\varphi_1^3\varphi_2^3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Утверждение 3. Если $\varphi_1 = g(\varphi)$ и $\varphi_2 = Cg(\varphi)$, где $C = \text{const}$, то система (5.2) совместна. Поверхность уровня системы (5.1) имеет вид $\varphi = z = au_1 + bu_2 + c$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений $f_2(\varphi) = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$, $f_3(\varphi) = \varphi_1^4 - \varphi_2^4$ (см. систему (5.2)) следует, что

$$\varphi_1 = \pm \sqrt{0.5(f_2^2 + f_3)/f_2} = g(\varphi), \quad \varphi_2 = \pm \sqrt{0.5(f_2^2 - f_3)/f_2} = g_1(\varphi).$$

Эти два выражения задают одну и ту же функцию, если смешанные производные равны ($\varphi_{12} = \varphi_{21}$). Требуя равенства смешанных производных, получаем, что $g_1 = Cg$, $C = \text{const}$ и все производные второго порядка и функции f_i , $i = 0, 1, \dots, 8$, в системе (5.2) выражаются через $g(\varphi)$. Решение системы $\varphi_1 = g(\varphi)$, $\varphi_2 = Cg$ имеет вид $\varphi = \varphi(z)$, где $z = au_1 + bu_2 + c$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$, следовательно, z — поверхность уровня функций системы (5.1) и $\Psi = \Psi(z)$, $\Gamma = \Gamma(z)$, $X = X(z)$. Можно считать, что $\varphi = z$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. В системе (5.1) $\Psi(z) = Az + B$, $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После подстановки функций $\Psi = \Psi(z)$, $\Gamma = \Gamma(z)$ в первое уравнение системы (5.1) получаем

$$\Psi_{zz}\Gamma abF = 0, \quad \text{где } F = [b^2\Psi_z^2(1+b^2\Psi_z^2) + a^2\Psi_z^2(1+a^2\Psi_z^2) - 2(1+b^2\Psi_z^2)(1+a^2\Psi_z^2)].$$

Отсюда следует, что $\Psi_z = \text{const}$, $u_3 = \Psi(z) = Az + B$, $A = \text{const}$, $B = \text{const}$ при $\Gamma \neq 0$. Здесь либо $F = 0$, тогда

$$A^2 = \frac{(a^2 + b^2) \pm \sqrt{9(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}}{(a^2 - b^2)^2}, \quad a \neq b,$$

либо A — произвольная постоянная ($F \neq 0$), что и требовалось доказать.

Утверждение 5. Если $F \neq 0$, то в системе (5.1) $X(z) = Mz + N$, $M = \text{const}$, $N = \text{const}$. Если $F = 0$, то $X(z)$ — произвольная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $X(z)$ входит только во второе уравнение системы (5.1). Подставив $\Psi = \Psi(z)$, $\Gamma = \Gamma(z)$, $X = X(z)$ во второе уравнение системы (5.1), имеем $X_{zz}\Gamma abF = 0$. Если $F \neq 0$, то $X_{zz} = 0$, $X = Mz + N$, $M = \text{const}$, $N = \text{const}$. Если $F = 0$, то X_{zz} может иметь любой вид, следовательно, $X(z)$ — произвольная функция, что и требовалось доказать.

Подставим функции $\Psi = Az + B$, $\Gamma = \Gamma(z)$ в третье уравнение системы (5.1), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{zz}\Gamma abF + A^2\Gamma abF + \Gamma[abA^2(1+b^2A^2) + abA^2(1+a^2A^2)] \\ - \kappa\Gamma_z^2A^2ab(1+A^2a^2)(1+A^2b^2)(a^2+b^2) = 0. \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$K_1\Gamma\Gamma_{zz} - K_2\Gamma_z^2 + K_3\Gamma = 0, \quad K_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 = abF, \quad K_2 = \kappa A^2 ab(1+A^2a^2)(1+A^2b^2)(a^2+b^2), \\ K_3 = A^2 ab(F + 2 + b^2A^2 + a^2A^2). \end{aligned}$$

Полагая в (5.3) $\Gamma_z = p(\Gamma)$, $p^2(\Gamma) = q(\Gamma)$, приходим к линейному уравнению для функции $q(\Gamma)$:

$$\frac{dq}{d\Gamma} - 2q\frac{K_2}{K_1\Gamma} = -\frac{2K_3}{K_1},$$

отсюда $\Gamma_z = \sqrt{\eta\Gamma^{2K_2/K_1} - \frac{2K_3\Gamma}{K_1 - 2K_2}}$, $\eta = \text{const}$, $K_1 \neq 2K_2$,

$$z = \int d\Gamma / \sqrt{\eta\Gamma^{2K_2/K_1} - \frac{2K_3\Gamma}{K_1 - 2K_2}}. \quad (5.4)$$

Следствие 4. Если $F = 0$, то уравнение для $\Gamma(z)$ имеет вид

$$\Gamma_z = H\sqrt{\Gamma}, \quad H = \sqrt{\frac{2 + b^2A^2 + a^2A^2}{\kappa(1 + A^2a^2)(1 + A^2b^2)(a^2 + b^2)}}.$$

В этом случае $\Gamma = (0.5Hz + H_1)^2$, $H_1 = \text{const}$.

Следствие 5. Если A удовлетворяет уравнению $K_3 = 0$, то

$$\Gamma = \left[\frac{K_1 - K_2}{K_1} (z\sqrt{\eta} + \eta_1) \right]^{K_1/(K_1 - K_2)}, \quad \eta_1 = \text{const}.$$

Следствие 6. Если A определяется из уравнения $(K_1 - K_2) = 0$, то

$$\Gamma = K_3 [\sin(z\sqrt{-\eta}) - 1]/(\eta K_1), \quad \eta < 0,$$

$$\Gamma = \frac{1}{4\eta} e^{(-z\sqrt{\eta})} \left(e^{(z\sqrt{\eta})} - \frac{2K_3}{K_1} \right)^2, \quad \eta > 0.$$

В результате имеем следующие решения системы (5.1) при заданных K_i , $i = 1, 2, 3$:

$K_1 = 0$	$\Psi = Az + B$	$X(z)$ любая	$\Gamma = (0.5Hz + H_1)^2$
$K_1 = K_2, \eta > 0$	$\Psi = A_2z + B_2$	$X = M_1z + N_1$	$\Gamma = \frac{1}{4\eta} e^{(-z\sqrt{\eta})} \left(e^{(z\sqrt{\eta})} - \frac{2K_3}{K_1} \right)^2$
$K_1 = K_2, \eta < 0$	$\Psi = A_2z + B_2$	$X = M_1z + N_1$	$\Gamma = K_3 [\sin(z\sqrt{-\eta}) - 1]/(\eta K_1)$
$K_3 = 0$	$\Psi = A_3z + B_3$	$X = M_2z + N_2$	$\Gamma = \left[\frac{K_1 - K_2}{K_1} (z\sqrt{\eta} + \eta_1) \right]^{\frac{K_1}{K_1 - K_2}}$

6. Течение идеального газа типа пространственной двойной волны около заданного гладкого неподвижного тела

Утверждение 6. Существует течение типа пространственной двойной волны около поверхности заданного гладкого неподвижного тела.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано уравнение поверхности обтекаемого тела $x_3 = g(x_1, x_2)$. Выпишем условия непротекания $-u_3 + u_2g_2 + u_1g_1 = 0$. Здесь $\{g_1, g_2, -1\}$ — вектор нормали к поверхности тела в любой фиксированной точке, $g_j = \partial g / \partial x_j$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим течение (5.1), (5.2) типа пространственной двойной волны. Выберем $\Psi(z) = z$, $A = 1$, $B = 0$ (см. утверждение 4). Можно выбрать $z = u_2g_2 + u_1g_1$, положив в каждой фиксированной точке тела

$$x_i = x_i^0, \quad x_3 = g(x_1^0, x_2^0), \quad i = 1, 2, \quad a = g_1(x_1^0, x_2^0), \quad b = g_2(x_1^0, x_2^0), \quad c = 0.$$

Для такого течения условия непротекания на теле выполняются.

Покажем, что существует решение системы (5.1), удовлетворяющее полученному выше условию непротекания.

Выпишем для данных $\Psi(z)$ и z вид функций K_i , $i = 1, 2, 3$:

$$K_1 = g_1g_2[(g_2^2 - g_1^2)^2 - (g_2^2 + g_1^2) - 2], \quad (6.1)$$

$$K_2 = \kappa g_1g_2(1 + g_1^2)(1 + g_2^2)(g_1^2 + g_2^2), \quad (6.2)$$

$$K_3 = g_1g_2(g_2^2 - g_1^2)^2. \quad (6.3)$$

Если $K_1 = 0$ (см. (6.1)) — уравнение поверхности рассматриваемого тела ($F = 0$), то можно положить $\Gamma = 0.25H^2z^2$. Положим также $X = z$. Подставив выбранные функции в соотношения (0.4), получим систему уравнений для определения $u_i(x_1, x_2, t)$ на теле ($x_3 = g(x_1, x_2)$):

$$t[g_1^2(0.5H^2 + 1) + 1]u_1 + tg_1g_2(0.5H^2 + 1)u_2 = x_1 - g_1 - gg_1,$$

$$tg_1g_2(0.5H^2 + 1)u_1 + t[g_2^2(0.5H^2 + 1) + 1]u_2 = x_2 - g_2 - gg_2.$$

Решение этой системы позволит получить течение типа пространственной двойной волны в каждой фиксированной точке тела, уравнение поверхности которого $K_1 = 0$:

$$\Gamma = 0.25H^2z^2, \quad \Psi = z, \quad X = z, \quad z = g_1u_1 + g_2u_2, \quad t > 0,$$

$$u_1 = \frac{x_1 + gg_1 - g_1 + g_2(x_1g_2 - x_2g_1)(0.5H^2 + 1)}{t[(g_1^2 + g_2^2)(0.5H^2 + 1) + 1]},$$

$$u_2 = \frac{x_2 + gg_2 - g_2 - g_1(x_1g_2 - x_2g_1)(0.5H^2 + 1)}{t[(g_1^2 + g_2^2)(0.5H^2 + 1) + 1]}, \quad u_3 = g_1u_1 + g_2u_2.$$

Аналогичные рассуждения позволят построить течение идеального газа типа пространственной двойной волны около заданного гладкого неподвижного тела, если уравнение его поверхности $K_2 = 0$ (см. (6.2), (5.3)) или $K_3 = 0$ (см. (6.3), (5.3)), или $K_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ (см. (5.3), (5.4)), что и требовалось доказать.

7. Заключение

В работе реализован один способ редукции уравнений в частных производных к системам ОДУ.

Способ опирается либо на стандартное предположение, что решения рассматриваемых уравнений или систем уравнений в частных производных зависят от одной переменной (см. разд. 1, 5), либо на более общие предположения, при которых решения могут зависеть от большего числа переменных, но от одной переменной зависят некие агрегаты (см. [4]). При редукции на промежуточном этапе получаем переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных, содержащую уравнение в частных производных первого порядка (см. (1.2), (1.9)) и пока произвольные функции в правых частях уравнений.

Как известно, переопределенные системы дифференциальных уравнений тем или иным методом исследуются во многих работах (см., например, [11–15]).

В реализованных в статье подходах изучаемая переопределенная система уравнений, заменяется системой, состоящей из расширенной системы уравнений характеристик (см. (1.4), (1.12)) уравнения первого порядка и добавленных к ней уравнений, описывающих изменение вдоль характеристик правых частей остальных уравнений переопределенной системы (первые интегралы).

Таким образом, приходим к системе ОДУ, каждое решение которой является решением рассматриваемой переопределенной системы уравнений в частных производных.

Расширенная система уравнений характеристик состоит из известной [16] системы уравнений характеристик, описывающей изменение вдоль характеристики первых производных уравнения в частных производных первого порядка,

и уравнений, описывающих изменение высших производных вдоль характеристики. Решение исследуемой переопределенной системы при некоторых дополнительных ограничениях (см., например, утверждение 1) совпадает с решением уравнения в частных производных первого порядка. Это позволяет сводить исходные уравнение или систему уравнений к системе ОДУ.

В работе с помощью изложенных выше подходов выписан ряд точных решений для уравнения (0.1).

Доказано также, что в окрестности любой точки $\{\xi_1, \xi_2\}$, выбранной в плоскости автомодельных переменных, существует течение типа потенциальной двойной волны. Радиус окрестности зависит от заданной в этой точке скорости звука (см. (3.1)). Это решение можно использовать для получения безударного сжатия политропного газа. Оно показывает, что при $u_i = \xi_i$, $i = 1, 2$, скорость звука может быть сколь угодно большой ($M = \text{const}$ — произвольное число).

Если предварительно выбрана функция $\Theta(\psi)$ в уравнении (1.6), то его можно рассматривать как дифференциальное уравнение для функции, задающей поверхность уровня ψ (см. (1.8), (1.6)). Этот факт можно использовать при решении некоторых содержательных задач.

При получении решений уравнения (0.1) использовалось два подхода. В первом подходе поверхность уровня предполагалась неизвестной и ее нужно было определить. Во втором подходе строилось решение, в котором все производные зависели от искомой функции (решения уравнения потенциальных двойных волн). При этом подходе не нужно искать поверхность уровня, но он дает менее детальную картину процесса, если решать расширенную систему уравнений характеристик численными методами, так как при ее решении можно выбрать шаг интегрирования так, что погранслои будут пропущены.

Для пространственных двойных волн получена функция, задающая поверхность уровня и линейно зависящая от компонент скорости движения газа. Она содержит произвольные постоянные, которые можно выбирать так, чтобы решение удовлетворяло условию непротекания через гладкую поверхность тела $x_3 = f(x_1, x_2)$ при любом $t > 0$. Рассмотрен один пример такого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123, № 5. С. 832–834.
2. Ермолин Е. В., Рубина Л. И., Сидоров А. Ф. К задаче о двух поршнях // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, № 5. С. 946–954.
3. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 209–225.
4. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. К вопросу об отличиях в поведении решений линейного и нелинейного уравнения теплопроводности // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5, № 2. С. 52–59.
5. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. О решении некоторых уравнений нелинейной акустики // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 5. С. 576–582.
6. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1091–1101.
7. Сидоров А. Ф. Двумерные процессы неограниченного безударного сжатия газа // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 5. С. 812–821.
8. Сидоров А. Ф. Новые режимы неограниченного безударного сжатия газа // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 199–202.
9. Сидоров А. Ф. О некоторых пространственных течениях газа, примыкающих к области покоя // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, № 3. С. 369–380.

10. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 238–246.
11. Жданов Р. З., Ревенко И. В., Фушич В. Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 11. С. 1471–1487.
12. Collins C. B. Complex potential equations I. A technique for solution // Math. Proc. Camb. Philos. 1976. V. 80, N 2. P. 165–187.
13. Картап Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962.
14. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
15. Ibragimov N. H., Meleshko S. V., Rudenko O. V. Group analysis of evolutionary integro-differential equations describing nonlinear waves: The general model // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. N 44.315201. 21 p.
16. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию 29 декабря 2017 г.

После доработки 28 февраля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Рубина Людмила Ильинична

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
rli@imm.uran.ru

Ульянов Олег Николаевич

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
uon@imm.uran.ru