M. P. Shushpanov, Finiteness and infiniteness of 3-generated lattices with distributive elements among generators, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 941–948

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.419>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 10:09:43

УДК 512.565

КОНЕЧНОСТЬ И БЕСКОНЕЧНОСТЬ
3–ПОРОЖДЕННЫХ РЕШЕТОК
С ДИСТРИБУТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ
СРЕДИ ПОРОЖДАЮЩИХ
М. П. Шушпанов

Аннотация. Рассматриваются 3-порожденные решетки, у которых среди порождающих есть дистрибутивные и правомодулярные элементы, двойственные к ним, или элементы, обладающие комбинацией этих свойств. Для таких решеток найдены все тройки порождающих, которые гарантируют конечность решетки.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.419

Ключевые слова: дистрибутивный элемент, правомодулярный элемент, конечная решетка, бесконечная решетка.

Дистрибутивные и модулярные решетки, регулярно возникающие в приложениях теории решеток, являются классическими объектами исследований. При изучении недистрибутивных решеток одно из направлений связано с выделением в них элементов, аккумулирующих в себе свойство дистрибутивности. Оре [1] принадлежит

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент d решетки L называется *дистрибутивным*, если

$$\forall x, y \in L \quad d \vee (x \wedge y) = (d \vee x) \wedge (d \vee y).$$

Естественно рассматривать и элементы, дистрибутивные в двойственной решетке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент называется *кодистрибутивным*, если он дистрибутивен в двойственной решетке.

Модулярными ослаблениями дистрибутивности и кодистрибутивности элемента являются условия правомодулярности и коправомодулярности, полученные аналогичным образом из квазитождества модулярности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Элемент d решетки L называется *правомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L \quad x < d \rightarrow x \vee (y \wedge d) = (x \vee y) \wedge d.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент называется *коправомодулярным*, если он правомодулярен в двойственной решетке.

Легко проверяется, что любой дистрибутивный элемент является коправомодулярным.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006).

В [2] найдены необходимые и достаточные условия модулярности и дистрибутивности 3-порожденных решеток с дистрибутивными и правомодулярными элементами среди порождающих. Ясно, что при выполнении найденных условий 3-порожденная решетка оказывается конечной. Однако вопрос о конечности таких решеток в немодулярном случае не затрагивался.

В данной статье рассматриваются 3-порожденные решетки, у которых среди порождающих есть дистрибутивные и правомодулярные элементы, двойственные к ним, или элементы, обладающие комбинацией этих свойств. Будет исследоваться вопрос конечности таких решеток. Для этого удобно принять следующее соглашение: будем говорить, что одна тройка сильнее другой, если есть перестановка элементов в одной из троек, что свойства первого элемента первой тройки влекут наличие свойств первого элемента второй тройки, свойства второго элемента первой тройки влекут наличие свойств второго элемента второй тройки и свойства третьего элемента первой тройки влекут наличие свойств третьего элемента второй тройки. При этом отметим, что для одного или двух элементов тройки может вообще не предполагаться наличия какого-либо из рассматриваемых свойств.

Ради краткости формулировок введем еще два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Элемент называется *вполне дистрибутивным*, если он одновременно дистрибутивен и кодистрибутивен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Элемент называется *вполне правомодулярным*, если он одновременно правомодулярен и коправомодулярен.

Пусть L — произвольная решетка, a, b и c — некоторые ее элементы. Будем использовать следующие обозначения элементов решетки L :

$$t = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a), \quad b_t = b \wedge (c \vee a), \quad c_t = c \wedge (a \vee b),$$

$$c_s = c \vee (a \wedge b), \quad s = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a).$$

Приведем список определяющих соотношений между элементами a, b и c , которые фигурируют в доказательствах этой статьи:

$$a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b), \quad (1)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (a \wedge b), \quad (2)$$

$$b \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c), \quad (3)$$

$$b \wedge (c \vee a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c), \quad (4)$$

$$c \vee (a \wedge b) = (b \vee c) \wedge (c \vee a), \quad (5)$$

$$c \wedge (a \vee b) = (b \wedge c) \vee (c \wedge a). \quad (6)$$

Решетки, удовлетворяющие тем или иным соотношениям из этого списка, рассматривались в [3]. Следующие леммы связывают указанные соотношения с условиями дистрибутивности и правомодулярности.

Лемма 1. В решетке L соотношение $a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$ и правомодулярность b влекут $b \wedge (c \vee a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место равенства $b \wedge (c \vee a) = b \wedge (c \vee a) \wedge (a \vee b) = b \wedge (a \vee (b \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$, где последнее равенство следует из правомодулярности b . $\square$

Лемма 2. Если решетка L порождена элементами a, b и c , то соотношение $a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$ влечет дистрибутивность элемента a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению необходимо (и достаточно) проверить равенство $a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$ для всех x и y из L .

Если $x \leq a$ или $y \leq a$, или x и y сравнимы, то равенство выполнено.

Пусть F — свободная решетка, порожденная элементами a, b и c . Как показано в [4, гл. 4, § 2], все элементы решетки F , которые не меньше a и не равны a , принадлежат объединению $[b \wedge c; (c \vee a) \wedge (a \vee b)] \cup [b; a \vee b] \cup [c; c \vee a] \cup [b \vee c; a \vee b \vee c] \cup [a \vee (b \wedge c); (c \vee a) \wedge (a \vee b)]$, а все элементы, которые не сравнимы с $b \vee c$ и не равны a , принадлежат объединению $[a \vee (b \wedge c); (c \vee a) \wedge (a \vee b)] \cup \{a \vee b\} \cup \{c \vee a\}$. Из соотношения $a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$ следует, что $[a \vee (b \wedge c); (c \vee a) \wedge (a \vee b)] \subseteq [b \wedge c; (c \vee a) \wedge (a \vee b)]$ и $[a \vee (b \wedge c); (c \vee a) \wedge (a \vee b)] = \{(c \vee a) \wedge (a \vee b)\}$.

Если $x \in [b \wedge c; (c \vee a) \wedge (a \vee b)] \cup [b; a \vee b]$ и $y \in [b \wedge c; (c \vee a) \wedge (a \vee b)] \cup [c; c \vee a]$, то $x \wedge y \in [b \wedge c; (c \vee a) \wedge (a \vee b)]$ и $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee (x \wedge y) \leq (c \vee a) \wedge (a \vee b)$. Из соотношения $a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$ следует, что $a \vee (x \wedge y) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$. С другой стороны, $a \vee x \in [a \vee (b \wedge c); a \vee b]$ и $a \vee y \in [a \vee (b \wedge c); c \vee a]$, поэтому $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee x) \wedge (a \vee y) \leq (c \vee a) \wedge (a \vee b)$. Из соотношения $a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$ следует, что $(a \vee x) \wedge (a \vee y) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$.

Если $x \in [b; a \vee b]$ и $y \in [b; a \vee b]$, то $x \wedge y \in [b; a \vee b]$, а $a \vee (x \wedge y) = a \vee b$. С другой стороны, $a \vee x = a \vee b$ и $a \vee y = a \vee b$, поэтому $(a \vee x) \wedge (a \vee y) = a \vee b$.

Если $x = b \vee c$ и $y \in \{(c \vee a) \wedge (a \vee b)\} \cup \{a \vee b\}$, то $a \vee x = a \vee b \vee c$ и $(a \vee x) \wedge (a \vee y) = a \vee y = y$.

Если $x = b \vee c$ и $y = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$, то $a \vee (x \wedge y) = a \vee t = a \vee (b \wedge c)$, так как $t > b \wedge c$. Из соотношения $a \vee (b \wedge c) = (c \vee a) \wedge (a \vee b)$ следует, что $a \vee (x \wedge y) = y$.

Наконец, если $x = b \vee c$ и $y = a \vee b$, то $a \vee (x \wedge y) = a \vee ((a \vee b) \wedge (b \vee c)) = a \vee b = y$, так как $(a \vee b) \wedge (b \vee c) > b$.

В силу a - b -симметрии решетки F и x - y -симметрии равенства дистрибутивности перечисленных проверок достаточно. $\square$

Теорема 1. Пусть решетка порождена тремя элементами. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) один из порождающих элементов вполне дистрибутивен, а другой вполне правомодулярен;

(ii) два порождающих элемента одновременно дистрибутивны и правомодулярны;

(iii) два порождающих элемента вполне дистрибутивны.

Решетка, свободно порожденная тремя элементами, удовлетворяющими условиям (i)–(iii), изоморфна решетке, изображенной на рис. 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — решетка, порожденная элементами a, b и c . Импликации из (iii) в (i) и из (iii) в (ii) очевидны.

Пусть выполнено условие (i), элемент a вполне дистрибутивен, а элемент b вполне правомодулярен. По лемме 1 и по двойственному утверждению к лемме 2 элемент b кодистрибутивен. По двойственному утверждению к лемме 1 и лемме 2 элемент b дистрибутивен. Тем самым выполнено условие (iii).

Пусть выполнено условие (ii), элементы a и b одновременно дистрибутивны и правомодулярны. По лемме 1 и по двойственному утверждению к лемме 2 элементы a и b кодистрибутивны. Тем самым выполнено условие (iii).

Пусть F — решетка, свободно порожденная элементами a, b и c , удовлетворяющими условию (iii), элементы a и b вполне дистрибутивны. В решетке F

Рис. 1

выполнены соотношения (1)–(4), поэтому по теореме 1 из [3] решетка F конечна и является гомоморфным образом решетки, изображенной на рис. 1.

Докажем, что решетка, изображенная на рис. 1, является гомоморфным образом решетки F . Легко видеть, что решетка, изображенная на рис. 1, порождена элементами a , b и c и для них выполняются соотношения (1)–(4). В силу леммы 2 и двойственного к ней утверждения элементы a и b вполне дистрибутивны. Тем самым решетка, изображенная на рис. 1, является гомоморфным образом решетки F . Поскольку решетка F и решетка, изображенная на рис. 1, конечны, они изоморфны. $\square$

Теорема 2. Пусть решетка порождена тремя элементами. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) один из порождающих элементов одновременно дистрибутивен и правомодулярен, второй коправомодулярен, а третий правомодулярен;
- (ii) один из порождающих элементов вполне правомодулярен, второй дистрибутивен, а третий правомодулярен;
- (iii) один из порождающих элементов вполне дистрибутивен, второй дистрибутивен, а третий кодистрибутивен.

Решетка, свободно порожденная тремя элементами, удовлетворяющими условиям (i)–(iii), изоморфна решетке, изображенной на рис. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — решетка, порожденная элементами a , b и c . Импликации из (iii) в (i) и из (iii) в (ii) очевидны.

Пусть выполнено условие (i), элемент a одновременно дистрибутивен и правомодулярен, элемент b коправомодулярен, а элемент c правомодулярен. По лемме 1 и по двойственному утверждению к лемме 2 из дистрибутивности элемента a следует кодистрибутивность элемента c . По двойственному утвержде-

Рис. 2

нию к лемме 1 и по лемме 2 из кодистрибутивности элемента c следует дистрибутивность элемента b . По лемме 1 и по двойственному утверждению к лемме 2 из дистрибутивности элемента b следует кодистрибутивность элемента a . Тем самым выполнено условие (iii).

Пусть выполнено условие (ii), элемент a вполне правомодулярен, элемент b дистрибутивен, а элемент c правомодулярен. По лемме 1 и по двойственному утверждению к лемме 2 из дистрибутивности элемента b следует кодистрибутивность элементов a и c . По двойственному утверждению к лемме 1 и по лемме 2 из кодистрибутивности элемента c следует дистрибутивность элемента a . Тем самым выполнено условие (iii).

Пусть F — решетка, свободно порожденная элементами a , b и c , удовлетворяющими условию (iii), элемент a вполне дистрибутивен, элемент b дистрибутивен, а элемент c кодистрибутивен. В решетке F выполнены соотношения (1)–(3) и (6), поэтому по теореме 2 из [3] решетка F конечна и является гомоморфным образом решетки, изображенной на рис. 2.

Рис. 3

Докажем, что решетка, изображенная на рис. 2, является гомоморфным образом решетки F . Легко видеть, что решетка, изображенная на рис. 2, порождена элементами a , b и c и для них выполняются соотношения (1)–(3) и (6), поэтому в силу леммы 2 и двойственного к ней утверждения элемент a вполне дистрибутивен, элемент b дистрибутивен, элемент c кодистрибутивен. Тем самым решетка, изображенная на рис. 2, является гомоморфным образом решетки F . Поскольку решетка F и решетка, изображенная на рис. 2, конечны, они изоморфны. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМАМ 1 и 2. Решетки, порождающие тройки которых рассмотрены в теоремах, конечны. Разумеется, конечными являются также решетки, порожденные более сильными тройками.

Теорема 3. Решетка, свободно порожденная тремя элементами, один из которых вполне дистрибутивен, а два другие дистрибутивны, бесконечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 и двойственному ей утверждению условия на порождающие элементы из теоремы эквивалентны выполнению в решетке соотношений (1)–(3) и (5). Бесконечность свободной решетки с определяющими соотношениями (1)–(3) и (5) доказана в теореме 3 из [3]. $\square$

Теорема 4. Решетка, свободно порожденная тремя элементами, один из которых одновременно дистрибутивен и правомодулярен, а второй одновременно кодистрибутивен и коправомодулярен, бесконечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — решетка, свободно порожденная тремя элементами, один из которых одновременно дистрибутивен и правомодулярен, а второй одновременно кодистрибутивен и коправомодулярен.

Для доказательства рассмотрим последовательность конечных решеток L_n . На рис. 3 представлена решетка L_n .

Для элементов решетки L_n справедливы соотношения

$$a_1 = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c), \quad b_1 = b_t \vee (c \wedge a),$$

$$a_i = (b_{i-1} \vee c) \wedge a_1, \quad 2 \leq i \leq n, \quad b_i = (a_{i-1} \vee c) \wedge b_1, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$t_1 = (c \vee a) \wedge (b \vee c), \quad t_i = (a_{i-1} \vee c) \wedge (b_{i-1} \vee c), \quad 2 \leq i \leq n.$$

Это означает, что решетка L_n порождена элементами a, b, c . Также в этой решетке выполнены соотношения (2) и (3), поэтому по лемме 2 и двойственному ей утверждению элемент a кодистрибутивен, а элемент b дистрибутивен.

Лемма 3. Элемент a коправомодулярен в L_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению достаточно проверить импликацию $\forall x, y \in L_n \quad a < x \rightarrow x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee a$.

Импликация автоматически выполнена, если x и y сравнимы.

Если $x = c \vee a$, то в проверке нуждается только случай $y \in \{b, b \vee c\}$. Тогда, с одной стороны, $x = x \wedge (a \vee b) \leq x \wedge (y \vee a) \leq x$, с другой стороны, $x = b_t \vee a = (b \wedge (c \vee a)) \vee a = (x \wedge b) \vee a \leq (x \wedge y) \vee a \leq x \vee a = x$.

Если $x = a \vee (b \wedge c)$, то в проверке нуждается только случай $y \in \{c, a_n \vee c\} \cup [b_n; b \vee c] \cup \{b_t, b\}$. Тогда $y \vee a \geq c \vee a$ или $y \vee a \geq b_n \vee a = c \vee a$, или $y \vee a \geq b_t \vee a = c \vee a$; $x \wedge y \geq x \wedge (b \wedge c) = b \wedge c$. С одной стороны, $x = x \wedge (c \vee a) \leq x \wedge (y \vee a) \leq x$, с другой стороны, $x = (b \wedge c) \vee a \leq (x \wedge y) \vee a \leq x \vee a = x$. $\square$

Лемма 4. Элемент b правомодулярен в L_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению достаточно проверить импликацию $\forall x, y \in L_n \quad x < b \rightarrow x \vee (y \wedge b) = (x \vee y) \wedge b$.

Импликация автоматически выполнена, если x и y сравнимы.

Если $x = b \wedge c$, то в проверке нуждается только случай $y \in \{c \wedge a, a\}$. Тогда, с одной стороны, $x \leq x \vee (y \wedge b) \leq x \vee (a \wedge b) = x$, с другой стороны, $x = x \wedge b \leq (x \vee y) \wedge b \leq (x \vee a) \wedge b = (a \vee (b \wedge c)) \wedge b = x$.

Если $x = b_t$, то в проверке нуждается только случай $y \in [c \wedge a; a_1 \vee c] \cup \{a, a \vee (b \wedge c)\}$. Тогда $y \wedge b \leq (a_1 \vee c) \wedge b = b \wedge c$ или $y \wedge b \leq (a \vee (b \wedge c)) \wedge b = b \wedge c$; $x \vee y \leq x \vee (c \vee a) = c \vee a$. С одной стороны, $x \leq x \vee (y \wedge b) \leq x \vee (b \wedge c) = x$, с другой стороны, $x = x \wedge b \leq (x \vee y) \wedge b \leq (c \vee a) \wedge b = b_t = x$. $\square$

Из лемм 3 и 4 получаем, что L_n является 3-порожденной решеткой, у которой порождающий a одновременно кодистрибутивен и коправомодулярен, а порождающий b одновременно дистрибутивен и правомодулярен. Следовательно, она является гомоморфным образом решетки F . Однако решетка L_n содержит $5n + 12$ элементов, поэтому решетка F не может быть конечной, что и доказывает теорему. $\square$

Теорема 5. Следующие тройки:

- вполне дистрибутивный элемент, вполне правомодулярный элемент, произвольный элемент,
- два одновременно дистрибутивных и правомодулярных элемента, произвольный элемент,
- одновременно дистрибутивный и правомодулярный элемент, коправомодулярный элемент, правомодулярный элемент,
- вполне правомодулярный элемент, дистрибутивный элемент, правомодулярный элемент,

а также двойственные к ним исчерпывают все минимальные по силе тройки с дистрибутивными и правомодулярными элементами, двойственными к ним, или элементами, обладающими комбинацией этих свойств, для которых решетка, свободно порожденная такой тройкой, является конечной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечислим все оставшиеся случаи и покажем, что в них решетка может быть бесконечной.

В теореме 3 рассмотрена самая сильная тройка с одним правомодулярным элементом. Такая тройка не гарантирует конечности решетки, поэтому наличие двух правомодулярных элементов среди порождающих является необходимым условием конечности. Двойственное утверждение к теореме 3 показывает, что необходимым условием является также наличие двух коправомодулярных элементов.

Бесконечность решетки, свободно порожденной тремя вполне правомодулярными элементами, доказанная в [5], показывает, что вторым необходимым условием является наличие дистрибутивного или кодистрибутивного элемента.

1. Есть один из порождающих, который не является ни правомодулярным, ни коправомодулярным. Случаи, когда среди двух других вполне правомодулярных порождающих есть вполне дистрибутивный или когда два других вполне правомодулярных порождающих дистрибутивны, рассмотрены в теореме 1. Двойственный случай — два других вполне правомодулярных порождающих кодистрибутивны. Самая сильная из оставшихся троек рассмотрена в теореме 4.

2. Каждый порождающий является правомодулярным или коправомодулярным. В этом случае один из порождающих вполне правомодулярен, второй коправомодулярен, а третий правомодулярен. Дополнительная дистрибутивность первого или второго элемента рассмотрена в теореме 2. Двойственные случаи — дополнительная кодистрибутивность первого или третьего элемента. Дополнительная дистрибутивность третьего элемента в силу леммы 1 и двойственного утверждения к лемме 2 приводит к кодистрибутивности первого элемента, а значит, к конечности решетки в силу утверждения, двойственно к теореме 2. Двойственный случай — дополнительная кодистрибутивность второго элемента. $\square$

Автор благодарит рецензента за сделанные замечания, позволившие исправить имевшиеся неточности и улучшить изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore O. On the foundations of abstract algebra. I // Ann. of Math. 1935. V. 36, N 2. P. 406–437.
2. Гейн А. Г., Шушпанов М. П. Модулярность и дистрибутивность 3-порожденных решеток со специальными элементами среди порождающих // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 1. С. 3–19.
3. Гейн А. Г., Шушпанов М. П. Решетки с определяющими соотношениями, близкими к дистрибутивности // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1267–1275.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
5. Shushpanov M. P. On the embedding of the free lattice of rank 3 in the lattice freely generated by three completely right modular elements // Sib. Electron. Mat. Izv. 2017. V. 14. P. 1215–1219.

Поступила в редакцию 20 августа 2018 г.

После доработки 3 октября 2018 г.

Принята к публикации 17 октября 2018 г.

Шушпанов Михаил Павлович
Уральский федеральный университет,
лаборатория комбинаторной алгебры,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
Mikhail.Shushpanov@gmail.com