A. A. Sedipkov, Parametric control of solutions to a linear evolution problem in a neighborhood of an unstable equilibrium, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 874–880

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.413>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.196.121.252

April 26, 2023, 13:39:42

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ
ЗАДАЧИ В ОКРЕСТНОСТИ
НЕУСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ
А. А. Седипков

Аннотация. Исследуется задача управления решениями линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с неустойчивым положением равновесия. Построено управление, при котором решение удерживается в окрестности положения равновесия сколь угодно долго.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.413

Ключевые слова: параметрическое управление, линейная эволюционная задача, неустойчивое положение равновесия.

1. Введение

Статья связана с изучением возможности управления решениями математических моделей эволюционных процессов, например каталитических процессов в химических реакторах [1, 2], имеющих режимы, соответствующие неустойчивым стационарным решениям. Нередко такие режимы наиболее выгодны с точки зрения приложений. Поэтому возникает вопрос, какими параметрами и как нужно управлять, чтобы решение нестационарной задачи сколь угодно долго оставалось в малой окрестности неустойчивого стационарного режима. В конце 70-х гг. Т. И. Зеленьком был предложен способ управления стационарными решениями, зависящими от параметра. Эта идея была основана на эффекте «удаления» решения с течением времени от неустойчивого стационарного решения.

Проиллюстрируем изложенное элементарным примером. Возьмем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(t) = \lambda(y(t) - v),$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, v — вещественный параметр, λ — положительный коэффициент. Ясно, что для каждого фиксированного значения параметра v функция $y(t) \equiv v$ будет неустойчивым по Ляпунову стационарным решением.

Пусть управляющий субъект в любой момент времени может мгновенно изменить (переключить) параметр v , придав ему любое из значений v^0, v^1 . Для определенности рассмотрим случай $v^0 < v^1$. Под решением рассматриваемого уравнения с данным управлением будем понимать непрерывную функцию $y(t)$,

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 18–01–00649).

являющуюся решением одного из уравнений $y'(t) = \lambda(y(t) - v^s)$, $s = 0, 1$, на каждом из соответствующих интервалов времени между переключениями параметра v .

Положим $v = v^0$. Тогда решение $y(t)$ с начальными данными $y(0) \in (v^0, v^1)$ будет удаляться от v^0 и, следовательно, приближаться к точке v^1 . В некоторый момент времени t_1 такой, что значение $y(t_1)$ меньше v^1 , переключим параметр v в положение v^1 . Теперь $y(t)$ будет являться решением задачи Коши с начальными данными $y(t_1)$, которое будет удаляться от точки v^1 . Выбрав момент времени t_2 такой, что $y(t_2) > v^0$, положим $v = v^0$ и окажемся в исходной ситуации. Продолжая этот процесс управления подобными переключениями, можно удерживать решение $y(t)$ в пределах интервала (v^0, v^1) сколь угодно долго.

В дальнейшем данный подход был обоснован в работах [3–6]. В них были рассмотрены весьма общие обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, а также некоторые классы уравнений с частными производными, но со следующим ограничением на характер неустойчивости: спектр оператора соответствующей линеаризованной задачи может иметь не более двух собственных значений с положительной вещественной частью. Данное ограничение позволяет применить геометрические соображения, характерные для одномерного и двумерного пространств, но не выполняющиеся в пространствах более высокой размерности. Поэтому случай спектра с более чем двумя собственными значениями в правой полуплоскости долгое время не поддавался изучению. В настоящей работе предложен способ управления, позволяющий снять это ограничение на уровне модельной задачи для линейного оператора в конечномерном пространстве.

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением

$$y'(t) = A(y(t) - v), \quad (1)$$

где $y(t)$ — фазовая переменная со значениями в $\mathbb{R}^n$, характеризующая состояние процесса в момент времени t ; v — управляющий параметр со значениями в $\mathbb{R}^n$; $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Пусть кроме уравнения (1) имеется управляющий субъект — оператор, который в любой момент времени может мгновенно переключить параметр v , придав ему произвольное новое значение, причем интервалы времени между соседними переключениями должны быть не меньше наперед заданного положительного числа τ , т. е. класс допустимых управлений состоит из кусочно постоянных функций вида

$$v(t) \equiv v^s \text{ при } t_s < t < t_{s+1}, \text{ где } \inf\{t_{s+1} - t_s \mid s \in \mathbb{N}\} \geq \tau > 0, \quad t_0 = 0.$$

Непрерывная функция $y(t)$ считается решением уравнения (1) с допустимым управлением $v(t)$, если на каждом из интервалов (t_s, t_{s+1}) существует производная $y'(t)$ и выполняется равенство $y'(t) = A(y(t) - v^s)$.

Допустим, что ровно k собственных чисел оператора A положительны и различны, а остальные $n - k$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Следовательно, для каждого фиксированного значения параметра v функция $y(t) \equiv v$ будет неустойчивым стационарным решением уравнения (1).

Целью настоящей работы является поиск условий, при которых для любой окрестности V фиксированной точки v^0 найдется такое открытое подмножество W , что для всякого начального состояния $y^0 \in W$ существует допустимое управление $v(t)$, при котором решение задачи Коши

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(y(t) - v(t)), \quad t \in (t_s, t_{s+1}), \quad s \in \mathbb{N}, \\ \lim_{t \rightarrow t_{s+1}-0} y(t) &= \lim_{t \rightarrow t_{s+1}+0} y(t), \quad y(0) = y^0, \end{aligned} \quad (2)$$

не выйдет из окрестности V в течение сколь угодно долгого времени.

3. Сведение к процессу управления в пространстве меньшей размерности

Представим пространство $\mathbb{R}^n$ в виде прямой суммы подпространств E^k и E^{n-k} , где E^k — корневое подпространство оператора A , отвечающее положительным собственным значениям оператора $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, а E^{n-k} — корневое подпространство оператора A , отвечающее собственным значениям, лежащим в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Соответствующие спектральные проекторы обозначим через $P : \mathbb{R}^n \rightarrow E^k$, $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow E^{n-k}$, а сужение оператора A на подпространство E^k — через A_{E^k} (см. [7, гл. I, § 2]).

Пусть μ — наибольшая вещественная часть собственных значений оператора A , лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Из [7, гл. 1, § 4] следует, что для любого $\varepsilon \in (0, |\mu|)$ найдется $C_\varepsilon > 0$ такое, что для решения уравнения (1) будет выполнена равномерно по v следующая оценка:

$$\|Qy(t) - Qv\| \leq C_\varepsilon e^{-\varepsilon t} \|Qy(0) - Qv\|, \quad t > 0.$$

Управление $v(t)$ будем искать среди допустимых управлений, удовлетворяющих условию

$$Qv(t) = Qv^0, \quad t > 0.$$

Тогда для решения задачи Коши (2) будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^0\| &\leq \|Py(t) - Py^0\| + \|Qy(t) - Qy^0\| \\ &\leq \|Py(t) - Py^0\| + \|Qy(t) - Qv^0\| + \|Qy^0 - Pv^0\| \\ &\leq \|Py(t) - Py^0\| + (C_\varepsilon e^{-\varepsilon t} + 1) \|Qy^0 - Qv^0\|, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Возьмем в качестве множества V некоторую δ -окрестность точки v^0 . Потребуем также, чтобы начальные данные y^0 выбирались из условия

$$\|Qy^0 - Qv^0\| < \delta(C_\varepsilon + 1)^{-2}. \quad (4)$$

Положим

$$x(t) = Py(t), \quad x^0 = Py^0, \quad u(t) = Pv(t), \quad u^0 = Pv^0.$$

Тогда из оценок (3), (4) получим, что

$$\|y(t) - y^0\| \leq \|x(t) - x^0\| + \frac{\delta}{C_\varepsilon + 1}, \quad t > 0.$$

Отсюда заключаем, что рассматриваемая задача сводится к поиску условий, при которых для любой окрестности $U \subset E^k$ точки u^0 , содержащейся в шаре

$$\{x \in E^k \mid \|x - u^0\| < \delta - \delta/(C_\varepsilon + 1)\},$$

найдется такое открытое подмножество D , что для всякого начального состояния $x^0 \in D$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x'(t) &= A_{E^k}(x(t) - u(t)), \quad t \in (t_s, t_{s+1}), \quad s \in \mathbb{N}, \\ \lim_{t \rightarrow t_{s+1}-0} x(t) &= \lim_{t \rightarrow t_{s+1}+0} x(t), \quad x(0) = x^0, \end{aligned} \quad (5)$$

будет оставаться в окрестности U сколь угодно долго.

4. Построение процесса управления

В дальнейшем рассматриваемую задачу будем изучать в базисе $e_1, \dots, e_k$ пространства E^k , где e_s — собственный вектор оператора A_{E^k} , отвечающий собственному значению λ_s . Тогда уравнение $x'(t) = A_{E^k}(x(t) - u)$ переписывается в виде системы

$$x'(t) = \Lambda(x(t) - u), \quad t > 0, \quad (6)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$

Решение системы (6), соответствующее фиксированному управляющему параметру u , будем обозначать через $x(t; u)$. Отметим, что всякое такое решение имеет вид

$$x(t; u) = u + e^{\Lambda t} c, \quad c \in \mathbb{R}^k. \quad (7)$$

Пусть u и w — два управляющих параметра, у которых координаты удовлетворяют неравенствам

$$u_s < w_s, \quad s = \overline{1, k},$$

а $P(u, w)$ — k -мерный прямоугольник $(u_1, w_1) \times \dots \times (u_k, w_k)$.

Для произвольного $\xi > 0$ обозначим через c^ξ элемент $\mathbb{R}^k$, компоненты которого определяются формулой

$$c_s^\xi = \frac{w_s - u_s}{1 + e^{\lambda_s \xi}}, \quad s = \overline{1, k}. \quad (8)$$

Отметим, что при $\xi > 0$ точка c^ξ принадлежит $P(0, \frac{w-u}{2})$. Следовательно, для любых $\eta > \xi > 0$ справедливо строгое включение

$$P(u + c^\eta, u + c^\xi) \subset P(u, (w + u)/2).$$

Положим

$$\alpha = \max_{s=\overline{1, k}} \frac{e^{2\lambda_s \tau}}{1 - e^{-2\lambda_s \tau}}.$$

Нетрудно видеть, что $\alpha > 1$ и, следовательно, $P(u, w) \subset P(u, u + \alpha(w - u))$.

Лемма 1. Пусть $\xi \in (0, 2\tau)$, $\eta = \min\{2\tau, \nu\}$, где $\nu = \min_{s=\overline{1, k}} \frac{1}{\lambda_s} \ln(1 + e^{\lambda_s \xi})$. Тогда $\eta \in (\xi, 2\tau]$, причем всякое решение $x(t; u)$ с начальными данными из прямоугольника $P(u + c^\eta, u + c^\xi)$ будет находиться в пределах прямоугольника $P(u, w)$ вплоть до момента времени η включительно.

Доказательства этой и следующей лемм вынесены в разд. 5.

Лемма 2. Пусть $\xi \in [\tau, 2\tau)$, $\eta = \min\{2\tau, \nu\}$, где $\nu = \min_{s=\overline{1,k}} \frac{1}{\lambda_s} \ln(1 + e^{\lambda_s \xi})$.

Тогда для любого $\gamma \in [\frac{\eta-\xi}{2}, \eta]$ прямоугольник $P(u^\gamma, w^\gamma)$, где точки u^γ, w^γ определяются по формулам

$$\begin{aligned} u^\gamma &= (E - e^{\Lambda\gamma})^{-1}[u + c^\xi - e^{\Lambda\gamma}x(\gamma, u)], \\ w^\gamma &= (E - e^{\Lambda\gamma})^{-1}[u + c^\eta - e^{\Lambda\gamma}x(\gamma, u)], \end{aligned} \quad (9)$$

содержится в $P(u, u + \alpha(w - u))$, причем для любого параметра $\tilde{w} \in P(u^\gamma, w^\gamma)$ существует $\delta > 0$ такое, что решение $x(t; \tilde{w})$ с начальными данными в точке $x(\gamma; u)$ будет находиться в пределах прямоугольника $P(u, w)$ вплоть до момента времени $\gamma + \delta$, а при $t \in B_\delta(\gamma) = \{t : |t - \gamma| < \delta\}$ — в $P(u + c^\eta, u + c^\xi)$.

Перейдем к построению допустимого управления. В системе (6) положим $u = u^0$. Зафиксируем произвольное число $\xi \in [\tau, 2\tau)$ и параметр w такой, что $w_s > u_s^0$, $s = \overline{1, k}$, и окрестность U в базисе $e_1, \dots, e_k$ содержит прямоугольник $P(u^0, u^0 + \alpha(w - u^0))$. Выберем произвольную точку x^0 из прямоугольника $P(u^0 + c^\eta, u^0 + c^\xi)$, где $\eta = \min\{2\tau, \nu\}$, $\nu = \min_{s=\overline{1,k}} \frac{1}{\lambda_s} \ln(1 + e^{\lambda_s \xi})$, и начнем двигаться

по траектории решения $x(t, u^0)$ с начальными данными x^0 . Из леммы 1 следует, что рассматриваемое решение не покинет прямоугольник $P(u^0, w)$ вплоть до момента времени η включительно. В некоторый момент времени $t_1 \in [\frac{\eta-\xi}{2}, \eta]$ переключим управляющий параметр u в некоторое положение $u^1 \in P(u^{t_1}, w^{t_1})$, где $u^{t_1} = (E - e^{\Lambda t_1})^{-1}[u + c^\xi - e^{\Lambda t_1}x(t_1, u)]$, $w^{t_1} = (E - e^{\Lambda t_1})^{-1}[u + c^\eta - e^{\Lambda t_1}x(t_1, u)]$, и продолжим двигаться по траектории решения $x(t, u^1)$ с начальными данными $x(t_1; u^0)$ при $t = t_1$. Из леммы 2 следует, что $u^1 \in P(u^0, u^0 + \alpha(w - u^0))$ и найдется $\delta > 0$ такое, что решение $x(t, u^1)$, выйдя в момент времени t_1 из точки $x(t_1, u^0)$, будет находиться в пределах прямоугольника $P(u^0, w)$ вплоть до момента времени $2t_1 + \delta$ включительно, а при $t \in B_\delta(2t_1)$ — в $P(u^0 + c^\eta, u^0 + c^\xi)$. Тогда в некоторый момент времени $t_2 \in B_\delta(2t_1) \cap \{t \geq t_1 + \tau\}$, положив $u = u^0$, окажемся в исходной ситуации, т. е. в прямоугольнике $P(u^0 + c^\eta, u^0 + c^\xi)$. Продолжая рассуждения подобным образом и беря в качестве D область, которая в базисе $e_1, \dots, e_k$ совпадает с прямоугольником $P(u^0 + c^\eta, u^0 + c^\xi)$, можно сколь угодно долго удерживать траекторию управляемого процесса в окрестности U .

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для любой окрестности U точки u^0 найдется такое открытое подмножество D , что для всякого начального состояния $x^0 \in D$ существует допустимое управление $u(t)$ со значениями в U такое, что решение задачи Коши (5) не выйдет из окрестности U в течение сколь угодно долгого времени.

5. Доказательства лемм

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Из (8) видно, что

$$\xi = \frac{1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{w_s - u_s - c_s^\xi}{c_s^\xi} \right) < \frac{1}{\lambda_s} \ln \left(\frac{w_s - u_s}{c_s^\xi} \right) = \frac{1}{\lambda_s} \ln(1 + e^{\lambda_s \xi}), \quad s = \overline{1, k}, \quad (10)$$

Следовательно, $\nu = \min_{s=\overline{1,k}} \frac{1}{\lambda_s} \ln(1 + e^{\lambda_s \xi}) > \xi$.

Покажем, что значения решения $x(t; u)$ с начальными данными из $P(u + c^\eta, u + c^\xi)$ будут находиться в пределах прямоугольника $P(u, w)$ вплоть до момента времени η включительно. Из (7), (8) видно, что компоненты решения

$x(t; u)$ с начальными данными из $P(u + c^\eta, u + c^\xi)$ строго возрастают. Тогда для справедливости леммы достаточно показать, что компоненты значения $x(\nu; u)$ ограничены сверху с помощью строгих неравенств компонентами некоторой точки из замыкания прямоугольника $P(u, w)$. Из (7), (10) и того, что $c \in P(c^\eta, c^\xi)$, получаем справедливость цепочки неравенств

$$\begin{aligned} x_s(\nu; u) &\leq x_s\left(\frac{1}{\lambda_s} \ln\left(\frac{w_s - u_s}{c_s^\xi}\right); u\right) \\ &< x_s\left(\frac{1}{\lambda_s} \ln\left(\frac{w_s - u_s}{c_s}\right); u\right) = w_s, \quad s = \overline{1, k}. \quad \square \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Зафиксируем произвольное $\gamma \in [\frac{\eta - \xi}{2}, \eta]$. Рассмотрим компоненты точек u^γ, w^γ . Из (9) видно, что для $s = \overline{1, k}$ они имеют вид

$$u_s^\gamma = (1 - e^{\lambda_s \gamma})^{-1} (u_s + c_s^\xi - e^{\lambda_s \gamma} x_s(\gamma, u)), \quad (11)$$

$$w_s^\gamma = (1 - e^{\lambda_s \gamma})^{-1} (u_s + c_s^\eta - e^{\lambda_s \gamma} x_s(\gamma, u)). \quad (12)$$

Также рассмотрим $x(t, \tilde{w})$ — решение системы (6) с управляющим параметром $\tilde{w}$, которое принимает значение $x(\gamma, u)$ при $t = 0$. Из (7) получаем, что его компоненты имеют вид

$$x_s(t, \tilde{w}) = \tilde{w}_s + e^{\lambda_s t} (x_s(\gamma, u) - \tilde{w}_s) = (1 - e^{\lambda_s t}) \tilde{w}_s + e^{\lambda_s t} x_s(\gamma, u), \quad s = \overline{1, k}. \quad (13)$$

Пусть $\tilde{w} \in P(u^\gamma, w^\gamma)$, т. е. справедливы неравенства

$$u_s^\gamma < \tilde{w}_s < w_s^\gamma, \quad s = \overline{1, k}.$$

Из (11)–(13) видно, что, домножив эти неравенства на $1 - e^{\lambda_s \gamma}$ и прибавив $e^{\lambda_s \gamma} x_s(\gamma, u)$, получим, что

$$u_s + c_s^\eta < x_s(\gamma, \tilde{w}) < u_s + c_s^\xi, \quad s = \overline{1, k},$$

т. е. точка $x(\gamma, \tilde{w})$ лежит в $P(u + c^\eta, u + c^\xi)$.

В силу открытости множества $P(u + c^\eta, u + c^\xi)$ найдется $\delta > 0$ такое, что $x(t; \tilde{w}) \in P(u + c^\eta, u + c^\xi)$ при $t \in B_\delta(\gamma)$. Более того, поскольку траектория решения $x(t; \tilde{w})$ соединяет две точки, принадлежащие прямоугольнику $P(u, w)$, учитывая монотонность компонент решения $x(t; \tilde{w})$, устанавливаем, что $x(t; \tilde{w}) \in P(u, w)$ вплоть до момента времени $\gamma + \delta$.

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что справедливо включение $P(u^\gamma, w^\gamma) \subset P(u, u + \alpha(w - u))$. Из (7), (11), (12) получаем, что для $s = \overline{1, k}$ справедливы

$$u_s^\gamma = u_s + (1 - e^{\lambda_s \gamma})^{-1} (c_s^\xi - e^{2\lambda_s \gamma} c_s),$$

$$w_s^\gamma = u_s + (1 - e^{\lambda_s \gamma})^{-1} (c_s^\eta - e^{2\lambda_s \gamma} c_s),$$

где $c_s^\eta < c_s < c_s^\xi$. Отсюда и из (8) вытекает, что для $s = \overline{1, k}$ выполняется цепочка неравенств

$$u_s^\gamma > u_s + (1 - e^{\lambda_s \gamma})^{-1} (c_s^\xi - e^{2\lambda_s \gamma} c_s^\eta) > u_s + \frac{w_s - u_s}{1 - e^{\lambda_s \gamma}} \left(\frac{1}{1 + e^{\lambda_s \xi}} - \frac{e^{2\lambda_s \gamma}}{1 + e^{\lambda_s \eta}} \right), \quad (14)$$

$$w_s^\gamma < u_s + (1 - e^{\lambda_s \gamma})^{-1} (c_s^\eta - e^{2\lambda_s \gamma} c_s^\xi) < u_s + \frac{w_s - u_s}{1 - e^{\lambda_s \gamma}} \left(\frac{1}{1 + e^{\lambda_s \eta}} - \frac{e^{2\lambda_s \gamma}}{1 + e^{\lambda_s \xi}} \right). \quad (15)$$

Из (14) видно, что $u_s^\gamma > u_s$ в силу справедливости неравенств

$$\frac{1}{1 + e^{\lambda_s \xi}} - \frac{e^{2\lambda_s \gamma}}{1 + e^{\lambda_s \eta}} < 0, \quad \gamma \in [(\eta - \xi)/2, \eta], \quad s = \overline{1, k}.$$

Продолжая оценку сверху в (15) с помощью неравенств

$$\tau \leq \xi < \gamma \leq \eta \leq 2\tau,$$

получаем, что при $s = \overline{1, k}$ верны неравенства

$$w_s^\gamma < u_s + \frac{(w_s - u_s)e^{2\lambda_s \gamma}}{(e^{\lambda_s \gamma} - 1)(e^{\lambda_s \xi} + 1)} < u_s + \frac{(w_s - u_s)e^{4\lambda_s \tau}}{(e^{2\lambda_s \tau} - 1)} \leq u_s + \alpha(w_s - u_s). \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеленьяк Т. И., Слинько М. Г. Динамика каталитических систем // Кинетика и катализ. 1977. Т. 18, № 5. С. 1235–1248; 1977. Т. 18, № 6. С. 1548–1560.
2. Вишневский М. П. Периодические и близкие к ним решения параболических систем // Динамика сплошной среды. 1984. № 16. С. 84–90.
3. Мусиенко Е. И. Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения // Динамика сплошной среды. 1981. № 51. С. 68–83.
4. Мусиенко Е. И. Управление решением некоторых параболических задач в окрестности неустойчивого стационарного решения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 12. С. 2120–2130.
5. Ивирсин М. Б. Параметрическое управление решениями эволюционной задачи в окрестности неустойчивого стационарного режима // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 760–771.
6. Ивирсин М. Б. Релейное управление эволюционным процессом в банаховом пространстве в окрестности неустойчивого стационарного режима // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 32–47.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 29 сентября 2016 г.

После доработки 4 апреля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Седипков Айдыс Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
sedipkov@gmail.com