B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba, On strongly Π -permutable subgroups of a finite group,
Sibirsk. Mat. Zh., 2019, Volume 60, Number 4, 922–931

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.417>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 17:22:47

О СТРОГО Π -ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Б. Ху, Ц. Хуан, А. Н. Скиба

Аннотация. Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ и Π — произвольное непустое подмножество в σ . Пусть G — конечная группа. Множество подгрупп $\mathcal{H}$ группы G называется *полным холловым Π -множеством* в G , если каждый член $\neq 1$ множества $\mathcal{H}$ является холловой π -подгруппой G для некоторого π , принадлежащего Π , и $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холлову ψ -подгруппу группы G для каждого ψ , принадлежащего Π ; группа G называется *Π -полной*, если G обладает полным холловым Π -множеством.

Подгруппа A группы G называется: (i) *Π -перестановочной* в G , если G обладает полным холловым Π -множеством $\mathcal{H}$ таким, что для любой подгруппы H , принадлежащей $\mathcal{H}$, A перестановочна со всеми сопряженными с H подгруппами группы G ; (ii) *σ -субнормальной* в G , если A $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G в смысле Кегеля, где $\mathfrak{F}$ — класс всех конечных σ -нильпотентных групп; (iii) *строго Π -перестановочной* в G , если A является одновременно Π -перестановочной и σ -субнормальной в G .

В работе изучаются свойства строго Π -перестановочных подгрупп. В частности, исследованы условия, при которых множество всех строго Π -перестановочных подгрупп Π -полной группы G образует подрешетку решетки всех подгрупп группы G .

DOI 10.33048/smzh.2019.60.417

Ключевые слова: конечная группа, решетка подгрупп, Π -полная группа, σ -субнормальная подгруппа, строго Π -перестановочная подгруппа.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает конечную группу, $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех подгрупп G . Более того, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих натуральное число n ; $\pi(G) = \pi(|G|)$. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. В этом случае говорят также, что A *перестановочна* с B .

В данной работе $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, и $\Pi \subseteq \sigma$. Будем писать $\sigma(n)$ для обозначения множества $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется *Π -примарной*, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \Pi$; *Π -группой*, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Множество подгрупп $\mathcal{H}$ группы G называется *полным холловым Π -множеством* в G [1], если каждый член $\neq 1$ множества $\mathcal{H}$ является холловой σ_i -подгруппой G для некоторого $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холлову

Работа поддержана грантом ГФЕН Китая (проект 11401264) и программой TARP для учреждений высшего образования Янгсу (PPZY 2015A013).

σ_i -подгруппу группы G для каждого $\sigma_i \in \Pi$; группа G называется П-полной, если G обладает полным холловым П-множеством.

Подгруппа A группы G называется [1, 2] (i) П-перестановочной в G , если G обладает полным холловым П-множеством $\mathcal{H}$ таким, что $AN^x = N^x A$ для всех $N \in \mathcal{H}$ и всех $x \in G$; (ii) σ -субнормальной в G , если в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ такая, что $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ или $A_i/(A_{i-1})_{A_i} - \sigma_k$ -группа для некоторого $k = k(i)$ для всех $i = 1, \dots, t$; (iii) строго П-перестановочной в G , если A является одновременно П-перестановочной и σ -субнормальной в G .

Отметим попутно, что ввиду теоремы В из [2] A строго σ -перестановочна в G в том и только в том случае, когда A σ -перестановочна в G .

Примеры и ключевые свойства П-перестановочных и, в частности, σ -перестановочных подгрупп обсуждались в [1–4]. В данной работе на основе результатов работы [2] изучаются свойства строго П-перестановочных подгрупп.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $p > q > r > t$ — простые числа, где t делит $r - 1$, и пусть $G = C_p \times (Q \rtimes (C_r \rtimes C_t))$, где $C_r \rtimes C_t$ — неабелева группа порядка rt и Q — простой точный $\mathbb{F}_q(C_r \rtimes C_t)$ -модуль. Пусть $\sigma = \{\{p\}, \{q, r\}, \{p, q, r\}'\}$ и $\Pi = \{\{p\}, \{q, r\}\}$.

(i) Подгруппа C_r σ -субнормальна и П-перестановочна в G ; таким образом, эта подгруппа строго П-перестановочна в G . Покажем, что C_r не является σ -перестановочной в G . Действительно, предположим, что для каждого $x \in G$ имеем $C_r C_t^x = C_t^x C_r$. Тогда $C_r = (Q \rtimes C_r) \cap (C_t^x C_r)$ нормальна в $C_t^x C_r$. Следовательно, $C_t^G = Q \rtimes (C_r \rtimes C_t) \leq N_G(C_r)$, поэтому $C_r \leq C_G(Q)$, что противоречит точности модуля Q . Таким образом, C_r не σ -перестановочна в G .

(ii) Подгруппа C_t П-перестановочна в группе $Q \rtimes (C_r \rtimes C_t)$. Нетрудно также проверить, что C_t не является σ -субнормальной в этой группе. Следовательно, C_t не строго П-перестановочна в G .

Первый результат показывает, что σ -субнормальная подгруппа П-полной группы G строго П-перестановочна в G том и только в том случае, когда она перестановочна с каждой холловой σ_i -подгруппой группы G для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Предложение 1.2. Предположим, что G П-полная, и пусть A — σ -субнормальная подгруппа в G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) A П-перестановочна в G ;
- (2) A перестановочна с каждой холловой σ_i -подгруппой группы G для всех $\sigma_i \in \Pi$;
- (3) A/N П-перестановочна в G/N для каждой нормальной подгруппы N группы G , содержащейся в A .

Напомним, что группа G является σ -нильпотентной [1], если $G = H_1 \times \dots \times H_t$, где $\{H_1, \dots, H_t\}$ — полное холлово σ -множество группы G .

Теорема А. Предположим, что G П-полная, и пусть A — σ -нильпотентная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) A строго П-перестановочна в G ;
- (2) каждая характеристическая подгруппа группы A строго П-перестановочна в G ;
- (3) каждая холлова σ_i -подгруппа группы A строго П-перестановочна в G для всех i .

Напомним, что подгруппа A группы G π -перестановочна или π -квазинормальна в G [5], если A перестановочна с каждой силовой p -подгруппой группы

G для всех $p \in \pi$; $\pi(G)$ -перестановочные подгруппы называются также S -перестановочными [6]. Поэтому в случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, получаем из теоремы А следующий известный факт.

Следствие 1.3 (см. [6, теорема 1.2.17]). Пусть A — нильпотентная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) A S -перестановочна в G ;
- (ii) каждая силовская подгруппа группы A S -перестановочна в G ;
- (iii) каждая характеристическая подгруппа группы A S -перестановочна в G .

Будем говорить, что подгруппа A группы G является Π -модулярной (π -модулярной в случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$), если G Π -полная и $\langle A, H \cap C \rangle = \langle A, H \rangle \cap C$ для каждой холловой σ_i -подгруппы H группы G и для всех $\sigma_i \in \Pi$ и всех $A \leq C \leq G$; G называется Π -полной группой силовского типа [1], если каждая подгруппа группы G является D_{σ_i} -группой для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Теорема В. Пусть A — σ -субнормальная подгруппа группы G . Если G является Π -полной группой силовского типа, то следующие утверждения эквивалентны:

- (1) A Π -перестановочна в G ;
- (2) A Π -перестановочна в $\langle A, x \rangle$ для всех $x \in G$;
- (3) A Π -модулярна в каждой подгруппе группы G , содержащей A .

Следствие 1.4. Субнормальная подгруппа A группы G π -перестановочна в G в том и только в том случае, когда A π -перестановочна в $\langle A, x \rangle$ для всех $x \in G$.

Так как каждая S -перестановочная подгруппа группы G субнормальна в G [5], из следствия 1.4 получаем следующий известный факт.

Следствие 1.5 (см. [7; 6, теорема 1.2.13]). Подгруппа A группы G S -перестановочна в G в том и только в том случае, когда A S -перестановочна в $\langle A, x \rangle$ для всех $x \in G$.

Теорема В позволяет дать еще одну характеристику S -перестановочности.

Следствие 1.6. Подгруппа A группы G S -перестановочна в G в том и только в том случае, когда A субнормальна в G и $\langle A, P \cap C \rangle = \langle A, P \rangle \cap C$ для каждой силовской подгруппы P группы G и каждой подгруппы C , содержащей A .

Если $\sigma^* = \{\sigma_j^* \mid j \in J\}$ — разбиение множества $\mathbb{P}$ такое, что $I \subseteq J$ и $\sigma_j^* \subseteq \sigma_j$ для всех $j \in J$, то пишем $\sigma^* \leq \sigma$.

Используем символы $\mathcal{L}_{\mathfrak{N}_{\sigma^*}\Pi}(G)$ и $\mathcal{L}_{\text{Прет}}(G)$ для обозначения множества всех Π -перестановочных подгрупп A группы G с σ^* -нильпотентной секцией A^G/A_G и множества всех строго Π -перестановочных подгрупп группы G соответственно. Если $\sigma^* = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, применяем вместо $\mathfrak{N}_{\sigma^*}$ символ $\mathfrak{N}$.

Теорема С. Предположим, что G Π -полная и $\sigma^* \leq \sigma$. Тогда $\mathcal{L}_{\mathfrak{N}_{\sigma^*}\Pi}(G) \subseteq \mathcal{L}_{\text{Прет}}(G)$ являются подрешетками решетки $\mathcal{L}(G)$.

Следствие 1.7 [5, теорема 2]. Множество всех π -перестановочных субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой решетки $\mathcal{L}(G)$.

Теорема D. Предположим, что G П-полная, и пусть $\mathcal{L}$ — множество всех П-подгрупп группы G , принадлежащих решетке $\mathcal{L}_{\text{П}}(G)$. Тогда $\mathcal{L}$ является подрешеткой решетки $\mathcal{L}(G)$ и эта подрешетка модулярна в том и только в том случае, когда каждые два ее члена перестановочны.

Следствие 1.8 [8, теорема B]. Решетка всех S -перестановочных подгрупп группы G модулярна в том и только в том случае, когда каждые два ее члена перестановочны.

2. Доказательства предложения 1.2 и теорем А и В

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.2. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

(1) $\Rightarrow$ (2) Достаточно показать, что если A — σ -субнормальная подгруппа группы G и в G имеется холлова σ_i -подгруппа L такая, что $AL^x = L^x A$ для всех $x \in G$, то A перестановочна со всеми холловыми σ_i -подгруппами группы G . Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда для некоторой холловой σ_i -подгруппы H группы G имеем $AH \neq HA$.

Прежде всего покажем, что $A_G = 1$. Предположим, что $R = A_G \neq 1$. Тогда LR/R — холлова σ_i -подгруппа в G/R и

$$(A/R)(LR/R)^{xR} = (A/R)(L^x R/R) = AL^x/R = L^x A/R = (LR/R)^{xR}(A/R)$$

для всех $xR \in G/R$. Более того, A/R σ -субнормальна в G/R согласно [2, лемма 2.6(4)]. Следовательно, гипотеза выполняется для $(G/R, A/R, LR/R)$, поэтому ввиду выбора группы G имеем $AH/R = (A/R)(HR/R) = (HR/R)(A/R) = HA/R$. Но тогда $AH = HA$, что противоречит предположению о паре (A, H) . Следовательно, $A_G = 1$.

Заметим также, что A не является σ_i -группой, поскольку в противном случае имеем $A = A \cap H$ согласно [2, лемма 2.6(7)], поэтому $AH = H = HA$. Следовательно, $O^{\sigma_i}(A) \neq 1$.

Пусть $x \in G$ и $E = AL^x = L^x A$. Так как, очевидно, $|E : A|$ — σ_i -число и A σ -субнормальна в E согласно [2, лемма 2.6(1)], то $O^{\sigma_i}(A) = O^{\sigma_i}(E)$ ввиду [2, лемма 2.6(8)]. Следовательно, $L^x \leq N_G(O^{\sigma_i}(A))$, что влечет $L^G \leq N_G(O^{\sigma_i}(A))$. Предположим, что $L^G A < G$. Понятно, что гипотеза выполняется для $(L^G A, A, L)$. С другой стороны, $H \cap L^G$ является холловой σ_i -подгруппой в L^G , поэтому $H \leq L^G A$. Выбор группы G влечет, что $AH = HA$. Полученное противоречие показывает, что $L^G A = G$ и, следовательно, $O^{\sigma_i}(A)$ нормальна в G . Но тогда $O^{\sigma_i}(A) \leq A_G = 1$, поэтому A является σ_i -группой; противоречие. Этим завершено доказательство того, что (1) влечет (2).

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть H — холлова σ_i -подгруппа в G для некоторого $\sigma_i \in \Pi$. Тогда HN/N — холлова σ_i -подгруппа в G/N и A/N является σ -субнормальной П-перестановочной подгруппой в G/N . Тогда согласно импликации (1) $\Rightarrow$ (2), примененной к G/N ,

$$AH/N = (A/N)(HN/N) = (HN/N)(A/N) = HA/N,$$

что влечет $AH = HA$. Следовательно, (3) влечет (1).

(1) $\Rightarrow$ (3) Согласно условию G обладает полным холловым П-множеством $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ таким, что $AH^x = H^x A$ для всех $H \in \mathcal{H}$ и $x \in G$. Тогда $\mathcal{H}_0 = \{H_1 N/N, \dots, H_t N/N\}$ — полное холлово П-множество группы G/N и $(A/N)(NH_i/N)^{xN} = (NH_i/N)^{xN}(A/N)$ для всех $NH_i/N \in \mathcal{H}_0$ и $xN \in G/N$, что влечет П-перестановочность подгруппы A/N в G/N .

Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. (1) $\Rightarrow$ (2) Достаточно показать, что если B — характеристическая подгруппа группы A и H — холлова σ_i -подгруппа группы G такая, что $AH = HA$, то $BH = HB$. Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример, для которого $|G| + |B| + |A|$ минимально. Согласно условию $A = A_1 \times \cdots \times A_t$, где $\{A_1, \dots, A_t\}$ — полное холлово σ -множество в A . Следовательно, $B = (A_1 \cap B) \times \cdots \times (A_t \cap B)$, где $\{A_1 \cap B, \dots, A_t \cap B\}$ — полное холлово σ -множество в B . Не теряя общности, можно предполагать, что A_k — σ_k -группа для всех $k = 1, \dots, t$.

Понятно, что $A_i \cap B$ характеристична в A для всех $i = 1, \dots, t$. Следовательно, если $A_i \cap B < B$, то $(A_i \cap B)H = H(A_i \cap B)$ по выбору группы G , поэтому для некоторого j , скажем $j = 1$, имеет место $A_1 \cap B = B$, поскольку в противном случае получим

$$BH = ((A_1 \cap B) \times \cdots \times (A_t \cap B))H = H((A_1 \cap B) \times \cdots \times (A_t \cap B)) = HB.$$

Таким образом, $B \leq A_1$. Понятно, что A_1 σ -субнормальна в G , поэтому в случае, когда $i = 1$, имеем $B \leq A_1 \leq H$ согласно [2, лемма 2.6(7)]. Но тогда $BH = H = HB$; противоречие. Значит, $i > 1$.

Покажем, что $A_1H = HA_1$. Прежде заметим, что A_i σ -субнормальна в G , поэтому $A_i \leq H$ согласно [2, лемма 2.6(7)]. Более того, $A = A_1 \times V \times A_i$, где $V = A_1 \cdots A_{i-1}A_{i+1} \cdots A_t$, тем самым

$$HA = AH = (A_1 \times V \times A_i)H = (A_1 \times V)H = H(A_1 \times V),$$

где $A_1 \times V$ является σ -субнормальной σ'_i -подгруппой в G . Тогда $A_1 \times V$ σ -субнормальна в $(A_1 \times V)H$ согласно [2, лемма 2.6(1)]. Следовательно, $H \leq N_G(A_1 \times V)$ согласно [2, лемма 2.6(8)]. Так как A_1 является характеристической подгруппой в $A_1 \times V$, имеем $H \leq N_G(A_1)$. Но B является характеристической подгруппой в A_1 , поскольку B является характеристической подгруппой в A по условию и $A = A_1 \times \cdots \times A_t$. Стало быть, $H \leq N_G(B)$, поэтому $BH = HB$; противоречие. Следовательно, (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Эта импликация очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (1) Поскольку подгруппы $A_1, \dots, A_t$ строго П-перестановочны в G согласно условию, A П-перестановочна в G . Более того, A σ -субнормальна в G согласно [2, лемма 2.6(3)], поэтому A строго П-перестановочна в G .

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $x \in G$ и $L = \langle A, x \rangle$. Тогда L П-полная и каждая холлова σ_i -подгруппа V группы L содержится в некоторой холловой σ_i -подгруппе H группы G для всех $\sigma_i \in \Pi$, так как G является П-полной группой силовского типа по условию. Тогда $AH = HA$ согласно предложению 1.2, поэтому $AH \cap L = A(H \cap L) = AV = VA$ и, следовательно, A П-перестановочна в L .

(2) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример, для которого $|G| + |A|$ минимально. Тогда для некоторого $\sigma_i \in \Pi$ и для некоторой холловой σ_i -подгруппы H группы G имеем $AH \neq HA$.

Предположим, что $\langle A, H \rangle < G$. Гипотеза выполняется для $(\langle A, H \rangle, A)$ согласно [2, лемма 2.6(1)], значит, A П-перестановочна в $\langle A, H \rangle$ по выбору группы G . Но тогда A перестановочна с каждой холловой σ_i -подгруппой группы $\langle A, H \rangle$ согласно предложению 1.2, поэтому $AH = HA$. Полученное противоречие показывает, что $\langle A, H \rangle = G$.

Пусть теперь $x \in H$ и $L = \langle A, x \rangle$. Тогда A Π -перестановочна в L по условию, следовательно, для каждой холловой σ_i -подгруппы E группы L имеем $AE = EA$.

Понятно, что $|AE : A|$ является σ_i -числом, поэтому $O^{\sigma_i}(AE) = O^{\sigma_i}(A)$ согласно [2, лемма 2.6(8)]. Значит, $E^L \leq N_L(O^{\sigma_i}(A))$, тем самым $x \in N_G(O^{\sigma_i}(A))$. Следовательно, $O^{\sigma_i}(A)$ — нормальная подгруппа в G . Но так как $AH \neq HA$, то $A \not\leq H$, поэтому согласно [2, лемма 2.6(1)] имеем $O^{\sigma_i}(A) \neq 1$. Таким образом, $A_G \neq 1$.

Заметим, что $\langle A/A_G, xA_G \rangle = \langle A, x \rangle/A_G$, где A/A_G Π -перестановочна в $\langle A, x \rangle/A_G$ согласно предложению 1.2. Понятно также, что A/A_G σ -субнормальна в G/A_G . Следовательно, гипотеза выполняется для $(G/A_G, A/A_G)$, поэтому A/A_G Π -перестановочна в G/A_G по выбору группы G . Следовательно, A Π -перестановочна в G ввиду предложения 1.2. Это противоречие завершает доказательство импликации.

(3) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда для некоторого $\sigma_i \in \Pi$ и для некоторой холловой σ_i -подгруппы H группы G имеем $AH \neq HA$, поэтому $A \neq G$.

Согласно условию в группе G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ такая, что $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ или $A_i/(A_{i-1})_{A_i} = \sigma_k$ -группа для некоторого $k = k(i)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Можно считать, не теряя общности, что $M = A_{n-1} < G$.

Понятно, что гипотеза выполняется для (M, A) , поэтому A Π -перестановочна в M по выбору группы G . Более того, Π -модулярность подгруппы A в G влечет

$$M = M \cap \langle A, H \rangle = \langle A, (M \cap H) \rangle.$$

С другой стороны, согласно [2, лемма 2.6(7)] $M \cap H$ является холловой σ_i -подгруппой в M . Следовательно, $M = A(M \cap H) = (M \cap H)A$. Если $H \leq M_G$, то $A(M \cap H) = AH = HA$, поэтому $H \leq M_G$.

Заметим, что $HM = MH$. Действительно, если M нормальна в G , то это очевидно. В противном случае G/M_G является σ_k -группой для некоторого k , поэтому $G = MH = HM$, так как $H \not\leq M_G$ и H — холлова σ_i -подгруппа в G . Таким образом,

$$HA = H(M \cap H)A = HM = MH = H(M \cap H)A = HA.$$

Это противоречие завершает доказательство того, что (3) влечет (1).

(1) $\Rightarrow$ (3) Пусть $A \leq C \leq E$, и пусть V — холлова σ_i -подгруппа в E , где $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $AV = VA$ (см. доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2)). Следовательно,

$$\langle A, V \cap C \rangle = A(V \cap C) = AV \cap C = \langle A, V \rangle \cap C,$$

поэтому A является σ -модулярной в E . Импликация доказана.

Теорема доказана.

3. Доказательства теорем С и D

Лемма 3.1 (см. [9, А, лемма 1.6]). Пусть A, B и E — подгруппы группы G такие, что $AE = EA$ и $BE = EB$. Тогда $\langle A, B \rangle E = E \langle A, B \rangle$.

Следующая лемма может быть доказана прямой проверкой.

Лемма 3.2. Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G .

(1) Если группа G σ -нильпотентна, то все ее фактор-группы и подгруппы σ -нильпотентны.

(2) Если G/A и G/B σ -нильпотентны, то $G/(A \cap B)$ σ -нильпотентна.

(3) Если A и B σ -нильпотентны, то AB σ -нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ С. Прежде всего покажем, что $\mathcal{L}_{\text{Per}}(G)$ является подрешеткой решетки $\mathcal{L}(G)$. Фактически ввиду леммы 3.1 и [2, лемма 2.6(3)] для этого достаточно показать, что если A и B — σ -субнормальные подгруппы группы G такие, что для холловой σ_i -подгруппы H группы G имеет место $AH = HA$ и $BH = HB$, то $(A \cap B)H = H(A \cap B)$.

Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда G не является σ_i -группой, поскольку в противном случае имеет место $H = G$ и поэтому $G = (A \cap B)H = H(A \cap B)$.

Пусть $E = AH \cap BH$. Тогда $A \cap E$ и $B \cap E$ — σ -субнормальные подгруппы группы E по [2, лемма 2.6(1)]. Более того, $AH \cap E = H(A \cap E) = (A \cap E)H$. Аналогично $(B \cap E)H = H(B \cap E)$. Следовательно, гипотеза выполнена для $(E, A \cap E, B \cap E, H)$. Предположим, что $E < G$. Тогда выбор G влечет, что $A \cap B = (A \cap E) \cap (B \cap E)$ перестановочна с H . Стало быть, $E = G$, поэтому $G = AH = BH$. Значит, $|G : A|$ и $|G : B|$ — σ_i -числа. Следовательно, имеет место $O^{\sigma_i}(A) = O^{\sigma_i}(G) = O^{\sigma_i}(B)$ согласно [2, лемма 2.6(8)]. Так как G не является σ_i -группой, $V = A_G \cap B_G \neq 1$. Более того, A/V и B/V — σ -субнормальные подгруппы группы G/V согласно [2, лемма 2.6(4)]. Понятно также, что $(A/V)(HV/V) = AH/V = HA/V = (HV/V)(A/V)$ и $(B/V)(HV/V) = (HV/V)(B/V)$, где HV/V — холлова σ_i -подгруппа в G/V . Следовательно, выбор группы G влечет равенства

$$\begin{aligned} (A \cap B/V)(HV/V) &= ((A/V) \cap (B/V))(HV/V) \\ &= (HV/V)((A/V) \cap (B/V)) = (HV/V)(A \cap B/V). \end{aligned}$$

Но тогда $(A \cap B)H = (A \cap B)HV = HV(A \cap B) = H(A \cap B)$. Это противоречие завершает доказательство того, что $\mathcal{L}_{\text{Per}}(G)$ — подрешетка решетки $\mathcal{L}(G)$.

Заметим, что из условия $\sigma^* \leq \sigma$ следует, что каждая σ^* -субнормальная подгруппа группы G σ -субнормальна в G . С другой стороны, каждая подгруппа A группы G с условием $A^G/A_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$, очевидно, σ^* -субнормальна в G , поэтому $\mathcal{L}_{\mathfrak{N}_{\sigma^*}\Pi}(G) \subseteq \mathcal{L}_{\text{Per}}(G)$.

Покажем, что для любых двух подгрупп $A, B \in \mathcal{L}_{\mathfrak{N}_{\sigma^*}\Pi}(G)$ имеет место $A \cap B, \langle A, B \rangle \in \mathcal{L}_{\mathfrak{N}_{\sigma^*}\Pi}(G)$. В силу включения $\mathcal{L}_{\mathfrak{N}_{\sigma^*}\Pi}(G) \subseteq \mathcal{L}_{\text{Per}}(G)$ для этого достаточно лишь показать, что для любых двух подгрупп A и B группы G с условиями $A^G/A_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ и $B^G/B_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ имеют место $(A \cap B)^G/(A \cap B)_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ и $\langle A, B \rangle^G/\langle A, B \rangle_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$.

В силу G -изоморфизмов

$$\begin{aligned} A^G(A_GB_G)/A_GB_G &\simeq A^G/(A^G \cap A_GB_G) \\ &= A^G/A_G(A^G \cap B_G) \simeq (A^G/A_G)/(A_G(A^G \cap B_G)/A_G) \end{aligned}$$

имеем $A^G(A_GB_G)/A_GB_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ согласно лемме 3.2(1). Аналогично можно показать, что $B^G(A_GB_G)/A_GB_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$. Более того,

$$A^GB^G/A_GB_G = (A^G(A_GB_G)/A_GB_G)(B^G(A_GB_G)/A_GB_G),$$

поэтому $A^GB^G/A_GB_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ согласно лемме 3.2(3).

Заметим, что $\langle A, B \rangle^G = A^G B^G$ и $A_G B_G \leq \langle A, B \rangle_G$. Таким образом, получаем $\langle A, B \rangle^G / \langle A, B \rangle_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ согласно лемме 3.2(1).

Теперь заметим, что $(A \cap B)_G = A_G \cap B_G$. С другой стороны, из изоморфизма

$$(A^G \cap B^G) / (A_G \cap B_G) = (A^G \cap B^G) / (A_G \cap B^G \cap A^G) \simeq A_G (B^G \cap A^G) / A_G \leq A^G / A_G$$

вытекает, что $(A^G \cap B^G) / (A_G \cap B_G) \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ согласно лемме 3.2(1). Аналогично $(B^G \cap A^G) / (B_G \cap A_G) \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$. Но тогда заключаем, что $(A^G \cap B^G) / (A_G \cap B_G) \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$ согласно лемме 3.2(2). Понятно также, что $(A \cap B)^G \leq A^G \cap B^G$. Значит, $(A \cap B)^G / (A \cap B)_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$. Следовательно, $\mathcal{L}_{\mathfrak{N}_{\sigma^*}\Pi}(G)$ является подрешеткой решетки $\mathcal{L}(G)$.

Теорема доказана.

Лемма 3.3 (см. [10, лемма 5.2]). Пусть $\mathcal{L}$ — модулярная подрешетка решетки $\mathcal{L}(G)$ и $U, V, N \in \mathcal{L}$, где $N \leq \langle U, V \rangle$. Если U одновременно перестановочна с $V \cap UN$ и VN , то U перестановочна с V .

Используем символ $\mathcal{L}_{i\Pi}(G)$ для обозначения множества всех П-перестановочных σ_i -подгрупп A группы G с нильпотентной секцией A^G / A_G .

Предложение 3.4. Предположим, что G П-полная, и пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{i\Pi}(G)$, где $\sigma_i \in \Pi$. Тогда

- (i) $\mathcal{L}$ является подрешеткой решетки $\mathcal{L}_{i\Pi}(G)$,
- (ii) если $\mathcal{L}$ модулярна, то $AB = BA$ для всех $A, B \in \mathcal{L}$.

Доказательство. (i) Пусть $A, B \in \mathcal{L}$. Тогда согласно теореме С $\langle A, B \rangle$ и $A \cap B$ — П-перестановочные подгруппы группы G с нильпотентными секциями $\langle A, B \rangle^G / \langle A, B \rangle_G$ и $(A \cap B)^G / (A \cap B)_G$ соответственно. Более того, согласно условию для некоторой холловой σ_i -подгруппы H группы G и для каждого $x \in G$ имеет место $H^x = AH^x = H^x A$, поэтому $A \leq H_G \leq O_{\sigma_i}(G)$. Аналогично $B \leq O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, $\langle A, B \rangle$ и $A \cap B$ — σ_i -группы. Следовательно, $\mathcal{L}$ — подрешетка решетки $\mathcal{L}_{i\Pi}(G)$.

(ii) Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G — контрпример, для которого $|G| + |A| + |B|$ минимально. Тогда $AB \neq BA$, но $A_1 B_1 = B_1 A_1$ для всех $A_1, B_1 \in \mathcal{L}$ таких, что $A_1 \leq A$, $B_1 \leq B$ и либо $A_1 \neq A$, либо $B_1 \neq B$. Пусть $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ — полное холлово П-множество в G . Можно предполагать, не теряя общности, что H_1 — σ_i -группа.

(1) Для любой неединичной нормальной σ_i -подгруппы N группы G имеет место $(AN/N)(BN/N) = (BN/N)(AN/N)$. Следовательно, $A_G = 1 = B_G$.

Прежде всего заметим, что $\{H_1 N / N, \dots, H_t N / N\}$ — полное холлово П-множество в G/N , поэтому G/N П-полна. Более того, AN/N и BN/N — П-перестановочные σ_i -подгруппы в G/N . В силу изоморфизмов

$$\begin{aligned} (A^G N / N) / (A_G N / N) &\simeq A^G N / A_G N \simeq A^G / (A^G \cap A_G N) \\ &= A^G / A_G (A^G \cap N) \simeq (A^G / A_G) / (A_G (A^G \cap N) / A_G) \end{aligned}$$

секция $(A^G N / N) / (A_G N / N)$ нильпотентна, так как A^G / A_G нильпотентна. С другой стороны, $(AN/N)^{G/N} = (AN)^G / N = A^G N / N$ и $A_G N / N \leq (AN/N)_{G/N}$. Следовательно, $(AN/N)^{G/N} / (AN/N)_{G/N}$ нильпотентна, поэтому имеем $AN/N \in \mathcal{L}_{i\Pi}(G/N)$. Аналогично $BN/N \in \mathcal{L}_{i\Pi}(G/N)$.

Пусть теперь H/N — σ_i -подгруппа группы G/N . Тогда H — σ_i -группа. Более того, из предложения 1.2 вытекает, что H/N П-перестановочна в G/N в том

и только в том случае, когда H П-перестановочна в G . Заметим, наконец, что в силу изоморфизма $H^G/H_G \simeq (H^G/N)/(H_G/N) = (H/N)^{G/N}/(H/N)_{G/N}$ секция H^G/H_G является нильпотентной группой в том и только в том случае, когда $(H/N)^{G/N}/(H/N)_{G/N}$ нильпотентна. Следовательно, решетка $\mathcal{L}_{\text{ин}}(G/N)$ изоморфна интервалу $[G/N]$ в модулярной решетке $\mathcal{L}$. Значит, $ANB/N = (AN/N)(BN/N) = (BN/N)(AN/N) = BNA/N$ в силу выбора группы G , поэтому $ANB = BNA$. Следовательно, $A_G = 1 = B_G$, так как $AB \neq BA$.

(2) Подгруппа $A^G B^G$ нильпотентна и $t > 1$.

В силу утверждения (1) A^G , B^G и $W = A^G B^G$ нильпотентны. Предположим, что $t = 1$. Тогда $G = H_1$ — σ_i -группа, поэтому каждая подгруппа L группы W П-перестановочна в G . Понятно также, что секция L^G/L_G нильпотентна. Следовательно, $\mathcal{L}(W)$ является подрешеткой модулярной решетки $\mathcal{L}$. Но тогда $AB = BA$ согласно [11, лемма 2.3.2]. Полученное противоречие показывает, что утверждение (2) верно.

Пусть теперь $O = H_2^G \cdots H_t^G$, $V = \langle A, B \rangle O$ и $R = \langle A, B \rangle \cap O$.

(3) $R = 1$.

Предположим, что $R \neq 1$. Тогда $BRA = \langle A, B \rangle R$ ввиду утверждения (1). Покажем, что $BRA = BR$. Предположим, что это неверно. Тогда $A \cap BR < A$. Более того, $A \cap BR \in \mathcal{L}$ согласно утверждению (i), так как $A, B, R \in \mathcal{L}$, поэтому минимальность $|G| + |A| + |B|$ влечет, что B перестановочна с $A \cap BR$. С другой стороны, B перестановочна с RA , так как $B(RA) = \langle A, B \rangle R$, тем самым $AB = BA$ по лемме 3.3. Полученное противоречие показывает, что $A \leq BR$, поэтому $BRA = BR$.

Согласно условию $BH_j^x = H_j^x B$, значит, $H_j^x \leq N_G(B)$ для каждого $x \in G$ и каждого $j > 1$ в силу [2, лемма 2.6(8)], поскольку H_j^x — σ'_i -группа. Следовательно, $O \leq N_G(B)$. Но тогда $R \leq O \leq N_G(B)$, поэтому B нормальна в BR . Таким образом, $A \leq N_G(B)$, что влечет $AB = BA$. Полученное противоречие показывает, что $R = 1$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ ДЛЯ (ii). Из утверждения (3) вытекает, что $V = \langle A, B \rangle \times O$, поэтому для каждой подгруппы W группы $\langle A, B \rangle$ имеет место $O \leq N_G(W)$ и, следовательно, W П-перестановочна в G . Заметим также, что $\langle A, B \rangle \leq O_{\sigma_i}(G)$ и для каждой подгруппы L группы $\langle A, B \rangle$ секция L^G/L_G нильпотентна согласно утверждению (2). Следовательно, $\mathcal{L}(\langle A, B \rangle)$ — подрешетка модулярной решетки $\mathcal{L}$. Но тогда $AB = BA$ согласно [11, лемма 2.3.2], так как $\langle A, B \rangle$ нильпотентна; противоречие. Следовательно, утверждение (ii) верно.

Лемма 3.5. Предположим, что G П-полная и $\sigma^* \leq \sigma$. Если A — П-подгруппа группы G такая, что $A^G/A_G \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$, то A^G является П-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что данная лемма неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Понятно, что гипотеза выполняется для $(G/A_G, A/A_G)$, поэтому $A_G = 1$, так как в противном случае

$$(A/A_G)^{G/A_G}/(A/A_G)_{G/A_G} = (A^G/A_G)/(A_G/A_G) \simeq A^G/A_G$$

является П-группой в силу выбора группы G и, следовательно, A^G является П-группой. Таким образом, $A \in \mathfrak{N}_{\sigma^*}$, поэтому $A \in \mathfrak{N}_{\sigma}$, так как $\sigma^* \leq \sigma$. Значит, $A = A_1 \times \cdots \times A_t$, где $\{A_1 \times \cdots \times A_t\}$ — полное холлово σ -множество группы A . Таким образом, выбор (G, A) влечет, что $A = A_1$ — σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \in \Pi$. Согласно условию G имеет холлову σ_i -подгруппу H и, следовательно,

$A \leq H_G$ ввиду [2, лемма 2.6(7)]. Но тогда A^G является Π -группой; противоречие. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ D. В силу теоремы C и леммы 3.5 $\mathcal{L}$ — подрешетка решетки $\mathcal{L}(G)$. Более того, если любые две подгруппы $A, B \in \mathcal{L}(G)$ перестановочны, то решетка $\mathcal{L}$ модулярна (см. доказательство предложения 3.4).

Теперь покажем, что если решетка $\mathcal{L}$ модулярна, то любые две подгруппы $A, B \in \mathcal{L}(G)$ перестановочны. Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример, для которого $|G| + |A| + |B|$ минимально.

Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда решетка $\mathcal{L}_{\Pi}(G/R)$ изоморфна интервалу $[G/R]$ в модулярной решетке $\mathcal{L}$ согласно предложению 1.2 (см. доказательство предложения 3.4). Значит, выбор группы G влечет, что $(AR/R)(BR/R) = (BR/R)(AR/R)$. Следовательно, $RAB = \langle A, B \rangle R$ — подгруппа группы G , поэтому $A_G = 1 = B_G$, так как $AB \neq BA$. Значит, A^G и B^G нильпотентны. Минимальность $|G| + |A| + |B|$ влечет, что для некоторого i имеет место $A, B \leq O_{\sigma_i}(G)$, тем самым $A, B \in \mathcal{L}_{i\Pi}(G)$. Но $\mathcal{L}_{i\Pi}(G)$ — подрешетка модулярной решетки $\mathcal{L}_{\Pi}(G)$ согласно предложению 3.4(i). Следовательно, $AB = BA$ ввиду предложения 3.4(ii); противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. V. 4, N 2. P. 281–309.
2. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
3. Skiba A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups // J. Algebra. 2018. V. 495. P. 114–129.
4. Guo W., Skiba A. N. On Π -quasinormal subgroups of finite groups // Monatsh. Math. 2018. V. 185. P. 443–453.
5. Kegel O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.
6. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010.
7. Ballester-Bolinches A. Esteban-Romero R. On finite soluble groups in which Sylow permutability is a transitive relation // Acta Math. Hungar. 2003. V. 101. P. 193–202.
8. Skiba A. N. On finite groups for which the lattice of S-permutable subgroups is distributive // Arch. Math. 2017. V. 109. P. 9–17.
9. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
10. Kimber T. Modularity in the lattice of Σ -permutable subgroups // Arch. Math. 2004. V. 83. P. 193–203.
11. Schmidt R. Subgroup lattices of groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

Поступила в редакцию 13 октября 2018 г.

После доработки 13 октября 2018 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Bin Hu, Jianghong Huang (Ху Бинь, Хуан Цзяньхун)
School of Mathematics and Statistics,
Jiangsu Normal University,
Xuzhou 221116, P.R. China
hubin118@126.com, jhh320@126.com

Скиба Александр Николаевич
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com