S. I. Strakhov, Characterization of the Orlicz spaces whose convergence is equivalent to convergence in measure on reflexive subspaces, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 881–890

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.414>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.172.240.79

April 26, 2023, 14:33:47

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА, СХОДИМОСТЬ НА РЕФЛЕКСИВНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ КОТОРЫХ ЭКВИВАЛЕНТНА СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ

С. И. Страхов

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия, при которых в пространстве Орлича L_F на рефлексивных подпространствах сходимость по мере эквивалентна сходимости по норме.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.414

Ключевые слова: симметричное пространство, рефлексивное подпространство, пространство Орлича, индексы Орлича — Матушевской, сходимость по мере.

§ 1. Введение

Пусть X — симметричное пространство на $[0, 1]$, Y — его замкнутое линейное подпространство. Говорят, что Y *сильно вложено* в X , если сходимость по норме в Y эквивалентна сходимости по мере. Например, подпространство $[r_k]$, порожденное функциями Радемахера $r_k(t) = \text{sign} \sin(2^k \pi t)$, $k = 1, 2, \dots$, сильно вложено в $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$. Действительно, ввиду классического неравенства Хинчина (см., например, [1, гл. 5, теорема 8.4]) последовательность $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ эквивалентна в $L_p[0, 1]$ для каждого $0 < p < \infty$ каноническому базису в l_2 , поэтому (см. также [2, предложение 6.4.5]) подпространство $[r_k]$ сильно вложено в $L_p[0, 1]$.

Предположим, что F — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $F(0) = 0$ и L_F — соответствующее пространство Орлича функций на отрезке $[0, 1]$. Как показал Лавернье [3], условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{F}(ct)}{\tilde{F}(t)} = \infty \quad (1)$$

для некоторого $c > 1$, где $\tilde{F}$ — дополнительная функция к F , влечет, что всякое рефлексивное подпространство пространства Орлича L_F сильно вложено в него. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия на функцию F , при которых любое рефлексивное подпространство сильно вложено в L_F . Условие (1) на функцию $\tilde{F}$ гарантирует

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 18-01-00414-а).

«близость» пространства Орлича L_F к L_1 . Главный результат работы — теорема 1 — показывает, что в пространствах Орлича, достаточно «близких» к L_∞ , все рефлексивные подпространства тоже сильно вложены.

Стоит отметить различие между нашим доказательством и доказательством Лавернье, который использовал полученное Алексополусом (см. [4]) обобщение классической теоремы Данфорда — Петтиса¹⁾. В отличие от [3] наше доказательство основано на применении характеристики интересующего нас класса пространств в терминах их почти дизъюнктивных последовательностей (см. [6]), а также индексов Орлича — Матушевской выпуклой функции и множеств C_F^∞ , введенных в фундаментальной работе [7].

§ 2. Определения и предварительные сведения

Напомним кратко некоторые основные определения из теории симметричных пространств (более полную информацию можно найти в [8, 9]).

Банахово пространство X измеримых на $[0, 1]$ функций называется *симметричным* (кратко с.п.) или *перестановочно-инвариантным*, если

1) оно идеально, т. е. из $|x(t)| \leq |y(t)|$ для п. в. $t \in [0, 1]$, измеримости x и $y \in X$ следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$;

2) из *равноизмеримости* функций x и y , т. е. равенства

$$\mu(\{t \in [0, 1] : |y(t)| > u\}) = \mu(\{t \in [0, 1] : |x(t)| > u\}), \quad u > 0,$$

где $\mu(E)$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}$, и $y \in X$ вытекает: $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

В частности, любая измеримая на $[0, 1]$ функция x равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \geq 0 : \mu(\{s \in [0, 1] : |x(s)| > u\}) < t\}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Для каждого с.п. X на $[0, 1]$ справедливы непрерывные вложения $L_\infty \subset X \subset L_1$.

Пусть X — с.п. на $[0, 1]$. Функция

$$\phi_X(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X, \quad t > 0,$$

называется *фундаментальной функцией* пространства X .

Если X — с.п. на $[0, 1]$, то *ассоциированное* пространство X' состоит из всех y , для которых

$$\|y\|_{X'} := \sup \left\{ \int_0^1 x(t)y(t) dt : \|x\|_X \leq 1 \right\} < \infty.$$

Важный и наиболее простой пример с.п. — L_p -пространства, $1 \leq p \leq \infty$, с обычной нормой. Их естественным обобщением являются пространства Орлича. Пусть F — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $F(0) = 0$. Пространство Орлича L_F состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма

$$\|x\|_{L_F} = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 F\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \leq 1 \right\}$$

¹⁾Заметим, что описание всех с.п., в которых верна теорема Данфорда — Петтиса, получено в [5]; это так называемые (Wm) -пространства (т. е. из слабой сходимости и сходимости по мере вытекает сходимость по норме). Связь между (Wm) -пространствами и пространствами, всякое рефлексивное подпространство которых сильно вложено, изучена в [6].

конечна. Фундаментальная функция пространства L_F определяется равенством [10, формула 9.23]

$$\phi_{L_F}(t) = \frac{1}{F^{-1}(1/t)}.$$

Аналогично вводится понятие пространства Орлича последовательностей: $(a_n)_{n=1}^\infty \in l_F$ тогда и только тогда, когда

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_{l_F} = \inf \left\{ u > 0 : \sum_{n=1}^\infty F\left(\frac{|a_n|}{u}\right) \leq 1 \right\} < \infty.$$

В частности, если $F(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, получаем пространства L_p и l_p .

Говорят, что функция F удовлетворяет Δ_2^0 -условию (Δ_2^∞ -условию), и пишут $F \in \Delta_2^0$ ($F \in \Delta_2^\infty$), если

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{F(2t)}{F(t)} < \infty \quad \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{F(2t)}{F(t)} < \infty \right).$$

Две возрастающие выпуклые функции M_1 и M_2 называются *эквивалентными в нуле*, если существуют положительные константы K_1 , K_2 , λ , μ и x_0 такие, что для всех $x \in [0, x_0]$ выполняется

$$K_1 M_2(\lambda x) \leq M_1(x) \leq K_2 M_2(\mu x).$$

Функция $\tilde{F}$, определенная равенством

$$\tilde{F}(v) = \max_{u \geq 0} (uv - F(u)),$$

называется *дополнительной* к возрастающей выпуклой функции F .

Для каждой возрастающей выпуклой функции F определим следующие подмножества пространства $C[0, \frac{1}{2}]$:

$$E_{F,A}^\infty = \overline{\left\{ G(x) = \frac{F(xy)}{F(y)} : y > A > 0 \right\}}, \quad C_{F,A}^\infty = \overline{\text{conv } E_{F,A}^\infty},$$

$$E_F^\infty = \bigcap_{A>0} E_{F,A}^\infty, \quad C_F^\infty = \bigcap_{A>0} C_{F,A}^\infty,$$

где замыкание берется в $C[0, \frac{1}{2}]$. Все эти множества являются непустыми компактными подмножествами $C[0, \frac{1}{2}]$ (см. [11, лемма 4.а.6]). Повторяя рассуждения леммы 7 из [12], можно показать справедливость следующего результата.

Лемма 1. Если F — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $F(0) = 0$, то $C_F^\infty = \overline{\text{conv } E_F^\infty}$.

Как легко видеть, множество C_F^∞ состоит из выпуклых возрастающих функций на $[0, \frac{1}{2}]$. Более того, если $F \in \Delta_2^\infty$, то $\psi \in C_F^\infty$ тогда и только тогда, когда в L_F существует последовательность дизъюнктивных функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, эквивалентная каноническому базису пространства Орлича последовательностей l_ψ .

Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда $t^p \in C_F^\infty$, если и только если $p \in [\alpha_F^\infty, \beta_F^\infty]$, где α_F^∞ и β_F^∞ — индексы Орлича — Матушевской, определяемые следующим образом:

$$\alpha_F^\infty = \sup \left\{ p : \sup_{x,y \geq 1} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} < \infty \right\}, \quad \beta_F^\infty = \inf \left\{ p : \inf_{x,y \geq 1} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} > 0 \right\}.$$

В теории пространств Орлича последовательностей аналогичную роль играют числа

$$\alpha_F^0 = \sup \left\{ p : \sup_{0 < x, y \leq 1} \frac{F(xy)}{F(x)y^p} < \infty \right\}, \quad \beta_F^0 = \inf \left\{ p : \inf_{0 < x, y \leq 1} \frac{F(xy)}{F(x)y^p} > 0 \right\}.$$

Легко проверить, что $1 \leq \alpha_F^i \leq \beta_F^i \leq \infty$, где $i = 0, \infty$. Более полную информацию об индексах Орлича — Матушевской можно найти в [11, 13].

Другие примеры с.п. — пространства Марцинкевича и Лоренца. Если $\varphi(t)$ — вогнутая возрастающая функция на $[0, 1]$, то пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\varphi)} := \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\int_0^t x^*(s) ds}{\varphi(t)} < \infty,$$

а пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ — из всех $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} := \int_0^1 x^*(s) d\varphi(s) < \infty.$$

Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ такая, что $\|u_n\|_X = 1$, называется *почти дизъюнктивной*, если $\|u_n - v_n\|_X \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторой дизъюнктивной последовательности $\{v_n\}_{n=1}^\infty$. Через $[x_i]$ будем обозначать замкнутую линейную оболочку последовательности $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ в банаховом пространстве X , т. е. множество всех пределов линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

§ 3. Основные результаты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что с.п. X обладает свойством (Λ_R) ($X \in (\Lambda_R)$), если на каждом его рефлексивном подпространстве сходимость по норме X эквивалентна сходимости по мере.

Как отмечено в § 1, в [3] показано, что пространство Орлича L_F принадлежит (Λ_R) , если выполняется условие (1). Существенным уточнением этого результата является следующая теорема о необходимых и достаточных условиях, при которых $L_F \in (\Lambda_R)$. Мы покажем, что пространство Орлича обладает этим свойством тогда и только тогда, когда оно в определенном смысле близко к одному из «крайних» с.п., т. е. к L_1 или L_∞ .

Теорема 1. Следующие три условия эквивалентны.

- (a) $L_F \in (\Lambda_R)$.
- (b) Для каждой функции $G \in C_F^\infty$ пространство Орлича последовательностей l_G рефлексивно.
- (c) $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = 1$ либо $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (b) $\Rightarrow$ (a) Достаточно показать, что из условия $L_F \notin (\Lambda_R)$ следует существование функции $G \in C_F^\infty$ такой, что l_G рефлексивно.

По предложению 1 из [6] если $L_F \notin (\Lambda_R)$, то существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L_F$ такая, что она почти дизъюнктна и подпространство $[u_n]$ рефлексивно. Тогда существует дизъюнктная последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset L_F$,

$\|g_n\|_{L_F} = 1$, $\|g_n - u_n\|_{L_F} \rightarrow 0$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, в силу принципа малых возмущений [2, теорема 1.3.9] можно считать, что последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ эквивалентны в L_F и, значит, подпространство $[g_n]$ тоже рефлексивно.

Пусть $A_n := \text{supp } g_n$. Поскольку $\mu(A_n) \rightarrow 0$, без ограничения общности, еще раз переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\|\chi_{A_n}\|_{L_F} \leq 2^{-n}$ и тогда $y_n := \inf\{|g_n(t)|, t \in A_n\} \rightarrow \infty$. Действительно, если $G_n := \{t \in A_n : |g_n(t)| \leq n\}$, то

$$\|g_n \chi_{G_n}\|_{L_F} \leq n 2^{-n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

т. е. если заменим g_n нулем на множестве G_n , то норма функций g_n изменится на пренебрежимо малую величину.

Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что для всех $n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^1 F\left(\frac{|g_n(t)|}{2}\right) dt \geq \delta. \quad (2)$$

Предположим противное. Пусть существует подпоследовательность $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{g_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что

$$\int_0^1 F\left(\frac{|g_{n_k}(t)|}{2}\right) dt \leq 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Тогда $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ будет эквивалентна в L_F каноническому базису c_0 . Действительно, если $(b_k)_{k=1}^\infty \in c_0$ и $\|(b_k)\|_{c_0} = 1$, то в силу (3) и попарной дизъюнктивности функций g_{n_k}

$$\begin{aligned} \int_0^1 F\left(\frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^\infty b_k g_{n_k} \right| \right) dt &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^1 F\left(\frac{1}{2} |b_k g_{n_k}| \right) dt \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty \int_0^1 F\left(\frac{|g_{n_k}(t)|}{2}\right) dt \leq \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \leq 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty b_k g_{n_k} \right\|_{L_F} \leq 2 \|(b_k)\|_{c_0}.$$

Обратно,

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty b_k g_{n_k} \right\|_{L_F} \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|b_k g_{n_k}\|_{L_F} = \|(b_k)\|_{c_0}.$$

Изоморфность $[g_{n_k}]$ пространству c_0 противоречит рефлексивности $[g_n]$. Таким образом, (2) доказано. Кроме того, из соображений компактности можно считать (переходя к подпоследовательности), что для некоторого $a \in [\delta, 1]$

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n - a| \leq 1, \quad (4)$$

где

$$a_n := \int_0^1 F\left(\frac{|g_n(t)|}{2}\right) dt.$$

Рассмотрим функции

$$H_n(x) = \frac{1}{a_n} \int_0^1 F(x|\widetilde{g}_n(t)|) dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\widetilde{g}_n := \frac{1}{2}g_n$.

Покажем, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ функция $H_n(x)$ принадлежит $C_{F, y_n/2}^\infty$. Заметим, что $H_n(1) = 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Поэтому существует разбиение $\{t_i^k\}_{i=1}^{m_k}$ отрезка $[0, 1]$ такое, что $\max_{i=1, \dots, m_k} \Delta t_i^k \rightarrow 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{m_k} F(|\widetilde{g}_n(t_i^k)|) \Delta t_i^k = 1. \quad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{1}{a_n} \int_0^1 F(x|\widetilde{g}_n(t)|) dt = \frac{1}{a_n} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_k} F(x|\widetilde{g}_n(t_i^k)|) \Delta t_i^k \\ &= \frac{1}{a_n} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{F(x|\widetilde{g}_n(t_i^k)|)}{F(|\widetilde{g}_n(t_i^k)|)} F(|\widetilde{g}_n(t_i^k)|) \Delta t_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_i^k \frac{F(x|\widetilde{g}_n(t_i^k)|)}{F(|\widetilde{g}_n(t_i^k)|)}, \end{aligned}$$

где $\lambda_i^k = \frac{1}{a_n} F(|\widetilde{g}_n(t_i^k)|) \Delta t_i^k$. Отсюда и из (5) вытекает нужное утверждение.

Так как $H_k \in C_{F, y_n/2}^\infty$, $k \geq n$, и множества $C_{F, y_n/2}^\infty$ компактны в $C[0, \frac{1}{2}]$ (см. § 2), существуют подпоследовательность $\{H_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ и функция $G \in C_F^\infty$ такие, что $H_{n_j} \rightarrow G$ в метрике пространства $C[0, \frac{1}{2}]$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$|H_{n_j}(x) - G(x)| \leq 2^{-j}, \quad 0 \leq x \leq 1/2.$$

Покажем, что канонический базис l_G эквивалентен последовательности $\{\widetilde{g}_{n_j}\}_{j=1}^\infty$.

Пусть $\|(b_j)\|_{l_G} \leq \frac{1}{2}$. Так как $l_G \subset l_\infty$, имеем $\|(b_j)\|_{l_\infty} \leq \|(b_j)\|_G$ и, значит, $|b_j| \leq \frac{1}{2}$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Тогда в силу (4) и того, что $a \in [\delta, 1]$,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F\left(\sum_{j=1}^\infty |b_j \widetilde{g}_{n_j}(t)|\right) dt = \sum_{j=1}^\infty \int_0^1 F(|b_j \widetilde{g}_{n_j}(t)|) dt \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_0^1 \frac{a_j}{a_j} F(|b_j \widetilde{g}_{n_j}(t)|) dt - \sum_{j=1}^\infty \int_0^1 \frac{a}{a_j} F(|b_j \widetilde{g}_{n_j}(t)|) dt + \sum_{j=1}^\infty \int_0^1 \frac{a}{a_j} F(|b_j \widetilde{g}_{n_j}(t)|) dt \\ &= \sum_{j=1}^\infty H_j(|b_j|)(a_j - a) + a \sum_{j=1}^\infty H_j(|b_j|) \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty H_j\left(\frac{1}{2}\right)(a_j - a) + \sum_{j=1}^\infty |H_j(|b_j|) - G(|b_j|)| + \sum_{j=1}^\infty G(|b_j|) \leq 3. \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду выпуклости функции F

$$\int_0^1 F\left(\frac{1}{3} \sum_{j=1}^\infty |b_j \widetilde{g}_{n_j}(t)|\right) dt \leq 1,$$

т. е.

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_j \widetilde{g_{n_j}} \right\|_{L_F} \leq 3.$$

Обратно, пусть

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_j} \widetilde{g_j} \right\|_{L_F} \leq \frac{1}{4}.$$

Заметим, что в силу дизъюнктности функций $\widetilde{g_{n_j}}$ для всех $j \in \mathbb{N}$ будет $\|b_j \widetilde{g_{n_j}}\|_{L_F} \leq 1/4$. Так как $\|\widetilde{g_{n_j}}\|_{L_F} = 1/2$, отсюда $|b_j| \leq 1/2$. Аналогично

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{a_j} \int_0^1 F(|b_j \widetilde{g_{n_j}}(t)|) dt - \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{a}{a_j} F(|b_j \widetilde{g_{n_j}}(t)|) dt + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{a}{a_j} F(|b_j \widetilde{g_{n_j}}(t)|) dt \\ &\geq - \sum_{j=1}^{\infty} |a_j - a| H_j \left(\frac{1}{2} \right) + a \sum_{j=1}^{\infty} H_j(|b_j|) \\ &\geq -1 - a \sum_{j=1}^{\infty} |H_j(|b_j|) - G(|b_j|)| + a \sum_{j=1}^{\infty} G(|b_j|) \geq -2 + a \sum_{j=1}^{\infty} G(|b_j|) \end{aligned}$$

и, значит, $\sum_{j=1}^{\infty} G(\frac{a}{3}|b_j|) \leq 1$ в силу выпуклости функции G , откуда $\|(b_j)\|_{l_G} \leq \frac{3}{a}$.

Итак, последовательность $\{\widetilde{g_{n_j}}\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентна стандартному базису пространства l_G , где $G \in C_F^{\infty}$. Так как подпространство $[g_{n_j}]$ рефлексивно, l_G тоже рефлексивно, что противоречит условию (b).

Для доказательства импликации (c) $\Rightarrow$ (b) понадобится

Лемма 2. Пусть M — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Если $M \in \Delta_2^0$, то существуют $r > 0$, $C_0 > 0$ и $u_0 > 0$ такие, что $u^r \leq C_0 M(u)$ для всех $0 < u < u_0$.

Доказательство. Так как $M \in \Delta_2^0$, для некоторых $r > 0$, $u_0 > 0$ и всех $0 < u < u_0$ будет $M(2u) \leq rM(u)$. Обозначим через q правую производную функции M . Тогда

$$M(u) = \int_0^u q(t) dt,$$

и так как функция q возрастает, имеем

$$rM(u) \geq M(2u) = \int_0^{2u} q(t) dt \geq \int_u^{2u} q(t) dt \geq uq(u).$$

Следовательно,

$$\frac{q(u)}{M(u)} \leq \frac{r}{u}, \quad 0 < u \leq u_0.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$\int_u^{u_0} \frac{q(t)}{M(t)} dt \leq r \int_u^{u_0} \frac{dt}{t}, \quad 0 < u \leq u_0,$$

откуда

$$\ln \frac{M(u_0)}{M(u)} \leq \ln \left(\frac{u_0}{u} \right)^r,$$

или

$$u^r \leq u_0^r M(u_0) M(u), \quad 0 < u \leq u_0.$$

Тем самым лемма доказана.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. (c) $\Rightarrow$ (b) Пусть сначала $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = \infty$. Из определения α_F^∞ получаем, что для любого $p < \infty$ существует $C_p < \infty$ такое, что $F(x)y^p \leq C_p F(xy)$, $x \geq 1$, $y \geq 2$, или, эквивалентно,

$$\frac{F(x)}{F(xy)} \leq C_p \left(\frac{1}{y} \right)^p.$$

Полагая $y = \frac{1}{t}$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$, $xy = z$, отсюда получим, что

$$\frac{F(zt)}{F(z)} \leq C_p t^p, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}, \quad zt \geq 1. \quad (6)$$

Докажем, что для любых $p > 0$, $G \in C_F^\infty$ и всех $t \in (0, \frac{1}{2}]$

$$G(t) \leq C_p t^p. \quad (7)$$

Напомним, что по лемме 1 $C_F^\infty = \overline{\text{conv } E_F^\infty}$.

Сначала предположим, что $G \in E_F^\infty$, т. е.

$$G(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(ty_n)}{F(y_n)},$$

где $y_n \uparrow \infty$. Ввиду (6) для любого $t \in (0, \frac{1}{2}]$ и для всех $n \geq n_0(t)$, где $n_0(t)$ выбирается так, что $y_n \geq 1/t$, имеем

$$\frac{F(y_n t)}{F(y_n)} \leq C_p t^p.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (7).

Пусть теперь

$$G = \sum_{i=1}^m \alpha_i G_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad G_i \in E_F^\infty.$$

По доказанному $G_i(t) \leq C_p t^p$, $i = 1, \dots, m$. Значит,

$$G(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i G_i(t) \leq C_p \sum_{i=1}^m \alpha_i t^p = C_p t^p.$$

Если $G \in C_F^\infty$, то $G(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k(t)$, где $G_k(t)$ — выпуклая комбинация функций из E_F^∞ , поэтому

$$G_k(t) \leq C_p t^p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \in (0, 1/2],$$

откуда приходим к (7).

Таким образом, по лемме 2 $G \notin \Delta_2^0$, а тогда согласно [11, предложение 4.b.2] l_G нерефлексивно. В случае $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = \infty$ импликация доказана.

Аналогичным образом рассмотрим ситуацию, когда $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = 1$. Из определения β_F^∞ следует, что

$$\inf \left\{ p : \sup_{1 \leq x, y} \frac{F(xy)}{F(x)y^p} < \infty \right\} = 1,$$

т. е. для любого $p > 1$ существует K_p такое, что для всех $x \geq 1$ и $y \geq 2$

$$F(xy) \leq K_p F(x)y^p,$$

или, эквивалентно,

$$\frac{F(x)}{F(xy)} \geq K_p^{-1} \left(\frac{1}{y} \right)^p.$$

Полагая $y = \frac{1}{t}$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$, $xy = z$, получим

$$\frac{F(zt)}{F(z)} \geq K_p^{-1} t^p, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}, \quad zt \geq 1.$$

Аналогично можно доказать, что для любых $p > 1$, $G \in C_F^\infty$ и всех $t \in (0, \frac{1}{2}]$

$$G(t) \geq K_p^{-1} t^p. \quad (8)$$

Заметим, что в C_F^∞ существуют функции $G(t) \asymp t$. Но тогда $l_G \approx l_1$ и, следовательно, l_G — нерефлексивное пространство. Рассмотрим все оставшиеся функции из C_F^∞ . Покажем, что дополнительная функция к всякой функции из C_F^∞ не удовлетворяет Δ_2^0 -условию. Предположим противное. Пусть $G \in C_F^\infty$, а дополнительная к G функция $\tilde{G}$ принадлежит Δ_2^0 . По теореме 11.7 из [13] получаем, что $\beta_{\tilde{G}}^0 < \infty$. Так как согласно [13, следствие 11.6]

$$\frac{1}{\alpha_G^0} + \frac{1}{\beta_{\tilde{G}}^0} = 1,$$

отсюда $\alpha_G^0 > 1$. Следовательно, существует $q \in (1, \alpha_G^0)$ такое, что

$$\sup_{0 < s, t \leq 1} \frac{G(st)}{G(s)t^q} < \infty.$$

В частности,

$$G(t) \leq C t^q, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2},$$

для некоторого $C > 0$. Но тогда, применив (8) при $p \in (1, q)$, получим

$$t^p \leq K_p C t^q, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2};$$

противоречие. Значит, предположение о том, что $\tilde{G}$ удовлетворяет условию Δ_2^0 , неверно. Ввиду [11, предложение 4.b.2] l_G — нерефлексивное пространство. Импликация (c) $\Rightarrow$ (b) доказана.

(a) $\Rightarrow$ (c) Если (c) не выполняется, то существует $p \in [\alpha_F^\infty, \beta_F^\infty] \cap (1, \infty)$. Применяя для такого p последовательно [7, теорема 1] и [7, предложение 3], найдем последовательность дизъюнктивных функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset L_F$ такую, что $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ эквивалентна стандартному базису l_p . Таким образом, подпространство $[u_k]$ рефлексивно. По предложению 1 из [6] $L_F \notin (\Lambda_R)$, что противоречит условию. $\square$

ПРИМЕР 1. Пусть $F(t) = e^t - 1$. Тогда $\tilde{F}(t) = t \ln t - t + 1$. Легко видеть, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{F}(ct)}{\tilde{F}(t)} = c$$

для каждого $c > 1$, т. е. условие (1) не выполняется и в этом случае теорема из работы [3] неприменима. В то же время можно показать, что $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = \infty$. Действительно, так как $1 \leq \alpha_F^\infty \leq \beta_F^\infty$, достаточно проверить, что $\alpha_F^\infty = \infty$. Из определения индексов Орлича — Матушевской вытекает, что функции, эквивалентные при больших значениях аргумента, имеют одинаковые индексы (или см. [13, теорема 11.4]). Поэтому вместо F будем рассматривать эквивалентную ей при больших значениях аргумента функцию $F_0(t) = e^t$. Нужно показать, что для любого $p \geq 1$ существует $C_p > 0$ такое, что для всех $x, y \geq 1$ выполняется $y^p \leq C_p e^{x(y-1)}$ или $y^p \leq C_p e^{(y-1)}$. Очевидно, такое C_p существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1.
2. Albiac F., Kalton N. J. Topics in Banach space theory. New York: Springer-Verl., 2006.
3. Lavergne E. Reflexive subspaces of some Orlicz spaces // Colloq. Math. 2008. V. 113, N 2. P. 333–340.
4. Alexopoulos J. De la Vallée Poussin's theorem and weakly compact sets in Orlicz spaces // Quaest. Math. 1994. V. 17, N 2. P. 231–248.
5. Astashkin S. V., Kalton N. J., Sukochev F. A. Cesàro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces // Positivity. 2008. V. 12, N 3. P. 387–406.
6. Асташкин С. В., Страхов С. И. О симметричных пространствах со сходимостью по мере на рефлексивных подпространствах // Изв. вузов. Математика. 2018. № 8. С. 3–11.
7. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces. III // Israel J. Math. 1973. V. 14, N 4. P. 368–389.
8. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
9. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. II. Function spaces. Berlin; New York: Springer-Verl., 1979.
10. Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
11. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I. Sequence spaces. Berlin; New York: Springer-Verl., 1977.
12. Kaminska A., Raynaud Y. Isomorphic l_p -subspaces in Orlicz–Lorentz sequence spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2006. V. 134, N 8. P. 2317–2327.
13. Maligranda L. Orlicz spaces and interpolation. Campinas: Univ. Campinas, 1989.

Поступила в редакцию 9 октября 2018 г.

После доработки 6 февраля 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Страхов Степан Игоревич
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
www.stepan121@mail.ru