N. A. Tyurin, The moduli space of D -exact Lagrangian submanifolds, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 907–921

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.416>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.217.227

April 26, 2023, 10:11:33

МНОГООБРАЗИЕ МОДУЛЕЙ D -ТОЧНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Н. А. Тюрин

Аннотация. Исследуется лагранжева геометрия алгебраических многообразий. Для произвольного гладкого компактного односвязного алгебраического многообразия строится семейство конечномерных гладких кэлеровых многообразий, элементы которого представляются классами эквивалентных лагранжевых подмногообразий, удовлетворяющих вводимому нами условию D -точности. В связи с теорией вейнштейновых структур такие многообразия оказываются связанными со специальной бор-зоммерфельдовой геометрией, построенной автором в предыдущих работах. Это позволяет выделить некоторые стабильные компоненты в предлагаемых многообразиях модулей и выдвинуть гипотезу о том, что такие стабильные компоненты не только кэлеровы, но и алгебраичны.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.416

Ключевые слова: симплектическое многообразие, данные предквантования, условие Бора — Зоммерфельда, специальные бор-зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия, точные лагранжевы подмногообразия, многообразия модулей.

Каждое компактное алгебраическое многообразие X над полем комплексных чисел может рассматриваться как вещественное симплектическое многообразие. В самом деле, по определению такое X может быть вложено в проективное пространство $\mathbb{CP}^N$ подходящей размерности, и тогда, ограничивая стандартную кэлерову форму метрики Фубини — Штуди на образ вложения, получаем вещественную симплектическую структуру на X . Такая симплектическая форма по построению является целочисленной, т. е. ее класс когомологий лежит в решетке $H^2(X, \mathbb{Z})$. С другой стороны, таких целочисленных симплектических форм на X очень много; из них согласованные с комплексной структурой I соответствуют обильным дивизорам по модулю некоторой эквивалентности, которая в случае односвязного X выглядит очень просто:

$$\omega_1 \simeq \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 + dIdf = \omega_2 + 2i\bar{\partial}\partial f$$

для некоторой вещественной функции f . Напомним, что дивизор $D \subset X$ называется *обильным*, если некоторая тензорная степень L_D^k соответствующего ему линейного расслоения $L_D \rightarrow X$ обладает большим пространством голоморфных сечений $H^0(X, L_D^k)$, достаточным для вложения X в проективное пространство $\mathbb{P}H^0(X, L_D^k)^\vee$ полным линейным рядом (см. [1]). Для линейного расслоения L_D существует такая эрмитова структура h , что для любого голоморфного сечения $\alpha_D \in H^0(X, L_D)$ вещественная функция $\psi_D = -\ln |\alpha_D|_h$ является кэлеровым потенциалом на дополнении $X \setminus D$, т. е. форма $\omega_D = dId\psi_D$ является симплектической формой на дополнении, причем для любой пары сечений

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ (Договор № 14.641.31.0001).

$\alpha_{D_1}, \alpha_{D_2} \in H^0(X, L_D)$ с дивизорами нулей D_1, D_2 формы ω_{D_i} тождественно совпадают на дополнении $X \setminus \{D_1 \cup D_2\}$. Эрмитова структура h индуцирует соответствующую эрмитову структуру на L_D^k , и условие достаточности пространства голоморфных сечений для вложения полным линейным рядом влечет полноту покрытия X дополнениями, в которых определена симплектическая форма $k\omega$. Поскольку по построению класс когомологий этой формы совпадает с первым классом Черна $c_1(L_D^k) = kc_1(L_D)$, построенная форма представляется в таком виде, где ω — целочисленная симплектическая форма. Отсюда для любого *обильного* дивизора D существует целочисленная симплектическая форма ω , причем класс когомологий $[\omega]$ совпадает с $\text{P.D.}[D]$. Как мы видели, выбор этой формы в фиксированном классе зависит только от выбора подходящей эрмитовой структуры h на L_D , что и зафиксируем в обозначении ω_h .

Итак, пусть (X, D) — произвольное гладкое компактное односвязное алгебраическое многообразие комплексной размерности n с обильным дивизором. Зафиксируем подходящую эрмитову структуру h на линейном расслоении L_D и построим соответствующую симплектическую форму ω_h . Напомним, что вещественное подмногообразие $S \subset X$ называется *лагранжевым* относительно ω_h если $\dim S = n$ и $\omega_h|_S \equiv 0$. На протяжении данной работы рассматриваем только компактные гладкие ориентируемые лагранжевы подмногообразия. Назовем лагранжево подмногообразие *D-точным относительно дивизора* $D \subset X$, если $S \cap D = \emptyset$ и для любой петли $\gamma \subset S$ и общего ограничиваемого ею диска $B_2 \subset X$ имеем $\text{ind}(B_2 \cap D) = \int_{B_2} \omega_h$ (подробное определение см. ниже в § 2). На простран-

стве D -точных относительно фиксированного D лагранжевых подмногообразий естественно действует группа гамильтоновых изотопий $\text{HamIso}(X \setminus D)$. Фактор-пространство по этому действию оказывается дискретным множеством; варьируя дивизор D в полном линейном ряду $|L_D| = \mathbb{P}H^0(X, L_D)$, получаем накрытие $\mathcal{M}_{SBS}^h \rightarrow |L_D|$ некоторого открытого подмножества в проективном пространстве $|L_D|$, слоями которого являются построенные выше фактор-пространства. Структура накрытия позволяет построить гладкую структуру на всем $\mathcal{M}_{SBS}^h$ и поднять на него стандартную кэлерову структуру Фубини — Штуди с проективного пространства. Назовем $\mathcal{M}_{SBS}^h$ *многообразием модулей D-точных лагранжевых подмногообразий*. По построению оно зависит только от класса дивизора D и эрмитовой структуры h . Однако нетрудно показать, что геометрия (но не кэлерова структура!) $\mathcal{M}_{SBS}^h$ не зависит от выбора h : при малой вариации h имеется естественный изоморфизм соответствующих многообразий модулей, а так как пространство подходящих эрмитовых структур — бесконечномерный выпуклый шар, то можно говорить о зависимости геометрии $\mathcal{M}_{SBS}$ только от класса дивизора D и обозначать через $\mathcal{M}_{SBS}(c_1(L_D))$.

Многообразие модулей $\mathcal{M}_{SBS}(c_1(L_D))$ распадается на множество связных компонент: ниже показано, что каждая связная компонента содержит классы лагранжевых подмногообразий, гамильтоново эквивалентных на всем X . Предварительное разбиение проводится по топологическому типу лагранжевых подмногообразий: классу гомотопий $[S] \in H_n(X, \mathbb{Z})$ и классу диффеоморфизма самого S . Таким образом, подмногообразие модулей $\mathcal{M}_{SBS}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$ состоит уже из меньшего числа компонент связности, различаемых классами гамильтоновой эквивалентности лагранжевых подмногообразий гладкого типа $\text{Diff } S$, представляющих один и тот же класс гомотопий. При этом каждая компонента остается накрытием некоторого открытого подмножества проективного

пространства $|L_D|$.

Наша главная задача в перспективе исследований — найти алгебраические компоненты в $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$. Просто выбор топологических данных в общем случае не приводит к конечности накрытия, например, если для данного топологического типа существует бесконечное количество гамильтоново неэквивалентных лагранжевых реализаций. Однако для выделения конечных накрытий можно воспользоваться связью нашей конструкции с теорией вейнштейновых многообразий: в нашем случае для пары X, D и подходящей эрмитовой структуры h определено подмножество $W^h(D) \subset X \setminus D$, называемое вейнштейновым скелетом (подробное определение см. в §1). В общем случае это подмножество имеет сложные особенности, будучи CW комплексом, однако всегда обладает следующими свойствами: подмножество $W^h(D)$ гомотопно $X \setminus D$, в гладкой точке $W^h(D)$ изотропно. Из второго следует, что любая гладкая компонента $W^h(D)$ — изотропное подмногообразие, а из первого — что любой n -мерный цикл $W^h(D)$ должен соответствовать n -мерному классу гомотопий в $X \setminus D$. Отсюда видно, что имеется естественный способ выделения некоторой компоненты из $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$: для фиксированного $D \in |L_D|$ рассмотрим только те D -точные лагранжевы подмногообразия, которые являются бор-зоммерфельдовыми разрешениями примитивных n -циклов из $H_n(W_D^h)$ (подробное определение в §4). Выделяемое таким образом подмножество $\mathcal{M}_{SBS}^{st}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$ гораздо меньше и «регулярнее» всего многообразия модулей. Наша главная гипотеза для будущей работы: такое $\mathcal{M}_{SBS}^{st}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$ является аффинным алгебраическим многообразием.

Работа построена следующим образом. В §1 объясняется аббревиатура SBS, используемая для обозначения нашего многообразия модулей. В §2 дано определение D -точности и показано, что оно эквивалентно условию точности относительно вейнштейновой структуры. В §3 введено многообразие модулей D -точных лагранжевых подмногообразий и доказана его гладкость, а также приведены простейшие примеры. В §4 введено определение бор-зоммерфельдовых разрешений и сформулированы задачи на перспективу.

§ 1. Специальная бор-зоммерфельдова геометрия и вейнштейновы структуры

Предлагаемые ниже в этой работе многообразия модулей D -точных лагранжевых подмногообразий появились в качестве «антитезиса» к конечномерным объектам, возникшим в рамках специальной геометрии Бора — Зоммерфельда, построенной в [2]. Кратко напомним основные моменты этой теории.

Пусть (M, ω) — вещественное компактное односвязное симплектическое многообразие с целочисленной симплектической формой. Выбирая данные предквантования (L, a) и выделяя этим из пространства всех лагранжевых подмногообразий фиксированного топологического типа те лагранжевы подмногообразия, которые удовлетворяют условию Бора — Зоммерфельда, можно построить некоторое универсальное подмножество $\mathcal{U}_{SBS} \subset \mathcal{B}_S \times \mathbb{P}\Gamma(M, L)$, определяемое условием специальности бор-зоммерфельдова (SBS для краткости) лагранжева подмногообразия $S \subset \mathcal{B}_S$ относительно класса гладкого сечения $\alpha \in \Gamma(M, L)$ (подробности см. в [2]). Вторая каноническая проекция $p_2 : \mathcal{U}_{SBS} \rightarrow \mathbb{P}\Gamma(M, L)$ обладает дискретными слоями над образом — открытым подмножеством в проективном пространстве $\mathbb{P}\Gamma(M, L)$. Поэтому если имеется некоторое конечномерное подпространство $N \subset \mathbb{P}\Gamma(M, L)$, то, ограничиваясь прообразом этого

конечномерного подпространства $p_2^{-1}(N) \subset \mathcal{U}_{SBS}$, получаем конечномерный объект.

Естественные подпространства в бесконечномерном проективном пространстве $\mathbb{P}\Gamma(M, L)$ возникают в случае существования на M интегрируемых комплексных структур, согласованных с симплектической формой ω . Тогда в присутствии выбранной комплексной структуры I связность предквантования a задает на расслоении L структуру голоморфного расслоения, пространство голоморфных сечений которого $H^0(M_I, L) \subset \Gamma(M, L)$ конечномерно. Вместе комплексная структура I и целочисленная симплектическая структура ω задают на M структуру алгебраического многообразия с обильным дивизором, соответствующим расслоению L . С другой стороны, компактное гладкое алгебраическое многообразие X с обильным дивизором D может быть рассмотрено именно как такое M со всеми необходимыми структурами, что приводит к определению конечномерного объекта $p_2^{-1}(H^0(M_I, L)) \subset \mathcal{U}_{SBS}$. Как показано в [2], в простейших случаях подмножество $p_2^{-1}(H^0(M_I, L))$ является гладким кэлеровым многообразием, так что задача, сформулированная во введении, кажется решенной. Однако этот «тезис» опровергается тесной связью SBS-геометрии с теорией многообразий Вейнштейна: в общем случае для произвольного голоморфного сечения $\alpha \in H^0(M_I, L)$ не существует гладкого бор-зоммерфельдова лагранжева подмногообразия, специального относительно класса этого сечения. А именно, в [3] SBS-условие относительно голоморфного сечения $\alpha \in H^0(M_I, L)$ переформулируется так: S должно содержаться в вейнштейновом скелете¹⁾ $W^h(D) \subset M \setminus D$, где D — дивизор нулей сечения α . Однако даже в самых простейших случаях вейнштейнов скелет дополнения $M \setminus D$ не содержит гладких компонент (см. [4]), поэтому наш «тезис» не дает разумного результата. Предлагаемое ниже многообразие модулей D -точных лагранжевых подмногообразий выступает разумным «антитезисом».

Напомним коротко основные определения и конструкции теории вейнштейновых структур в рамках интересующего нас случая компактного гладкого односвязного целочисленного симплектического многообразия (M, ω) с данными предквантования (L, a) (общие определения и подробности см. в [4, 5]). Подчеркнем, что мы рассматриваем простейшую ситуацию, когда открытое симплектическое многообразие получается вырезанием подмногообразия; случай общего многообразия Вейнштейна гораздо более сложный.

Каждое гладкое сечение $\alpha \in \Gamma(M, L)$ задает пару $(\psi_\alpha, \rho(\alpha))$ на дополнении $M \setminus D_\alpha$, где D_α — множество нулей сечения, $\psi_\alpha = -\ln |\alpha|_h$ — вещественная функция, $\rho(\alpha) = \text{Im} \frac{\nabla_a \alpha}{\alpha}$ — вещественная 1-форма, дифференциал которой равен ω . Вместе с ним определено лиувиллево векторное поле $\lambda_\alpha = \omega^{-1}(\rho(\alpha))$. Если это векторное поле является градиентоподобным для функции ψ_α , то говорят, что пара $(\psi_\alpha, \rho(\alpha))$ задает вейнштейнову структуру на многообразии $M \setminus D_\alpha$. Например, если найдется такая согласованная с ω почти комплексная структура J на M , что сечение α псевдоголоморфно относительно J , то поле λ_α является просто градиентным векторным полем функции ψ_α относительно соответствующей паре (ω, J) римановой метрики. Тем более это выполнено для голоморфных сечений L в присутствии согласованной с ω интегрируемой комплексной структурой I . В последних случаях имеем $\rho(\alpha) = \text{Id} \psi_\alpha$.

Пусть пара $(\psi_\alpha, \rho(\alpha))$ задает вейнштейнову структуру на $M \setminus D_\alpha$. Рассмотрим объединение конечных критических точек функции ψ_α и конечных траек-

¹⁾В [3] подмножество $W^h(D)$ называется базисным множеством.

торий градиентоподобного потока, индуцируемого лиувиллевым полем λ_α . Это подмножество W^h называется *вейнштейновым скелетом* многообразия Вейнштейна $M \setminus D_\alpha$ с вейнштейновой структурой $(\psi_\alpha, \rho(\alpha))$. По построению W^h является CW-комплексом, главные свойства которого следующие: дополнение $M \setminus D_\alpha$ гомотопически эквивалентно W^h , в гладкой точке W^h изотропно.

Если α — голоморфное сечение расслоения $L \rightarrow M$, то в присутствии интегрируемой комплексной структуры I элементы пары $(\psi_\alpha, \rho(\alpha))$ связаны соотношением $\rho(\alpha) = Id\psi_\alpha$ и лиувиллево поле λ_α просто градиентное поле функции ψ_α . Поскольку в этом случае ψ_α есть кэлеров потенциал на дополнении $M \setminus D_\alpha$, свойства вейнштейнова скелета следуют из обычных свойств плюрисубгармонических функций, что использовалось еще Андреотти и Франкелем при доказательстве теоремы Лефшеца о гиперплоском сечении (см. [6]).

Таким образом, построение SBS-лагранжевых подмногообразий относительно голоморфных сечений проводится по простому сценарию: по голоморфному сечению $\alpha \in H^0(M_I, L)$ строим кэлеров потенциал ψ_α , находим конечные критические точки и соединяющие их конечные траектории градиентного потока функции ψ_α и в получаемом объединении остается найти гладкие лагранжевы компоненты. Однако оказывается, что такие гладкие компоненты имеются только в простейших случаях (см. [4]). В качестве очень простого примера приведем случай $M_I = \mathbb{CP}^1$ с расслоением предквантования $L = \mathcal{O}(3)$. Даже очень простое «симметричное» сечение, задаваемое однородным полиномом $P_3(z_0, z_1) = z_0^3 - z_1^3$ в однородных координатах $[z_0 : z_1]$, индуцирует кэлеров потенциал такой, что вейнштейнов скелет W^h составлен из трех вершин и трех отрезков, соединяющих эти вершины и сходящихся в этих вершинах под одним и тем же углом $\frac{2\pi}{3}$. Таким образом, не существует ни одного гладкого лагранжева подмногообразия (в данном случае петли), содержащегося в W^h . Однако если разрешить петли с простыми особенностями, то получим «стабильный» ответ — три. Таким образом, если разрешить лагранжевы подмногообразия с особенностями, то это позволит обойти возникшую проблему, но не приведет к разному результату. В итоге придем просто к подсчету ранга группы $H_n(M_I \setminus D_\alpha, \mathbb{Z})$, потеряв по дороге всю лагранжеву геометрию.

Теория вейнштейновых структур подсказывает возможный антитезис прямой конструкции работы [3], а именно вместо регулярных лагранжевых подмногообразий (т. е. таких $S \subset M$, что $\rho(\alpha)|_S \equiv 0$, что в точности совпадает для компактных лагранжевых с условием $S \subset W^h$) можно рассмотреть точные лагранжевы подмногообразия, т. е. такие, что $\rho(\alpha)|_S$ — точная форма. Теория вейнштейновых структур предполагает наличие некоторой связи (см. [4, проблема 1.6]), при этом ниже мы обходим известные гипотезы о точных гладких лагранжевых подмногообразиях на дополнении к обильному дивизору, учитывая в определениях соответствующие условия (например, нетривиальности класса гомотопий гладкого точного лагранжева подмногообразия в $H_n(M \setminus D_\alpha, \mathbb{Z})$).

§ 2. D -точность лагранжевых подмногообразий

Начнем с наиболее общего случая.

Пусть (M, ω) — гладкое компактное односвязное целочисленное симплектическое многообразие размерности $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$. Пусть $D_0 \subset M$ — произвольное $(2n - 2)$ -мерное ориентируемое подмногообразие (возможно, с особенностями), класс гомотопий которого двойствен по Пуанкаре $[\omega]$. Тогда для любого гладкого ориентируемого лагранжева подмногообразия $S \subset M \setminus D_0$ введем следующие

определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0. S удовлетворяет условию Бора — Зоммерфельда, если для любой петли $\gamma \subset S$ симплектическая площадь ограничиваемого ею диска $B_2 \subset M$ целочисленна: $\int_{B_2} \omega \in \mathbb{Z}$.

Если это выполнено, то оказывается можно ввести класс 1-мерных когомологий $\rho(D_0) \in H^1(S, \mathbb{Z})$ по следующему правилу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для любой ориентированной петли γ в бор-зоммерфельдовом лагранжевом подмногообразии $S \subset M \setminus D_0$, представляющей класс $[\gamma] \in H_1(S, \mathbb{Z})$, и любого ограничиваемого ею диска $B_2 \subset M$ определим

$$\langle \rho(D_0), [\gamma] \rangle = \int_{B_2} \omega - \text{ind}(B_2 \cap D_0) \in \mathbb{Z}$$

как разность симплектической площади диска B_2 и топологического индекса пересечения B_2 с D_0 .

Уточним определение: обе части последнего выражения предполагают выбор ориентаций на B_2 и D_0 . Ориентации на объемлющем многообразии M и на D_0 задаются ω и условием $[\omega] = \text{P.D.}[D_0]$ (подчеркнем, что в нашем случае этот класс всегда нетривиален), а ориентация B_2 канонически задается ориентацией петли γ .

Проверим корректность определения 1. Пусть для фиксированной петли $\gamma \subset S$ имеем два диска B_2, B'_2 , ограничиваемых γ . Тогда составим сферу $S^2 = B_2 \cup \overline{B'_2}$, выбрав подходящие ориентации на дисках, для которой по двойственности Пуанкаре имеем $\text{ind}(S^2 \cap D_0) = \int_{S^2} \omega$. Отсюда следует, что

$$\left(\int_{B_2} \omega - \text{ind}(B_2 \cap D_0) \right) - \left(\int_{B'_2} \omega - \text{ind}(B'_2 \cap D_0) \right) = \int_{S^2} \omega - \text{ind}(S^2 \cap D_0) = 0.$$

Корректность определения 1 с точки зрения выбора разных представителей γ, γ' одного и того же класса очевидна ввиду лагранжевости S и тривиальности пересечения $S \cap D_0$.

Подчеркнем, что определение класса $\rho(D_0)$ не требует введения никаких дополнительных данных, кроме самого подмногообразия D_0 . Поэтому ниже будем для краткости опускать «относительно D_0 », говоря о D -точных лагранжевых подмногообразиях в $M \setminus D_0$.

В присутствии класса $\rho(D_0)$ естественно ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие S называется D -точным относительно D_0 , если $\rho(D_0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определения 1 и 2 могут быть перенесены и на случай, когда пересечение $S \cap D_0$ не тривиально, но трансверсально, т. е. $\dim(S \cap D_0) = n - 2$. При этом класс $\rho(D_0)$ определен в $H^1(S \setminus (S \cap D_0), \mathbb{Z})$ для петель $\gamma \subset S \setminus (S \cap D_0)$ тем же выбором ограничиваемого диска B_2 и вычислением того же выражения, что и выше. Тогда для определения D -точности требуется зануление этого класса. Так как класс трансверсального пересечения $[S \cap D_0] \in H_{n-2}(S, \mathbb{Z})$ тривиален, такое определение корректно и топологических препятствий к существованию таких D -точных лагранжевых подмногообразий не имеется. Однако ниже будем работать только со случаем $S \cap D_0 = \emptyset$.

Прежде всего покажем, как связаны определения D -точного и точного лагранжева подмногообразия в теории многообразий Вейнштейна.

Утверждение 1. Пусть вейнштейнова структура $(\psi_\alpha, \rho(\alpha))$ на дополнении $M \setminus D_\alpha$ задается гладким сечением $\alpha \in \Gamma(M, L)$ с множеством нулей $D_\alpha = \{\alpha = 0\}$ размерности $2n-2$. Тогда бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие $S \subset M \setminus D_\alpha$ является точным, если и только если оно D -точно относительно D_α .

В самом деле, ограничение формы $\rho(\alpha)$ на S точное, если и только если для любой петли $\gamma \subset S$ имеем $\int_\gamma \rho(\alpha) = 0$, т. е. необходимо показать, что $\int_\gamma \rho(\alpha) = 0$ для произвольной петли $\gamma \subset S$, если и только если найдется диск $B_2 \subset M$, ограничиваемый γ , такой, что

$$\int_{B_2} \omega - \text{ind}(B_2 \cap D_0) = 0.$$

Рассмотрим произвольную петлю $\gamma \subset S$ и достаточно общий диск $B_2 \subset M$. Ограничим на диск B_2 расслоение L , связность a и сечение α . Так как S — бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие, на $L|_\gamma$ имеется ковариантно постоянное сечение σ_γ и значение интеграла $\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \rho(\alpha)$ в точности равно степени отображения $\frac{\alpha|_\gamma}{\sigma_\gamma} : \gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ (см. [2]). С другой стороны, диск B_2 стягиваем, поэтому на ограничении L_{B_2} можно выбрать сечение без нулей σ_0 ; отображение $\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_0|_\gamma} : \gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ имеет степень, равную

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B_2} F_a = \int_{B_2} \omega.$$

Наконец, отображение $\frac{\alpha|_\gamma}{\sigma_0|_\gamma} : \gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ имеет степень $\text{ind}(B_2 \cap D_\alpha)$, поскольку это пересечение есть в точности нули α на B_2 с соответствующими знаками. Собирая эти степени в одну формулу, получаем соотношение

$$\int_\gamma \rho(\alpha) + \text{ind}(B_2 \cap D_\alpha) = \int_{B_2} \omega,$$

откуда зануление первого интеграла влечет зануление значения класса $\rho(D_\alpha)$, и наоборот.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сначала условие D -точности, введенное выше, было названо автором условием D -монотонности по следующей причине. Пусть симплектическое многообразие (M, ω) монотонно, т. е. расслоение L — антиканоническое расслоение. Тогда если лагранжево подмногообразие S является D -точным относительно некоторого подмногообразия D_0 такого, что $\text{P.D.}[D_0] = c_1(M, \omega)$, то S является монотонным лагранжевым подмногообразием. Однако вследствие приложимости понятия не только к случаю монотонных симплектических многообразий название было изменено.

Главное свойство D -точности — стабильность относительно деформаций D_0 и гамильтоновых деформаций S . При этом называем деформацию *допустимой*, если в результате такой деформации пересечение $S \cap D_0$ остается пустым.

Утверждение 2. Пусть D_t , $t \in [0, 1]$, — гомотопия в $M \setminus S$. Если S является D -точным относительно D_0 , то S является D -точным относительно любого D_t .

Доказательство очевидно: топологический индекс пересечения $\text{ind}(B_2 \cap D_t)$ не зависит от t для любого диска B_2 , тем более от t не зависит $\int_{B_2} \omega$.

Утверждение 3. Пусть S_t , $t \in [0, 1]$, — гамильтонова изотопия бор-зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий в $M \setminus D_0$. Если S_0 является D -точным относительно D_0 , то D -точным относительно D_0 является каждый S_t .

Для доказательства достаточно напомнить, что симплектические площади являются инвариантом гамильтоновых деформаций. Таким образом, для любой гамильтоновой деформации $\phi_H^t(\gamma_0) \subset M \setminus D_0$ симплектическая площадь $\phi_H^t(B_2)$ остается одной и той же для любого t , и то же верно для $\text{ind}(\phi_H^t(B_2) \cap D_0)$.

На множестве всех D -точных лагранжевых подмногообразий $S \subset M \setminus D_0$ естественно действует группа гамильтоновых изотопий $\text{HamIso}(M \setminus D_0)$, и необходимо локально исследовать это действие. Для этого понадобится геометрия Бора — Зоммерфельда, построенная в [7].

Любое D -точное относительно D_0 лагранжево подмногообразие S бор-зоммерфельдово; нетрудно видеть, что для любого такого $S_0 \subset M \setminus D_0$ существует достаточно малая окрестность Дарбу — Вейнштейна $\mathcal{O}_{DW}(S_0)$, не пересекающаяся с D_0 . Тогда если $S_1 \subset \mathcal{O}_{DW}(S_0)$ — любое другое бор-зоммерфельдово лагранжево подмногообразие, гомотопное S_0 , то S_1 гамильтоново изотопно S_0 , причем очевидным образом такая гамильтонова изотопия естественно продолжается до некоторого элемента из $\text{HamIso}(M \setminus D_0)$. Далее, в [8] показано, что любое гладкое точное лагранжево подмногообразие в кокасательном расслоении T^*S гладко гомотопно S . Отсюда получаем

Утверждение 4. В достаточно малой окрестности Дарбу — Вейнштейна $\mathcal{O}_{DW}(S_0)$ гладкого D -точного лагранжево подмногообразия S_0 любое другое гладкое D -точное лагранжево подмногообразие гамильтоново изотопно S_0 .

В качестве следствия из этого утверждения вытекает

Теорема 1. Пусть $D_0 \subset M$ — ориентируемое подмногообразие, представляющее класс $\text{P.D.}[\omega] \in H_{2n-2}(M, \mathbb{Z})$. Тогда фактор-пространство $\mathcal{N}_{D_0}$ гладких D -точных лагранжевых подмногообразий в $M \setminus D_0$ по действию группы $\text{HamIso}(M \setminus D_0)$ дискретно, т. е. не имеет непрерывных компонент.

Здесь дискретность понимается в следующем смысле: на многообразии модулей бор-зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий $\mathcal{B}_S$ имеется естественная топология окрестностей Дарбу — Вейнштейна (см. [7]). Каждая линейно связная компонента этого многообразия модулей состоит из гамильтоново изотопных подмногообразий (относительно глобальных гамильтоновых изотопий на всем M). Подмногообразие D_0 разбивает каждую линейно связную компоненту $\mathcal{B}_S$ на линейно связные «камеры», содержащиеся в них бор-зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия не пересекаются с D_0 . Некоторые камеры состоят из D -точных относительно D_0 лагранжевых подмногообразий. Именно множество таких камер представляет фактор-пространство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Элиашберг выдвинул ряд замечательных гипотез о гладких точных лагранжевых подмногообразиях в многообразии Вейнштейна. А именно, каждое гладкое точное лагранжево подмногообразие представляет нетривиальный класс гомологий из $H_n(M \setminus D_0, \mathbb{Z})$, причем для фиксированного класса это

представление единственно с точностью до гамильтоновых изотопий открытого симплектического многообразия $M \setminus D_0$. В свете этих гипотез построенное нами фактор-пространство в точности изоморфно набору из тех примитивных классов в $H_n(M \setminus D_0, \mathbb{Z})$, которые реализуются гладкими точными (или D -точными) лагранжевыми подмногообразиями.

§ 3. Многообразие модулей

Воспользуемся теперь построенным выше фактор-пространством $\mathcal{N}_{D_0}$ для определения следующего конечномерного объекта.

Пусть X — гладкое компактное односвязное алгебраическое многообразие с обильным линейным расслоением $L_D \rightarrow X$. Выбор подходящей эрмитовой структуры h на L_D порождает соответствующую симплектическую форму ω_h , так что $[\omega_h] = c_1(L_D)$. Вместе с тем определено проективное пространство $|L_D| = \mathbb{P}H^0(X, L_D)$, называемое полным линейным рядом (см. [1]), на котором зафиксирована кэлерова структура ходжева типа выбором той же эрмитовой структуры. Каждый элемент $D_p \in |L_D|$ представляется комплексным подмногообразием (возможно, с особенностями) коразмерности 1, представляющим один и тот же класс гомологий $P.D.[\omega]$.

Рассмотрим «накрытие» проективного пространства $|L_D|$ следующим множеством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D))$ составлено из пар $(\langle S_i \rangle, D_p)$, где $\langle S_i \rangle \in \mathcal{N}_{D_p}$ — класс гладких D -точных относительно D_p ориентируемых лагранжевых подмногообразий, эквивалентных по модулю $\text{HamIso}(X \setminus D_p)$.

Вследствие теоремы 1 забывающее второй элемент пары отображение

$$\pi : \widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D)) \rightarrow |L_D|$$

имеет дискретные слои, поэтому, допуская вольность речи, называем его накрытием, хотя на самом деле это накрытие открытой части проективного пространства $|L_D|$.

Основной результат заключается в следующем утверждении.

Теорема 2. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D))$ является гладким открытым многообразием, на которое естественным образом может быть поднята стандартная кэлерова структура.

Будем называть это множество *многообразием модулей D -точных лагранжевых подмногообразий*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Опишем гладкую структуру на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D))$, построив на нем систему окрестностей и описав функции перехода от одной окрестности к другой.

Рассмотрим произвольную точку $(\langle S_0 \rangle, D_0) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D))$, реализуемую некоторым гладким D -точным относительно D_0 лагранжевым подмногообразием $S_0 \subset X \setminus D_0$. Подчеркнем, что в этом рассуждении D_0 — абсолютно произвольный дивизор. Поскольку S_0 не пересекается с D_0 и оба многообразия компактны, в $|L_D|$ найдется малая стандартная окрестность $\mathcal{O}(D_0)$ такая, что любой дивизор $D_p \in \mathcal{O}(D_0)$ не пересекается с S_0 . Тогда из утверждения 2 следует, что S_0 одновременно D -точен относительно каждого такого D_p . Таким образом определена окрестность $\widetilde{\mathcal{O}}(\langle S_0 \rangle, D_0)$ как множество пар $(\langle S_0 \rangle, D_p)$ (здесь для

краткости обозначаем классы $\langle S_0 \rangle$ по действию разных групп $\text{HamIso}(X \setminus D_p)$ одним и тем же символом, поскольку смысл ясен из контекста).

Функции перехода определяются для достаточно размельченного покрытия такими окрестностями всего проективного пространства $|L_D|$ так, что пересечение $\tilde{\mathcal{O}}(D_1) \cap \tilde{\mathcal{O}}(D_2)$ содержит классы $\langle S_0 \rangle$, представляемые одним и тем же лагранжевым подмногообразием S_0 , D -точным относительно всех D_p из пересечения $\mathcal{O}(D_1) \cap \mathcal{O}(D_2)$. Тем самым дифференциал проекции $\pi : \widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D)) \rightarrow |L_D|$ представляется отображением, тривиальным на первой (лагранжевой) компоненте и тождественным на второй (дивизорной). Стало быть, дифференциал в каждой точке является изоморфизмом, откуда следует возможность подъема кэлеровой структуры на $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D))$.

Интересный эффект влечет открытость многообразия модулей: отсутствие ветвления в накрытии π . В самом деле, предположим, что имеется точка ветвления $(\langle S_0 \rangle, D_0) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D))$, т. е. точка, в которой сходятся две ветви. Это может быть выражено так: найдутся семейства $\{(\langle S_t^1 \rangle, D_t)\}, \{(\langle S_t^2 \rangle, D_t)\}$ над локальным возмущением D_t дивизора D_0 такие, что в пределе S_t^1 и S_t^2 дают один и тот же класс S_0 . Но это значит, что гладкие представители S_t^1, S_t^2 при достаточно малых t очень близки друг к другу в смысле топологии Дарбу — Вейнштейна, т. е. в какой-то момент найдется такая окрестность $\mathcal{O}_{DW}(S_0)$, что представители классов S_t^1, S_t^2 будут целиком в ней содержаться. При этом так как $S_0 \cap D_0 = S_0 \cap D_t = \emptyset$ для достаточно малых t , такая окрестность может быть выбрана так, что $\mathcal{O}_{DW}(S_0) \cap D_t = \emptyset$ для таких малых t . Но тогда представители S_t^1, S_t^2 обязаны быть гамильтоново изотопными S_0 , а значит, и друг другу, поэтому классы $\langle S_t^1 \rangle$ и $\langle S_t^2 \rangle$ обязаны совпадать.

Таким образом, многообразие модулей $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(c_1(L_D))$ получается вырезанием компонент ветвления. Ввиду гипотез Элиашберга эти компоненты соответствуют подмногообразиям вырождения групп $H_n(X \setminus D, \mathbb{Z})$ в проективном пространстве $|L_D|$, определяемым принципом: чем сложнее особенности D_p , тем меньше группа $H_n(X \setminus D_p, \mathbb{Z})$. Этот принцип вытекает из следующего рассуждения. Представим X как объединение двух открытых множеств: множество A есть $X \setminus D_p$, множество B есть малая трубчатая окрестность $\mathcal{O}_\epsilon(D_p) \subset X$, пересечение $A \cap B$ гомотопно D_p . Последовательность Майера — Виеториса связывает группы гомологий $X, A, B, A \cap B$, причем при вариации D_p группы гомологий X и D_p не меняются, но гомологии $\mathcal{O}_\epsilon(D_p)$ усложняются при усложнении особенностей D_p , откуда следует упрощение групп дополнения $X \setminus D_p$.

Проиллюстрируем конструкции простыми примерами. В качестве алгебраического многообразия X рассмотрим комплексную проективную прямую $\mathbb{CP}^1$, снабженную стандартной кэлеровой формой $\omega_1 = \omega_{FS}$ Фубини — Штуди (см. [1]).

ПРИМЕР 0. Для обильного расслоения $L_D = \mathcal{O}(1)$ конструкция тривиальна. В самом деле, любая гладкая бор-зоммерфельдова петля $\gamma \subset \mathbb{CP}^1$ должна ограничивать диск целочисленной симплектической площади, однако в этом случае симплектическая форма ω_1 при интегрировании по всему $\mathbb{CP}^1$ дает 1, поэтому гладких бор-зоммерфельдовых петель не существует.

ПРИМЕР 1. Для обильного расслоения $L_D = \mathcal{O}(2)$ соответствующая симплектическая форма $\omega_2 = 2\omega_1$ уже допускает существование гладких бор-зоммерфельдовых петель, а именно γ бор-зоммерфельдова, если и только если она делит $\mathbb{CP}^1$ на две равновеликие части. Голоморфные сечения расслоения $\mathcal{O}(2)$

представляются однородными полиномами $P_2(z_0, z_1)$ степени 2 (см. [1]), и соответствующий дивизор $D = \{P_2(z_0, z_1) = 0\}$ состоит или из двух различных точек p_1, p_2 (общий случай) или из одного нуля кратности 2. Проективное пространство $|L_D|$ наделяется однородными координатами $[a_0 : a_1 : a_2]$, где a_i — коэффициент при мономе $z_0^i z_1^{2-i}$, и множество кратных дивизоров описывается уравнением $\Delta = \{a_1^2 - 4a_0a_2 = 0\} \subset |L_D|$.

Пусть дивизор D_0 общий и представляется двумя различными точками $p_1, p_2 \in \mathbb{CP}^1$. Тогда петля γ является D -точной относительно D_0 , если в ограничиваемом ей диске содержится ровно один нуль p_i . В самом деле, если петля γ стягиваема в $\mathbb{CP}^1 \setminus \{p_1, p_2\}$, то один из ограничиваемых ею дисков не содержит ни p_1 , ни p_2 , а это значит, что топологический индекс пересечения этого диска с D_0 равен нулю. Но при этом симплектическая площадь любого непустого диска ненулевая, поэтому с необходимостью получаем, что D -точная петля γ должна представлять нетривиальный класс в $H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{p_1, p_2\}) \cong \mathbb{Z}$. С другой стороны, D -точная петля должна ограничивать диск симплектической площади 1, а все такие петли гамильтоново изотопны. Отсюда следует, что для общего D_0 имеется единственный класс $\langle S_0 \rangle$.

Если дивизор D_0 кратный, то любая петля в $\mathbb{CP}^1 \setminus D_0$ стягиваема, откуда следует, что $\mathcal{N}(D_0) = \emptyset$ в этом случае.

Подводя итог, получаем $\widehat{\mathcal{M}}_{SBS}^h(2) \simeq \mathbb{CP}^2 \setminus \Delta$, т. е. многообразие модулей не просто кэлерово, а аффинное алгебраическое. В частности, оно допускает естественную компактификацию проективной плоскостью.

ПРИМЕР 2. Повысим градус: для обильного расслоения $L_D = \mathcal{O}(3)$ соответствующая симплектическая форма ω_3 равна $3\omega_1$, а голоморфные сечения представляются однородными полиномами степени 3. Соответствующие дивизоры разбиваются на имеющие три разных нуля (общий случай), один кратный и один двукратный корень (соответствуют нулевому дискриминанту) и один трехкратный корень. Ниже покажем, что для любого дивизора $D_0 \in |\mathcal{O}(3)|$ множество классов $\mathcal{N}(D_0)$ естественно изоморфно множеству *однократных* компонент D_0 .

Начнем с общего случая. Пусть имеются три различные точки $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{CP}^1$. Тогда нетрудно видеть, что гладкая петля γ является D -точной если и только если в одном из ограничиваемом ею диске симплектической площади 1 содержится ровно одна из p_i . Такую петлю можно получить так: обведем одну из p_i маленькой петлей так, чтобы внутри была только эта точка, а затем «раздвеем» эту петлю, не выходя из фиксированного класса в $H_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{p_i\}, \mathbb{Z})$, до петли, ограничивающей диск симплектической площади 1. Заметим, что все такие петли гамильтоново изотопны в дополнении $\mathbb{CP}^1 \setminus \{p_i\}$, поэтому получаем единственный класс $\langle S(p_i) \rangle$. Повторяя этот процесс для каждой из трех точек, получаем общий ответ

$$\mathcal{N}(D_0) = \{\langle S(p_1) \rangle, \langle S(p_2) \rangle, \langle S(p_3) \rangle\}.$$

Пусть D_0 состоит из однократного нуля p_1 и двукратного нуля p_2 . Тогда для p_1 можно повторить рассуждения и получить соответствующий класс $\langle S(p_1) \rangle$. Для двукратной точки p_2 такое же рассуждение дает тот же самый класс $\langle S(p_1) \rangle$: D -точная гладкая петля γ , окружающая двойную точку p_2 , должна ограничивать диск B_2 симплектической площади 2, но тогда дополнительный диск $B'_2 = \mathbb{CP}^1 \setminus B_2$ будет иметь симплектическую площадь 1 и содержать точку p_1 , т. е. γ принадлежит тому же классу $\langle S(p_1) \rangle$.

Наконец, дополнение к тройной точке стягиваемо, поэтому в случае D_0 есть одна точка степени 3, D -точных гладких петель не существует.

Из соответствия $\mathcal{N}(D_0) = \{\text{однократные корни}\}$ получаем красивое описание многообразия модулей $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(3)$. В прямом произведении $\mathbb{CP}^1 \times |\mathcal{O}(3)|$ рассмотрим универсальное подмножество

$$Y = \left\{ \sum_{i=0}^3 a_0 z_0^i z_1^{3-i} = 0 \right\},$$

где $[z_0 : z_1]$ — однородные координаты на исходном $\mathbb{CP}^1$ и $[a_0 : \dots : a_3]$ — однородные координаты на $|\mathcal{O}(3)|$. Многообразие Y естественно покрывает $|\mathcal{O}(3)|$, так что над точкой, соответствующей полиному $P_3(z_0; z_1)$, лежат его корни. Это покрытие определяет дивизор ветвления $\Delta \subset Y$, соответствующий кратным корням. Отсюда следует, что многообразие модулей имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h(3) \simeq Y \setminus \Delta,$$

т. е. снова получаем ответ вида «алгебраическое многообразие минус обильный дивизор». При этом необходимо подчеркнуть, что кэлера структура, предлагаемая теоремой 2, не соответствует обильному дивизору Δ , будучи поднятой с проективного пространства $|L_D|$.

В конце этого параграфа кратко обсудим зависимость геометрии $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}^h$ от выбора эрмитовой структуры h на обильном расслоении $L_D \rightarrow X$. Так как расслоение линейно, любые две эрмитовы структуры h_1, h_2 связаны соотношением $|\alpha|_{h_1} = e^f |\alpha|_{h_2}$ для любого сечения $\alpha \in \Gamma(X, L_D)$, где f — вещественная функция. Соответствующие формы связаны соотношением $\omega_{h_2} = \omega_{h_1} + dIdf$, и при малой функции f градиентный поток $\phi_{\text{grad } f}^t$ переводит форму ω_{h_1} в форму ω_{h_2} за единичное время. При этом любое подмногообразие $S_0 \subset X$, лагранжево и бор-зоммерфельдово относительно ω_{h_1} , переносится тем же потоком за то же время в подмногообразие $\phi_{\text{grad } f}^t(S_0) = S_t$, лагранжево и бор-зоммерфельдово относительно второй формы ω_{h_2} . Для достаточно малых f пересечения $S_t \cap D_0$ для фиксированного дивизора D_0 остаются тривиальными, откуда следует D -точность лагранжева подмногообразия S_t . Таким образом, для малой вариации подходящих эрмитовых структур соответствующие многообразия модулей естественно изоморфны. Так как все пространство подходящих эрмитовых структур есть выпуклый бесконечномерный шар, это остается верным и для всех подходящих эрмитовых структур. Заметим, что кэлера структура, определяемая теоремой 2, зависит от выбора h , поскольку от этого зависит выбор кэлеровой структуры на $|L_D|$.

§ 4. Стабилизация

Многообразие модулей $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D))$ кэлерово, но не обязательно алгебраично, поскольку алгебраичность подразумевает некоторую конечность (в частности, конечность накрытия π). Поскольку хотелось бы построить именно алгебраические объекты, для этого необходимо ввести дополнительные условия на D -точные лагранжевы подмногообразия.

Прежде всего отметим, что $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D))$ состоит из разных компонент связности, так как имеется простое

Утверждение 5. Если пары $(\langle S_0 \rangle, D_0), (\langle S_1 \rangle, D_1)$ лежат в одной компоненте связности $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D))$, то представители соответствующих классов S_0 и S_1 гамильтоново изотопны в X .

В самом деле, S_0 и S_1 связаны бор-зоммерфельдовой изотопией, отсюда следует, что они гамильтоново изотопны.

В частности, S_0 и S_1 должны быть гомологичны и диффеоморфны друг другу. Отсюда «дискретизация» $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D))$ происходит при выборе класса $[S] \in H_n(X, \mathbb{Z})$ и гладкого типа $\text{Diff } S$. Обозначим компоненту, соответствующую такому выбору, через $\widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$, однако и она не обязательно связна. В свете утверждения 5 необходим выбор типа по модулю гамильтоновой эквивалентности.

Возможный путь к этому связан с синтезом двух подходов, представленных выше: один и тот же дивизор D_0 определяет и вейнштейнов скелет $W(D_0)$, и множество классов $\mathcal{N}(D_0)$ эквивалентных D -точных относительно D_0 гладких лагранжевых подмногообразий. «Тезис» и «антитезис» объединяются следующей конструкцией, развивающей идею из [7] о бор-зоммерфельдовых циклах. Циклом в этой работе называлось замкнутое лагранжево подмногообразие с особенностями.

Напомним, что вейнштейнов скелет $W^h(D_0)$ в общем случае порождается в рамках теории Морса гладкой вещественной функцией, поэтому примитивные замкнутые циклы размерности n , содержащиеся в $W^h(D_0)$, составляют не более чем конечное множество. В самом деле, клеток размерности n не может быть больше, чем критических точек индекса n , а в каждый примитивный цикл каждая из таких клеток не может входить более одного раза. Более того, каждый замкнутый цикл $S_0 \subset W^h(D_0)$ размерности n удовлетворяет условию Бора — Зоммерфельда из определения 0, уточненному для случая лагранжевых циклов следующим образом. Вместо гладких петель $\gamma \subset S$ и гладких дисков рассмотрим *кусочно гладкие* петли $\gamma \subset S_0$ и диски с углами, ограничивающие такие петли, условие целочисленности симплектической площади остается тем же самым. Тогда нетрудно видеть, что любой лагранжев цикл $S_0 \subset W^h(D_0)$ удовлетворяет условию Бора — Зоммерфельда.

Итак, пусть $S_0 \subset W^h(D_0)$ есть бор-зоммерфельдов лагранжев цикл, принадлежащий вейнштейнову скелету дополнения $X \setminus D_0$ для фиксированной подходящей эрмитовой структуры, порождающей симплектическую форму ω_h . Зафиксируем некоторый класс $[S] \in H_n(X, \mathbb{Z})$ и гладкий тип $\text{Diff } S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем *бор-зоммерфельдовым разрешением* фиксированного топологического типа для цикла $S_0 \subset W^h(D_0)$ гомотопию $S_t \subset X \setminus D_0$, $t \in (0; 1]$, так что все S_t , $t \in [0, 1]$, бор-зоммерфельдовы и все S_t , $t \in (0, 1]$, гладкие лагранжевы подмногообразия, реализующие этот фиксированный топологический тип.

Заметим, что все гладкие S_t обязаны быть D -точными относительно D_0 . Кроме того, если сам бор-зоммерфельдов цикл S_0 оказался гладким лагранжевым подмногообразием, то он автоматически является своим бор-зоммерфельдовым разрешением.

Для дивизора D_0 выделим классы $\langle S_i \rangle$ в фактор-пространстве $\mathcal{N}(D_0)$, реализуемые как бор-зоммерфельдовы разрешения замкнутых циклов, представляющих нетривиальные примитивные классы из $H_n(W^h(D_0), \mathbb{Z})$. Обозначим множество таких классов через $\mathcal{N}^{st}(D_0)$.

Утверждение 6. Цикл S_0 не может быть бор-зоммерфельдово разрешен более чем одним классом фиксированного топологического типа из $\mathcal{N}(D_0)$.

В самом деле, пусть есть два семейства S_t и S'_t , являющиеся бор-зоммерфельдовыми разрешениями одного и того же цикла S_0 . Тогда для очень малых $t < t_0$ гладкие лагранжевы подмногообразия S_t попадают в окрестность Дарбу — Вейнштейна $\mathcal{O}_{DW}(S'_{t_0})$, откуда вытекает совпадение классов $\langle S_t \rangle = \langle S'_t \rangle$.

Следствие. Для фиксированного топологического типа $([S], \text{Diff } S)$ число классов из $\mathcal{N}^{st}(D_0)$, реализующих этот топологический тип, конечно.

В самом деле, как видели выше, всего примитивных бор-зоммерфельдовых циклов в $W^h(D_0)$ конечное число, и согласно утверждению 6 из каждого из них может проистекать не более одного элемента в фактор-пространстве $\mathcal{N}^{st}(D_0)$, реализующего фиксированный топологический тип.

Из всего изложенного естественно следует

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Стабильной компонентой фиксированного топологического типа $\mathcal{M}_{SBS}^{st}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{SBS}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$ называется подмножество, состоящее из пар $(\langle S \rangle, D_0)$, где представители $\langle S \rangle \in \mathcal{N}^{st}(D_0)$ реализуют этот фиксированный топологический тип.

Наша главная гипотеза заключается в том, что стабильная компонента фиксированного топологического типа $\mathcal{M}_{SBS}^{st}(c_1(L_D), [S], \text{Diff } S)$ является алгебраическим многообразием вида $Y \setminus \Delta$, где $\Delta \subset Y$ — обильный дивизор.

Если эта гипотеза была бы верна, то получили бы замечательную цепочку соответствий, поскольку естественно было бы продолжить конструкции и рассмотреть соответствующее многообразие модулей для новой пары (Y, Δ) , снова получая пару такого же вида. Вместе с тем на этом же пути можно вводить численные инварианты, а именно степени накрытия $\mathcal{M}_{SBS}^{st} \rightarrow |L_D|$ в общей точке. Переходя к положительным тензорным степеням $L_D^{\otimes k}$, приходим к рассмотрению порождающих функций нового типа. В качестве простейшего примера снова рассмотрим случай $X = \mathbb{CP}^1$, $L_D = \mathcal{O}(1)$. Как видели выше в примерах 0–2, коэффициенты соответствующей порождающей функции равны $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$. Нетрудно подсчитать число различных классов D -точных лагранжевых петель и для общего сечения $\mathcal{O}(k)$: оно в точности равно $2^{k-1} - 1$. В самом деле (ср. с примером 2), для общего набора различных точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{CP}^1$ тип гладкой петли может быть представлен набором точек, содержащихся в диске, который ограничивает эта петля. Исключение составляют пустой набор $\emptyset$ (стягиваемая петля не может быть D -точной) и полный набор $\{p_1, \dots, p_k\}$ (по той же причине), и два непересекающихся набора соответствуют одной и той же петле если и только если их объединение есть все множество $\{p_1, \dots, p_k\}$. Отсюда соответствующая порождающая функция для $\mathbb{CP}^1$ имеет вид $\sum_{k=1} (2^{k-1} - 1)t^k$.

Конечно, представленный пример очень прост, однако, возможно, на этом пути можно будет получать новые лагранжевы инварианты алгебраических многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffiths P., Harris J. Principles of algebraic geometry. New York: Wiley, 1978.
2. Тюрин Н. А. Специальные бор-зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80, № 6. С. 274–293.
3. Тюрин Н. А. Специальные бор-зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия в алгебраических многообразиях // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82, № 3. С. 170–191.

4. Eliashberg Ya. Weinstein manifolds revisited // arXiv: 1707.03442. Cornell Univ., 2017. 32 pp.
5. Cieliebak K., Eliashberg Ya. From Stein to Weinstein and back-symplectic geometry of affine complex geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2012. (Colloq. Publ.; V. 59).
6. Andreotti A., Frankel Th. The Lefschetz theorem on hyperplane sections // Ann. Math. 1959. V. 69, N 3. P. 713–717.
7. Горodenцев А. Л., Тюрин А. Н. Абелева лагранжева алгебраическая геометрия // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, № 3. С. 15–50.
8. Abouzaid M., Kragh T. Simple homotopy equivalence of nearby Lagrangians // arXiv: 1603.05431, Cornell Univ., 2016. 45 pp.

Поступила в редакцию 12 октября 2018 г.

После доработки 12 октября 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Тюрин Николай Андреевич
Объединенный институт ядерных исследований,
лаборатория теоретической физики,
ул. Жолио Кюри, 6, г. Дубна 141980, Московская обл.;
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
лаборатория зеркальной симметрии,
ул. Мясницкая, 20, Москва 101000
ntyurin@theor.jinr.ru