A. R. Chekhlov, On fully idempotent homomorphisms of abelian groups, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 932–940

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.418>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.84.234.179
April 26, 2023, 13:10:52

О ВПОЛНЕ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ГОМОМОРФИЗМАХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. Р. Чехлов

Аннотация. Приведены примеры нерегулярных вполне идемпотентных гомоморфизмов и исследуются пары абелевых групп A и B , у которых группа гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна. Показано, что если B — периодическая или смешанная расщепляющаяся группа, а также хотя бы одна из групп A или B делима, то вполне идемпотентность группы гомоморфизмов влечет ее регулярность. Если хотя бы одна из групп A или B есть редуцированная группа без кручения, а их группа гомоморфизмов отлична от нуля, то она не вполне идемпотентна. Изучение вполне идемпотентных групп $\text{Hom}(A, A)$ сведено к редуцированным смешанным группам A с плотной элементарной периодической частью.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.418

Ключевые слова: регулярный гомоморфизм, вполне идемпотентный гомоморфизм, группа гомоморфизмов, смешанная группа, самомалая группа.

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Через $T(A)$ обозначается периодическая часть группы A , через A_p — ее p -компонента, $D(A)$ — делимая и $R(A)$ — редуцированная части, а $D_p(A)$ и $R_p(A)$ — их p -компоненты, $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов, 1_A — тождественный эндоморфизм, $r(A)$ — ранг группы A , $A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$, $A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nA$, $Z(n)$ — циклическая группа порядка n , $Z(p^{\infty})$ — квазициклическая p -группа, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Если $\alpha \in \text{Hom}(A, B)$, то $\alpha|_X$ — ограничение α на подмножество $X \subseteq A$. Подгруппа H группы A называется *чистой*, если $nH = H \cap nA$ для всякого натурального числа n ; *вполне инвариантной*, если $\varphi(H) \subseteq H$ для всякого $\varphi \in E(A)$. Если $\mathfrak{n}$ — некоторое кардинальное число, то через $A^{(\mathfrak{n})}$ обозначается прямая сумма $\mathfrak{n}$ копий группы A .

Пусть $f \in \text{Hom}(A, B)$. Введем следующие обозначения:

$$H_r(f) = \left\{ \sum_i g_i f s_i \mid g_i \in \text{Hom}(B, A), s_i \in \text{Hom}(A, A) \right\},$$

$$H_l(f) = \left\{ \sum_i s_i f g_i \mid g_i \in \text{Hom}(B, A), s_i \in \text{Hom}(B, B) \right\}.$$

Гомоморфизм f называется

- 1) *вполне идемпотентным справа (слева)*, если $f \in f H_r(f)$ ($f \in H_l(f) f$);
- 2) *вполне идемпотентным*, если $f \in \text{Hom}(B, B) f H_r(f)$.

Группа $\text{Hom}(A, B)$ называется *вполне идемпотентной (справа, слева)*, если соответствующим свойством обладает каждый гомоморфизм из $\text{Hom}(A, B)$.

Гомоморфизм $f \in \text{Hom}(A, B)$ называется *регулярным*, если существует такой гомоморфизм $g \in \text{Hom}(B, A)$, что $f = f g f$; гомоморфизм f регулярен

если и только если его ядро и образ — прямые слагаемые в A и B соответственно. Группа $\text{Hom}(A, B)$ называется *регулярной*, если каждый элемент из $\text{Hom}(A, B)$ регулярен. Ясно, что регулярная группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна как справа, так и слева. Вполне идемпотентность определена и изучалась в [1, 2]; в этих статьях получены общие свойства вполне идемпотентной группы $\text{Hom}(A, B)$ в случае, когда A и B — произвольные модули. Регулярные морфизмы изучались, например, в [3–8]; им также посвящена книга [9], в гл. VIII которой рассматриваются регулярные гомоморфизмы абелевых групп. Исследовались и регулярные эндоморфизмы, а также их обобщения (см., например, [10, § 112; 11–15]).

Теорема 1 [1, теорема 1]. Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, где A и B — модули над некоторым кольцом. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева);
- 2) для всех $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$ группа $\text{Hom}(A_i, B_j)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения и теоремы 1 непосредственно следует, что если группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева), а C и G — прямые слагаемые групп A и B соответственно, то условие $\text{Hom}(C, G) \neq 0$ влечет $\text{Hom}(G, C) \neq 0$. Поэтому если, например, B — периодическая группа, а A — группа без кручения, то $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна тогда и только тогда, когда $\text{Hom}(A, B) = 0$. В частности, из вполне идемпотентности $\text{Hom}(A, B)$ в общем случае не следует вполне идемпотентность $\text{Hom}(B, A)$. Кроме того, изучение вполне идемпотентных групп гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$ сводится к случаям, когда обе группы A и B редуцированные или делимые.

ПРИМЕР 1. Если обе группы A и B элементарные или делимые без кручения, то, как известно, группа $\text{Hom}(A, B)$ регулярна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Регулярность групп гомоморфизмов не сохраняется при изоморфизме. Пусть $\Pi \subseteq \mathbb{P}$ и $|\Pi| = \aleph_0$, а A_p для каждого $p \in \Pi$ — ненулевая элементарная p -группа и $A = \prod_{p \in \Pi} A_p$. Тогда из [10, теоремы 43.1, 43.2] вытекает, что группы $\text{Hom}(T(A), T(A))$ и $\text{Hom}(T(A), A)$ изоморфны. Но группа $\text{Hom}(T(A), A)$ не регулярна; из примера 8 следует, что эта группа и не вполне идемпотентна.

Следующий пример показывает, что аналог теоремы 1 в случае, когда A является бесконечной прямой суммой ненулевых групп, несправедлив.

ПРИМЕР 2. Пусть B_p — элементарная p -группа для каждого $p \in \Pi$, где $\Pi \subseteq \mathbb{P}$ и $|\Pi| = \aleph_0$. Тогда если $B = \prod_{p \in \Pi} B_p$, то группа $\text{Hom}(A, B)$, где $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ и все $A_i \cong B$, вполне идемпотентной (соответственно справа, слева) не является.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем все простые числа p_i из множества Π . В каждой группе A_i выделим p_i -компоненту и изоморфно отобразим ее на группу B_{p_i} , дополнительное же к этой p_i -компоненте прямое слагаемое группы A_i переведем в 0. В результате получим $f : A \rightarrow B$ со свойством $\text{Im } f = \bigoplus_{p \in \Pi} B_p$. Поскольку множество Π бесконечное, $nf \neq 0$ для каждого натурального числа n . Далее, равенство $A^1 = 0$ влечет, что образ всякого гомоморфизма $g : B \rightarrow A$ является алгебраической компактной группой. Поэтому найдется такое натуральное n , что подгруппа $ng(B)$ содержится в сумме конечного числа групп

A_i [10, теорема 39.9]. Но тогда умножение на некоторое натуральное число аннулирует произведение fg гомоморфизмов f и g . Отсюда следует, что

$$f \notin fH_r(f) \quad \text{и} \quad f \notin H_l(f)f.$$

Напомним, что группа $\text{Hom}(B, B)$ регулярна (см., например, [10, § 112, упражнение 2]). $\square$

ПРИМЕР 3. Пусть $A = \bigoplus_{p \in \Pi} Z(p)$ и $B = \prod_{p \in \Pi} Z(p)$, где $\Pi \subseteq \mathbb{P}$ и $|\Pi| = \aleph_0$. Тогда каждый вполне идемпотентный (соответственно справа, слева) гомоморфизм $f \in \text{Hom}(A, B)$ является регулярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группу A можно рассматривать как периодическую часть группы B . Всякий гомоморфизм из $\text{Hom}(A, B)$ продолжается до эндоморфизма группы B . Кольцо $E(B)$ коммутативно, поэтому если $f \in \text{Hom}(A, B)$, а $s \in E(A)$, то $fs = s'f$, где $s' \in E(B)$ такой, что $s' \mid A = s$. Значит, если $f \in fH_r(f)$, то

$$f = f(g_1fs_1 + \dots + g_nfs_n) = f(g_1s'_1 + \dots + g_ns'_n)f,$$

т. е. гомоморфизм f регулярен. Аналогично рассматриваются случаи $f \in H_l(f)f$ и $f \in \text{Hom}(B, B)fH_r(f)$. Заметим, что группа $\text{Hom}(A, B)$ регулярной не является, а $f \in \text{Hom}(A, B)$ регулярен в точности тогда, когда f аннулирует почти все p -компоненты группы A . $\square$

Следствие 1. Группа $\text{Hom}(\bigoplus_{p \in \Pi} Z(p), \prod_{p \in \Pi} Z(p))$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева) тогда и только тогда, когда $|\Pi| < \aleph_0$.

Приведем примеры нерегулярных (у них образ не выделяется прямым слагаемым) вполне идемпотентных гомоморфизмов.

ПРИМЕР 4. 1. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$, где

$$A_1 \cong B_1 \cong \left(\bigoplus_{p \in \Pi} Z(p) \right)^{(\aleph_0)}, \quad A_2 \cong \bigoplus_{p \in \Pi} Z(p), \quad B_2 \cong \prod_{p \in \Pi} Z(p),$$

$\Pi \subseteq \mathbb{P}$ и $|\Pi| = \aleph_0$. Тогда $\text{Hom}(A, B)$ содержит нерегулярные гомоморфизмы f такие, что $f = fgfs$, где $g \in \text{Hom}(B, A)$, а $s \in E(A)$.

2. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$, где

$$A_1 \cong B_1 \cong Z(p^2)^{(\aleph_0)}, \quad B_2 \cong Z(p^2), \quad A_2 \cong Z(p).$$

Тогда $\text{Hom}(A, B)$ содержит нерегулярные гомоморфизмы f такие, что $f = sfgef$, где $g \in \text{Hom}(B, A)$, а $s \in E(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $(f \mid A_1) : A_1 \rightarrow B_1$ и $s : A \rightarrow A_1$ — некоторые изоморфизмы, а $(f \mid A_2) : A_2 \rightarrow B_2$ — вложение. Если $g \mid B_1 = (fs)^{-1}$ и $g(B_2) = 0$, то $f = fgfs$.

2. Пусть $(f \mid A_1) : A_1 \rightarrow B_1$ и $g : B \rightarrow A_1$ — некоторые изоморфизмы, а $(f \mid A_2) : A_2 \rightarrow B_2$ — вложение. Если $s \mid B_1 = (fg)^{-1}$ и $s(B_2) = 0$, то $f = sfgef$. $\square$

ПРИМЕР 5. 1. Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$,

$$A_1 \cong \dots \cong A_n \cong B_1 \cong \bigoplus_{p \in \Pi} Z(p), \quad B_2 \cong \dots \cong B_n \cong \prod_{p \in \Pi} Z(p),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Pi \subseteq \mathbb{P}$ и $|\Pi| = \aleph_0$. Тогда $\text{Hom}(A, B)$ содержит нерегулярные вполне идемпотентные справа гомоморфизмы.

2. Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$,

$$A_1 \cong B_1 \cong \dots \cong B_n \cong Z(p^2), \quad A_2 \cong \dots \cong A_n \cong Z(p).$$

Тогда $\text{Hom}(A, B)$ содержит нерегулярные вполне идемпотентные слева гомоморфизмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \text{Hom}(A, B)$ такой, что $(f \mid A_1) : A_1 \rightarrow B_1$ — некоторый изоморфизм, а $(f \mid A_i) : A_i \rightarrow B_i$ — вложения, здесь (и далее) $i = 2, \dots, n$.

1. Выберем $s_1, s_i \in E(A)$ такие, что $s_1 \mid A_1 = 1_{A_1}$, $s_i : A_i \rightarrow A_1$ — некоторые изоморфизмы, а $s_j(A_t) = 0$ при $t \neq j$ и $j, t = 1, \dots, n$. Определим гомоморфизмы $g_j \in \text{Hom}(B, A)$, где $j = 1, \dots, n$, следующим образом:

$$g_j \mid B_1 = (f(s_j \mid A_j))^{-1}, \quad g_j(B_i) = 0.$$

Тогда $g_1 f s_1 + \dots + g_n f s_n = 1_A$. Поэтому $f = f(g_1 f s_1 + \dots + g_n f s_n)$.

2. Выберем $g_1, g_i \in \text{Hom}(B, A)$ такие, что $g_1 \mid B_1 = (f \mid A_1)^{-1}$, $g_i : B_i \rightarrow A_1$ — некоторые изоморфизмы и $g_j(B_t) = 0$ при $j \neq t$, $j, t = 1, \dots, n$. Определим $s_1, s_i \in E(B)$ следующим образом:

$$s_1 \mid B_1 = 1_{B_1}, \quad s_i \mid B_1 = (f(g_i \mid B_i))^{-1}, \quad s_j(B_i) = 0$$

при $j = 1, \dots, n$. Тогда $(s_1 f g_1 + \dots + s_n f g_n) = 1_B$. Поэтому $f = (s_1 f g_1 + \dots + s_n f g_n)f$. $\square$

Предложение 1. 1. Пусть $f : A \rightarrow B$ — гомоморфизм такой, что $f = s f g f$, где $g \in \text{Hom}(B, A)$ и $s \in E(B)$, причем если $\varphi f = 0$ при $\varphi \in E(B)$, то $\varphi = 0$. Тогда $\ker s f$ — прямое слагаемое в A .

2. Пусть $f : A \rightarrow B$ — гомоморфизм такой, что $f = f g f s$, где $s \in E(A)$ и $g \in \text{Hom}(B, A)$, причем если $f \varphi = 0$ при $\varphi \in E(A)$, то $\varphi = 0$. Тогда $\text{Im } f s$ — прямое слагаемое в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из $(1_B - s f g)f = 0$ получаем $1_B = s f g$. Далее $(g s f)(g s f) = g(s f g)s f = g s f$. Так как g — мономорфизм, то $\ker(g s f) = \ker(s f)$. В частности, если f — эпиморфизм, то и $s f$ — эпиморфизм, и в этом случае группа B изоморфна прямому слагаемому в A .

2. Из $f(1_A - g f s) = 0$ получаем $1_A = g f s$. Далее, $(f s g)(f s g) = f s(g f s)g = f s g$. Так как g — эпиморфизм, то $\text{Im}(f s g) = \text{Im}(f s)$. В частности, если f — мономорфизм, то и $f s$ — мономорфизм, и в этом случае группа A изоморфна прямому слагаемому в B . $\square$

Напомним, что если B — ненулевая делимая группа, то $\text{Hom}(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда A — периодическая группа такая, что $A_p = 0$ при $B_p \neq 0$.

Предложение 2. Пусть группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева) и $f \in \text{Hom}(A, B)$. Тогда

- 1) для всякого простого числа p группа $p f(A)$ является p -делимой;
- 2) если $D_p(A) \neq 0$, то $D_p(B) = 0$;
- 3) если $R_p(A), B_p \neq 0$, то $R_p(A)$ и B_p — элементарные группы и $A/A_p = p(A/A_p)$;

4) если $T(A) \subseteq \ker f$, то группа $f(A)$ делима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$pf \in \operatorname{Hom}(B, B)pfH_r(pf) = p^2 \operatorname{Hom}(B, B)fH_r(f),$$

соответственно

$$pf \in pfH_r(pf) = p^2 fH_r(f), \quad pf \in H_l(pf)pf = p^2 H_l(f)f.$$

Отсюда следует, что группа $pf(A)$ является p -делимой и $pf(A_p) = 0$ для каждого $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$. В частности, справедливо условие п. 2. Кроме того, подгруппы $R_p(A), B_p$ могут быть обе ненулевыми лишь в том случае, когда подгруппа $R_p(A)$ элементарна. Элементарность $R_p(A)$ влечет равенство $A = A_p \oplus S$ для некоторой подгруппы $S \subseteq A$. Если $pS \neq S$, то существует гомоморфизм $0 \neq f : A \rightarrow B_p$ со свойством $A_p \subseteq \ker f$. Тогда $fH_r(f) = 0$ и $H_l(f)f = 0$. Поэтому $f \notin fH_r(f)$ и $f \notin H_l(f)f$.

Покажем элементарность подгруппы B_p в п. 3. Если B_p не элементарна, то существует $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ такой, что $f(D_p(A)) = 0$ и $0 \neq f(R_p(A)) \subseteq pB[p]$, где, как обычно, $pB[p] = (pB)[p]$. Тогда f не может принадлежать ни $fH_r(f)$, ни $H_l(f)f$. Действительно, элементарность группы $R_p(A)$ влечет $f(g(pB[p])) = 0$ для всякого $g \in \operatorname{Hom}(B, A)$. Поэтому $fH_r(f) = 0$ и $H_l(f)f = 0$.

Докажем п. 4. Допустим, что $pf(A) \neq f(A)$ для некоторого простого числа p . Тогда $B_p \neq 0$, так как в противном случае из p -делимости подгруппы $pf(A)$ группы B следовала бы p -делимость подгруппы $f(A)$. Поэтому существует такой $0 \neq \varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$, что $\varphi(A) \subseteq B_p$ и $T(A) \subseteq \ker \varphi$. Несложно видеть, что $\varphi H_r(\varphi) = 0$ и $H_l(\varphi)\varphi = 0$. Отсюда $\varphi \notin \varphi H_r(\varphi)$ и $\varphi \notin H_l(\varphi)\varphi$; противоречие. $\square$

Зафиксируем обозначения $A' = \bigoplus_{p \in \Omega} A_p$, $B' = \bigoplus_{p \in \Omega} B_p$, где $\Omega = \{p \in \mathbb{P} \mid A_p, B_p \neq 0\}$.

ПРИМЕР 6. Если B — периодическая элементарная группа, причем подгруппа A' также элементарна и $p(A/A_p) = A/A_p$ при каждом $p \in \Omega$, то группа $\operatorname{Hom}(A, B)$ регулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что если $T(A) \subseteq \ker \varphi$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$, то $\varphi = 0$. Пусть $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$. Тогда $A_p = \ker(f|_{A_p}) \oplus G_p$, $B_p = f(A_p) \oplus C_p$ для каждого $p \in \Omega$. Следовательно, существует $g_p \in \operatorname{Hom}(B_p, A)$ со свойством $(g_p f)|_{G_p} = 1_{G_p}$. Поскольку группа B периодическая, то

$$g = \sum_{p \in \Omega} g_p \in \operatorname{Hom}(B, A).$$

Имеем $T(A) \subseteq \ker(f - f g f)$. Поэтому выполнено равенство $f = f g f$. $\square$

Следствие 2. Для периодической группы B эквивалентны следующие условия:

- 1) группа $\operatorname{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева);
- 2) группа $\operatorname{Hom}(A, B)$ регулярна;
- 3) группы A и B удовлетворяют условиям 2–4 предложения 2, причем нередуцированность группы B влечет периодичность группы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 3). Если группа B нередуцированная и $T(A) \neq A$, то имеется ненулевой гомоморфизм $A/T(A) \rightarrow B$, образ которого лежит в

делимой части группы B , но тогда $D_p(A) \neq 0$ и $D_p(B) \neq 0$ для некоторых p , что противоречит условию 2 предложения 2. Осталось показать, что $3) \Rightarrow 2)$. Из условий следует, что образ всякого гомоморфизма $\alpha : A \rightarrow B$ является элементарным прямым слагаемым группы B' , поэтому он выделяется и в B прямым слагаемым. Пусть

$$H = \ker \alpha \quad \text{и} \quad \Delta = \{p \in \mathbb{P} \mid (A/H)_p \neq 0\}.$$

Из замечания 1 следует, что $\Delta \subseteq \Omega$. Отметим, что H — p -чистая подгруппа в A для всякого $p \in \Delta$. Действительно, если $A = A_p \oplus C$ и $px = h \in H$, то $pA = pC$, поэтому можно считать, что $x \in C$. Если $x \notin H$, то $((H + C)/H)_p$ — ненулевая p -делимая группа, что противоречит элементарности группы $\text{Im } \alpha$. Итак, A/H — прямая сумма элементарных p -групп, где $p \in \Delta$ и H — p -чистая подгруппа при всех $p \in \Delta$. Из [10, теорема 28.1] вытекает, что H — прямое слагаемое в A . Заметим также, что эту импликацию можно было доказать, используя пример 6. $\square$

Следствие 3. Пусть A — делимая группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева);
- 2) группа $\text{Hom}(A, B)$ регулярна;
- 3) если $T(D(B)) \neq 0$, то группа A периодическая и $\text{Hom}(A, B) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 3). В случае $T(D(B)) \neq 0$ периодичность группы A доказана в следствии 2. Равенство $\text{Hom}(A, B) = 0$, где группа A периодична, следует из того, что для каждого простого числа p условие $A_p \neq 0$ влечет $D_p(B) = 0$. $\square$

Итак, если A — непериодическая делимая группа такая, что $\text{Hom}(A, B) \neq 0$, то группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна тогда и только тогда, когда $D(B)$ есть группа без кручения.

Следствие 4. Пусть B — делимая группа такая, что $\text{Hom}(A, B) \neq 0$. Группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева) тогда и только тогда, когда $T(B) = 0$, $R(A)$ — периодическая группа, а $D(A)$ не является периодической группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. $\text{Hom}(A, T(B)) = 0$ ввиду предложения 2 и замечания 1. Если $T(B) \neq 0$, то это возможно лишь в том случае, когда $A_p = 0$ для всякого простого числа p со свойством $B_p \neq 0$, причем A — периодическая группа. Но тогда $\text{Hom}(A, B) = 0$; противоречие. Итак, $T(B) = 0$, т. е. B — группа без кручения; а так как $\text{Hom}(R(A), B) = 0$, группа $R(A)$ периодическая. Группа $D(A)$ не может быть периодической, поскольку в этом случае $\text{Hom}(D(A), B) = 0$ и, значит, $\text{Hom}(A, B) = 0$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Имеем $A = R(A) \oplus T(D(A)) \oplus D_0$, где $0 \neq D_0$ — делимая часть без кручения группы A . Так как группа B без кручения, $R(A) \oplus T(D(A)) \subseteq \ker f$ для всякого гомоморфизма $f : A \rightarrow B$. Поэтому $\ker f$ и $f(A)$ — прямые слагаемые групп A и B соответственно, т. е. группа $\text{Hom}(A, B)$ регулярна. $\square$

Следствие 5. Пусть $\text{Hom}(A, B) \neq 0$ и выполнено хотя бы одно из условий:

- 1) A — редуцированная группа такая, что $A_p = 0$ для всякого простого числа p со свойством $B_p \neq 0$;
- 2) B — редуцированная группа такая, что $B_p = 0$ для всякого простого числа p со свойством $A_p \neq 0$.

Тогда $\text{Hom}(A, B)$ не является вполне идемпотентной (соответственно справа, слева).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа или слева), то в силу предложения 2 подгруппа $f(A)$ является делимой, но тогда ввиду замечания 1 обе группы A и B будут нередуцированными, что противоречит условиям 1 и 2. $\square$

В частности, если хотя бы одна из групп A или B есть редуцированная группа без кручения, а $\text{Hom}(A, B) \neq 0$, то она не является вполне идемпотентной.

Следствие 6. Для расщепляющейся смешанной группы B следующие условия эквивалентны:

- 1) группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева);
- 2) группа $\text{Hom}(A, B)$ регулярна;
- 3) $\text{Hom}(R(A), B/T(R(B))) = 0$, а группы $\text{Hom}(R(A), T(R(B)))$ и $\text{Hom}(D(A), D(B))$ регулярны.

ПРИМЕР 7. Пусть $A = \prod_{p \in P_1} A_p$, $B = \prod_{p \in P_2} B_p$, где A_p, B_p — ненулевые редуцированные p -группы, $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{P}$ и $\text{Hom}(A, B) \neq 0$ (последнее эквивалентно условию $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$). Группа $\text{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентна (соответственно справа, слева) тогда и только тогда, когда при каждом $p \in P_1 \cap P_2$ группы A_p и B_p элементарны (и в этом случае группа $\text{Hom}(A, B)$ регулярна).

Как показывает следующий пример, группа $\text{Hom}(A, B)$ может быть не вполне идемпотентной, даже если группы A и B удовлетворяют условиям предложения 2.

ПРИМЕР 8. Пусть $B = \prod_{p \in \Pi} B_p$, где $0 \neq B_p$ — элементарные p -группы, $\Pi \subseteq \mathbb{P}$, $|\Pi| = \aleph_0$ и A — чистая подгруппа в B , содержащая $T(B)$, такая, что $|A/T(B)| \leq \aleph_0$. Тогда группа $\text{Hom}(A, B)$ не является вполне идемпотентной (соответственно справа, слева).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу алгебраической компактности группы B образ $g(B)$ всякого гомоморфизма $g : B \rightarrow A$ есть копериодическая группа, у которой фактор-группа по периодической части не более чем счетна. Поэтому $g(B)$ будет периодической группой, а редуцированность влечет ее ограниченность [10, § 55, упражнение 8, следствие 54.4]. Значит, $g(B)$ как ограниченная группа, содержится в конечном числе p -компонент группы A ; то же справедливо и для образа всякого гомоморфизма из $H_r(f)$ или из $H_l(f)f$. Отсюда ввиду бесконечности числа p -компонент группы A следует, что если $f : A \rightarrow B$ — вложение, то $f \notin \text{Hom}(B, B)fH_r(f)$ ($f \notin H_l(f)f$). Поскольку A — чистая подгруппа в B , она удовлетворяет условиям предложения 2. $\square$

Из вышедоказанных утверждений вытекает, что в важном частном случае, когда $B = A$, справедлива

Теорема 2. Если группа $\text{Hom}(A, A)$, где $A \neq 0$, вполне идемпотентна (соответственно справа, слева), то A будет одной из следующих групп:

- 1) A — делимая группа без кручения;
- 2) A — элементарная группа;
- 3) A — нередуцированная группа, у которой делимая часть есть группа без кручения, а редуцированная часть является элементарной группой;

4) A — редуцированная смешанная группа с делимой фактор-группой $A/T(A)$ и с элементарной периодической частью $T(A)$.

Группы в пп. 1–3 теоремы 2 имеют регулярное кольцо эндоморфизмов. Группа из п. 4 содержит бесконечное число ненулевых p -компонент, каждая из которых выделяется в ней прямым слагаемым: $A = A_p \oplus S$, где $pS = S$, а фактор-группа $A/T(A)$ делима. Отсюда следует, что A можно рассматривать как чистую подгруппу группы $\prod_{p \in \Pi} A_p$ со свойством

$$\bigoplus_{p \in \Pi} A_p \subseteq A, \quad \text{где } \Pi = \{p \in \mathbb{P} \mid A_p \neq 0\}.$$

Подобные редуцированные группы, необязательно с элементарными p -компонентами, а также связанные с ними категорные вопросы изучались во многих статьях (например, в [11–20]), в [13, 14] они называются *sr-группами*. В [13], в частности, приведена характеристика самомалых *sr-групп*. Группа A называется *самомалой*, если образ всякого гомоморфизма

$$A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i, \quad \text{где } A_i \cong A \text{ и } |I| \geq \aleph_0,$$

содержится в сумме конечного числа слагаемых A_i . Ясно, что если A — самомалая группа, то ввиду теоремы 1 вполне идемпотентность группы

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} A_i\right), \quad \text{где } A_i \cong A,$$

равносильна вполне идемпотентности группы $\text{Hom}(A, A)$.

Не у произвольной *sr-группы* A с элементарными p -компонентами группа $\text{Hom}(A, A)$ будет вполне идемпотентной.

ПРИМЕР 9. Пусть A — *sr-группа* такая, что каждая ее p -компонента A_p изоморфна группе $Z(p)$. Тогда группа $\text{Hom}(A, A)$ служит аддитивной группой коммутативного кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A . Поэтому вполне идемпотентность $\text{Hom}(A, A)$ влечет регулярность кольца $E(A)$. Напомним, что в [11, § 4] приведен пример подобной группы A с нерегулярным кольцом $E(A)$.

ПРИМЕР 10. Пусть A — *sr-группа* с элементарными p -компонентами такая, что для всякого $\alpha \in \text{Hom}(A, B)$, где B — редуцированная периодическая группа, следует, что $\alpha(A)$ содержится в сумме конечного числа компонент B_p (эквивалентно $\alpha(A)$ содержится в сумме конечного числа компонент A_p для всякого $\alpha \in \text{Hom}(A, T(A))$). Тогда группа $\text{Hom}(T(A), A)$ вполне идемпотентной не является, а группа $\text{Hom}(A, T(A))$ регулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения о группе $\text{Hom}(T(A), A)$ доказывается так же, как в примере 8. Пусть $f \in \text{Hom}(A, T(A))$ и Π — конечное множество простых чисел такое, что $f(A) \subseteq \bigoplus_{p \in \Pi} A_p$. Если $A = \left(\bigoplus_{p \in \Pi} A_p\right) \oplus G$, то $G = pG$ для каждого $p \in \Pi$. Значит, $G \subseteq \ker f$. Отсюда ввиду элементарности группы $\bigoplus_{p \in \Pi} A_p$ следует, что ядро и образ гомоморфизма f являются прямыми слагаемыми в A и $T(A)$ соответственно, т. е. f — регулярный гомоморфизм. $\square$

В заключение сформулируем три открытых вопроса.

1. Будет ли регулярной вполне идемпотентная группа $\text{Hom}(A, B)$ в случае периодической группы A ?

2. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$, $\{B_j\}_{j \in J}$ — бесконечные семейства групп; A , B — прямые суммы (произведения или K -прямые суммы) групп A_i , B_j соответственно. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа $\text{Hom}(A, B)$ была вполне идемпотентной (соответственно справа, слева).

3. Описать sr -группы A с вполне идемпотентной группой $\text{Hom}(A, A)$. Будет ли в этом случае группа $\text{Hom}(A, A)$ регулярной?

ЛИТЕРАТУРА

1. Абызов А. Н. Вполне идемпотентность Hom // Изв. вузов. Математика. 2011. № 8. С. 3–8.
2. Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фундам. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 7. С. 3–38.
3. Kasch F. Regularity in Hom // Algebra-Berichte. 1996. V. 75. P. 1–11.
4. Nicholson W. K., Zhou Y. Semiregular morphisms // Commun. Algebra. 2006. V. 34, N 1. P. 219–233.
5. Kasch F., Mader A. Regularity and substructures of Hom // Commun. Algebra. 2006. V. 34, N 4. P. 1459–1478.
6. Kasch F. Regularity and substructures of Hom // Appl. Categ. Structures. 2008. V. 16, N 1–2. P. 159–166.
7. Mader A. Regularity in endomorphism rings // Commun. Algebra. 2009. V. 37, N 8. P. 2823–2844.
8. Hakmi H. Regularity and semipotency of Hom // Korean J. Math. 2014. V. 22, N 1. P. 151–167.
9. Kasch F., Mader A. Regularity and substructures of Hom . Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verl., 2009.
10. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
11. Rangaswamy K. M. Abelian groups with endomorphism images of special types // J. Algebra. 1967. V. 6, N 3. P. 271–280.
12. Fuchs L., Rangaswamy K. M. On generalized regular rings // Math. Z. 1968. Bd 107. S. 71–81.
13. Крылов П. А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундам. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 3. С. 793–812.
14. Крылов П. А., Пахомова Е. Г. Абелевы группы и регулярные модули // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 402–411.
15. Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Commun. Algebra. 1994. V. 22, N 4. P. 1161–1176.
16. Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W. The flat dimension of mixed abelian groups as E -modules // Rocky Mountain J. Math. 1995. V. 25, N 2. P. 569–590.
17. Fomin A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 1. P. 45–52.
18. Fomin A., Wickless W. Sell-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Commun. Algebra. 1998. V. 26, N 11. P. 3563–3580.
19. Яковлев А. В., Н'Фамара Камара. Смешанные абелевы группы конечного ранга и их прямые разложения // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1993. Т. 2, № 8. С. 57–61.
20. Яковлев А. В. Двойственность категорий абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2010. Т. 375. С. 195–202.

Поступила в редакцию 4 сентября 2018 г.

После доработки 4 сентября 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Томский гос. университет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru