V. V. Aseev, Multivalued mappings with the quasimöbius property, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 953–972

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.501>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.172.240.79
April 26, 2023, 14:03:52

УДК 517.54

МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ КВАЗИМЁБИУСОВОСТИ

В. В. Асеев

Аннотация. Продолжается изучение многозначных отображений класса BAD (bounded angular distortion) в птолемеевых мёбиусовых структурах. Доказано, что при некоторых ограничениях на метрические пространства однозначные ветви таких отображений имеют свойство квазимёбиусовости. Найдены условия, обеспечивающие полунепрерывность сверху и непрерывность многозначных отображений класса BAD.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.501

Ключевые слова: мёбиусова структура, мёбиусово пространство, птолемеёво мёбиусово пространство, обобщенные углы, отображения класса BAD.

К 90-летию академика РАН
Юрия Григорьевича Решетняка

Введение

Понятие квазимёбиусова (в частности, квазисимметрического) отображения появилось в 1980-х гг. в работах Вайсяля и Тукиа в качестве аналога свойства квазиконформности для инъективных отображений в произвольных (в частности, дискретных) метрических пространствах. Для отображений областей в $\mathbf{R}^n$ локальная квазимёбиусовость совпадает с квазиконформностью. Ю. Г. Решетняк распространил понятие квазиконформности на неинъективные (неоднолистные) отображения областей в $\mathbf{R}^n$ и ввел в рассмотрение класс отображений с ограниченным искажением (квазимероморфных или квазирегулярных, в терминологии финских математиков), нашедший многочисленные применения в различных областях математического анализа и геометрии.

В связи с этим представляется естественной попытка распространить понятие квазимёбиусовости на случай неинъективных отображений (полу)метрических пространств. Так как определение квазимёбиусовости существенно предполагает инъективность отображения, пришлось ввести аналог свойства квазимёбиусовости для обратного (многозначного) отображения. При этом вместо четверок попарно различных точек рассматриваются четверки попарно не пересекающихся множеств (так называемые обобщенные углы) и для них вводится мёбиусово-инвариантная характеристика — величина обобщенного угла. Условие ограниченности снизу искажения этой характеристики выделяет класс BAD многозначных отображений (полу)метрических пространств. Изучению таких отображений посвящены работы [1–5], и данная статья продолжает это исследование.

Простейший пример таких отображений — отображение, обратное к канонической проекции пространства $\mathbf{R}^n$ на подпространство $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$ (см. [2, § 8]). Основным пример отображений класса BAD, стимулирующий их изучение, — это отображения, обратные к координатным вектор-функциям отображений $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ с ограниченным искажением в смысле Ю. Г. Решетняка. Этот пример подробно изучен в [4], где получены оценки искажения величины обобщенных углов в зависимости от характеристики квазиконформности отображения f .

В [3, § 6] показано, что при некоторых естественных ограничениях на пространство X и Y инъективные отображения класса BAD квазимёбиусовы. Ниже, в § 4, описаны условия (возможно, не самые оптимальные), при которых однозначные ветви отображений класса BAD являются квазимёбиусовыми отображениями.

Естественными объектами при изучении отображений класса BAD служат птолемеевы мёбиусовы пространства, т. е. множества с заданной мёбиусовой структурой (в смысле С. В. Буяло [6]), все полуметрики в которой удовлетворяют неравенству Птолемея. Перенос обычных свойств метрических пространств на мёбиусовы пространства требует представления этих свойств в мёбиусово-инвариантной форме (они не должны зависеть от выбора метрики в заданной мёбиусовой структуре). В § 1 описана операция пополнения мёбиусова пространства и соответствующей мёбиусовой структуры, а также свойство предкомпактности мёбиусова пространства. В [2] было рассмотрено мёбиусово-инвариантное свойство взаимного примыкания «толстых точек» (это образы точек при многозначном отображении) и установлено, что для отображений класса BAD в птолемеевых мёбиусовых пространствах возможны только три схемы расположения толстых точек (см. ниже теорему 2.5). В § 2, 3 подробно изучается первая из этих схем — случай, когда отсутствует пара примыкающих друг к другу толстых точек. В этой ситуации исследована топологическая сходимость толстых точек (§ 3) и установлено свойство полунепрерывности сверху для отображений класса BAD относительно этой сходимости. При этом (теорема 3.2) указаны оценки размера предельной толстой точки по отношению к размерам близких точек («выбросы не могут быть слишком большими»). Изучение двух других схем расположения толстых точек, указанных в теореме 3.2, будет представлено в последующей статье.

Основные определения и терминология. Полуметрики ρ и σ на множестве X , содержащем не менее четырех точек, *мёбиусово эквивалентны*, если

$$\frac{\rho(x_1, x_2) \rho(x_3, x_4)}{\rho(x_1, x_3) \rho(x_2, x_4)} = \frac{\sigma(x_1, x_2) \sigma(x_3, x_4)}{\sigma(x_1, x_3) \sigma(x_2, x_4)}$$

для любых попарно различных точек (x_1, x_2, x_3, x_4) в X . Класс $\mathcal{M}$ мёбиусовой эквивалентности полуметрик на множестве X называется *мёбиусовой структурой*, а пара $(X, \mathcal{M})$ — *мёбиусовым пространством* (см. [6]). Полуметрика ρ на X *птолемеева*, если для всех точек из X выполняется *неравенство Птолемея*:

$$\rho(x_1, x_2) \rho(x_3, x_4) + \rho(x_1, x_4) \rho(x_2, x_3) \geq \rho(x_1, x_3) \rho(x_2, x_4).$$

Это свойство инвариантно относительно мёбиусовой эквивалентности полуметрик и характеризует мёбиусову структуру $\mathcal{M}$, в которой хотя бы одна (а значит, и любая) полуметрика птолемеева.

В птолемеевой мёбиусовой структуре $(X, \mathcal{M})$ всегда существует ограниченная метрика $\rho \in \mathcal{M}$ [2, теорема 1.4]. Топология на X , определяемая этой метрикой, не зависит от выбора метрики $\rho \in \mathcal{M}$ (мёбиусово эквивалентные метрики определяют одну и ту же топологию [3, утверждение 1.2]), поэтому птолемеева мёбиусова структура $(X, \mathcal{M})$ корректно задает на X метрическую топологию. По умолчанию считаем, что в птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ множество X наделено именно этой топологией.

В птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ величина

$$\alpha(a_1, a_2; b_1, b_2) := \frac{\rho(a_1, a_2) \rho(b_1, b_2)}{\rho(a_1, b_1) \rho(a_2, b_2) + \rho(a_1, b_2) \rho(a_2, b_1)}$$

определена для всех тетрад $(a_1, a_2; b_1, b_2)$, имеющих более двух различных точек, не зависит от выбора полуметрики $\rho \in \mathcal{M}$ и удовлетворяет неравенству $0 \leq \alpha(a_1, a_2; b_1, b_2) \leq 1$. При любых $a \neq b$ полагаем $\alpha(a, a; a, b) = \alpha(a, a; b, a) = \alpha(a, b; a, a) = \alpha(b, a; a, a) = 1$.

Четверку подмножеств $\Psi = (A_1, A_2; B_1, B_2)$ в X называем *обобщенным углом*, если $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$ и $B_1 \cup B_2$ содержит не менее двух различных точек. Множества A_1, A_2 называем *сторонами*, а множества B_1, B_2 — *вершинами* обобщенного угла Ψ (случаи $A_1 = \emptyset$ и/или $A_2 = \emptyset$ допускаются).

В птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ обобщенному углу Ψ сопоставляется его *величина*

$$\alpha(\Psi) := \inf_{a_1 \in A_1; a_2 \in A_2} \sup_{b_1 \in B_1; b_2 \in B_2} \alpha(a_1, a_2; b_1, b_2)$$

(инфимум по $\emptyset$ полагается равным 1), не зависящая от выбора полуметрики $\rho \in \mathcal{M}$. Многозначное отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ называем *гиперинъективным*, если $F(a) \cap F(b) = \emptyset$ равносильно тому, что $a \neq b$. Такое отображение переводит обобщенные углы в обобщенные углы и имеет левое обратное отображение $f = F^{-1} : F(X) \rightarrow X$.

Для монотонно возрастающей функции $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$, $\omega(0) = 0$, гиперинъективное отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ в птолемеевых мёбиусовых структурах $(X, \mathcal{M})$ и $(Y, \mathcal{M}')$ имеет свойство ω -BAD ($\equiv$ принадлежит классу ω -BAD), если $\alpha(F(\Psi)) \geq \omega(\alpha(\Psi))$ для любого обобщенного угла Ψ в X . Заменяв функцию $\omega(t)$ функцией $\min\{1, \omega(t)\}$, всегда можно считать, что в этом определении $\omega(1) \leq 1$.

§ 1. Пополнение мёбиусова пространства

Применяя стандартный алгоритм пополнения метрического пространства (X, ρ) , показываем, что множество $\tilde{X}$ классов эквивалентности фундаментальных последовательностей (последовательностей Коши) в X не зависит от выбора ограниченной метрики ρ в мёбиусовой структуре $\mathcal{M}$ на X , и задаем на $\tilde{X}$ мёбиусову структуру $\tilde{\mathcal{M}}$, содержащую продолжение $\tilde{\rho}$ ограниченной метрики $\rho \in \mathcal{M}$ на множество $\tilde{X}$.

1.1. Утверждение. Фундаментальная последовательность в метрическом пространстве (X, ρ) остается фундаментальной в любой ограниченной метрике σ , мёбиусово эквивалентной метрике ρ .

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — мёбиусова структура на X , содержащая метрику ρ . Фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset (X, \rho)$ либо имеет предел $x_0 \in X$, либо не имеет предельных точек в X (см. [7, § 33.П, теорема 2]).

Если существует предел $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то в силу единственности метрической топологии в мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ (см. [3, утверждение 1.2]) $\{x_n\}$ имеет тот же предел в любой метрике $\sigma \in \mathcal{M}$ и, следовательно, является фундаментальной последовательностью (X, σ) (см. [7, § 33.П, теорема 1]).

Пусть $\{x_n\}$ не имеет предельных точек в (X, ρ) . Фиксируем произвольную пару различных точек $a, b \in X$. Так как ни одна из них не является предельной для $\{x_n\}$, найдутся $\delta > 0$ и номер N_1 такие, что $\rho(x_n, a) > \delta$ и $\rho(x_n, b) > 0$ при всех $n \geq N_1$. Используя ограниченность метрики $\sigma(.,.) \leq M_\sigma$ и мёбиусову эквивалентность метрик σ и ρ :

$$\frac{\sigma(x_k, x_s)\sigma(a, b)}{\sigma(x_k, a)\sigma(x_s, b)} = \frac{\rho(x_k, x_s)\rho(a, b)}{\rho(x_k, a)\rho(x_s, b)},$$

получаем оценку

$$\sigma(x_k, x_s) = \frac{\rho(a, b)\sigma(x_k, a)\sigma(x_s, b)}{\sigma(a, b)\rho(x_k, a)\rho(x_s, b)}\rho(x_k, x_s) \leq \rho(x_k, x_s) \left(\frac{M_\sigma^2 \rho(a, b)}{\delta^2 \sigma(a, b)} \right),$$

верную при всех $k, s > N_1$. Так как $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в метрике ρ , для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_2 > N_1$ такой, что $\rho(x_k, x_s) < \varepsilon \cdot (\delta^2 \sigma(a, b)) / (M_\sigma^2 \rho(a, b))$ при всех $k, s > N_2$. Это дает оценку $\sigma(x_k, x_s) < \varepsilon$ при $k, s > N_1$ и означает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в метрике σ . Утверждение доказано.

Итак, семейство $\mathcal{S}$ всех фундаментальных последовательностей X относительно ограниченной метрики $\rho \in \mathcal{M}$ не зависит от выбора этой ограниченной метрики в мёбиусовой структуре $\mathcal{M}$. Следовательно, свойство полноты ограниченного метрического пространства (X, ρ) также не зависит от выбора ограниченной метрики $\rho \in \mathcal{M}$, что позволяет говорить о *полноте* птолемеева мёбиусова пространства $(X, \mathcal{M})$ (или птолемеевой мёбиусовой структуры $\mathcal{M}$ на X).

Конструкция пополнения птолемеева мёбиусова пространства $(X, \mathcal{M})$ реализуется обычным образом (см. [8, 4.5.6]): последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{S}$ считаем эквивалентными, $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, если последовательность $\{z_n\}$, где $z_{2k-1} = x_k, z_{2k} = y_k, k = 1, 2, \dots$, также принадлежит $\mathcal{S}$. Таким образом, получаем семейство $\tilde{X}$ классов эквивалентности $\mathcal{S} / \sim$ и каждую точку $x \in X$ отождествляем с классом эквивалентности, содержащим постоянную последовательность $\{x_n \equiv x\}$. Определив расстояние $\tilde{\rho}$ между классами эквивалентности в $\mathcal{S}$ формулой $\tilde{\rho}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$ (легко проверяется существование этого предела и его независимость от выбора представителей из классов эквивалентности $[\{x_n\}]$ и $[\{y_n\}]$), получим корректно определенное продолжение $\tilde{\rho}$ ограниченной метрики $\rho \in \mathcal{M}$ на $\tilde{X}$. При этом мёбиусова эквивалентность ограниченных метрик ρ и σ равносильна мёбиусовой эквивалентности их продолжений $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\sigma}$ на $\tilde{X}$. Мёбиусову структуру $\tilde{\mathcal{M}}$ на $\tilde{X}$, содержащую метрику $\tilde{\rho}$ для некоторой ограниченной метрики $\rho \in \mathcal{M}$, будем считать пополнением мёбиусовой структуры $\mathcal{M}$ на X . В метрической топологии пространство X плотно в пространстве $\tilde{X}$.

Напомним, что метрическое пространство (X, ρ) называется *вполне ограниченным* (или *предкомпактным*), если для любого $\varepsilon > 0$ оно покрывается конечным набором открытых шаров радиуса ε . Пространство (X, ρ) вполне ограничено в том и только в том случае, когда его пополнение $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ есть компакт (см.

[8, 4.3.30]). Если $(X, \mathcal{M})$ — птолемеево мёбиусово пространство и (X, ρ) вполне ограничено в некоторой метрике $\rho \in \mathcal{M}$, то его пополнение $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}})$ компактно в своей метрической топологии и, следовательно, пространство $(\tilde{X}, \tilde{\sigma})$ вполне ограничено для любой ограниченной метрики $\sigma \in \mathcal{M}$. Значит, подпространство (X, σ) в $(\tilde{X}, \tilde{\sigma})$ также вполне ограничено. Это приводит к определению: птолемеево мёбиусово пространство $(X, \mathcal{M})$ называется *вполне ограниченным* (*предкомпактным*), если его пополнение $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}})$ компактно в своей метрической топологии.

§ 2. О замыкании отображений со свойством BAD

Через $\text{Cl}_X(A)$ обозначаем замыкание множества A в топологическом пространстве X , содержащем это множество. Если из контекста ясно, в каком объёмлющем пространстве выполняется замыкание, то используем обычное обозначение $\bar{A}$ (или же $\text{Cl}(A)$ в случае, когда выражение для A состоит из нескольких символов).

В [2, лемма 3.3] отмечено, что для любого обобщенного угла $\Psi = (A_1, A_2; B_1, B_2)$ в птолемеевой мёбиусовой структуре $(X, \mathcal{M})$ верно равенство

$$\alpha(A_1, A_2; \bar{B}_1, \bar{B}_2) = \alpha(A_1, A_2; B_1, B_2). \quad (2.1)$$

В общем случае аналогичное равенство для замыкания сторон обобщенного угла может не выполняться. К примеру, в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, наделенной хордовой метрикой, для обобщенного угла Ψ со сторонами $A_1 = \{\text{Im} = 0, -1 \leq \text{Re} < 0\}$, $A_2 = \{0\}$ и вершинами $B_1 = \{\infty\}$, $B_2 = \{0\}$ имеем $\alpha(\Psi) = 1$, но $\alpha(\bar{A}_1, A_2; B_1, B_2) = 0$ (см. [2, (3.1.4)]).

2.2. Лемма. Если обобщенный угол $\Psi = (A_1, A_2; B_1, B_2)$ в птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ таков, что

$$(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2) = \emptyset, \quad (2.2.1)$$

то

$$\alpha(\bar{A}_1, \bar{A}_2; \bar{B}_1, \bar{B}_2) = \alpha(A_1, A_2; B_1, B_2). \quad (2.2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A_1 = \emptyset$ и/или $A_2 = \emptyset$, то $\alpha(\bar{A}_1, \bar{A}_2; \bar{B}_1, \bar{B}_2) = 1 = \alpha(\Psi)$ (см. [2, (3.1.3)]). Если $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, то $\alpha(\Psi) = 0 = \alpha(\bar{A}_1, \bar{A}_2; \bar{B}_1, \bar{B}_2)$ (см. [2, (3.1.4)]). Поэтому достаточно получить (2.2.2) в случае $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. В силу [2, лемма 3.3] можно без ограничения общности считать, что B_1 и B_2 — замкнутые множества. Фиксируем ограниченную метрику $\rho \in \mathcal{M}$ и докажем равенство

$$\alpha(\bar{A}_1, A_2; B_1, B_2) = \alpha(\Psi). \quad (2.2.3)$$

Пусть $\bar{A}_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Тогда $\alpha(\bar{A}_1, A_2; B_1, B_2) = 0$ (см. [2, (3.1.4)]). Используя условие (2.2.1), отметим точку $c \in (\bar{A}_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)$ и положим $d := \text{dist}_\rho(c, B_1 \cup B_2) = \inf\{\rho(c, x) : x \in B_1 \cup B_2\} > 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеется точка $a \in A_1$ такая, что $\rho(c, a) < \varepsilon$ и $a \notin B_1 \cup B_2$. Тогда

$$\alpha(A_1, A_2; B_1, B_2) \leq \sup_{b_j \in B_j} \alpha(a, c; b_1, b_2) \leq \frac{\varepsilon}{d} \sup_{b_j \in B_j} \frac{\rho(b_1, b_2)}{\rho(a, b_1) + \rho(a, b_2)} \leq \frac{\varepsilon}{d},$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ дает равенство $\alpha(A_1, A_2; B_1, B_2) = 0$ и, следовательно, требуемое равенство (2.2.3).

Поэтому далее достаточно считать, что $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ и $\bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$. Тогда применение леммы 3.2 из [2] приводит к равенствам

$$\begin{aligned}\alpha(\bar{A}_1, A_2; B_1, B_2) &= \alpha(\bar{A}_1 \setminus (B_1 \cup B_2), A_2 \setminus (B_1 \cup B_2); B_1, B_2), \\ \alpha(A_1, A_2; B_1, B_2) &= \alpha(A_1 \setminus (B_1 \cup B_2), A_2 \setminus (B_1 \cup B_2); B_1, B_2),\end{aligned}$$

что позволяет ограничиться случаем, когда B_1, B_2 — замкнутые множества и при этом

$$A_1 \neq \emptyset \neq A_2, \quad \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad (\bar{A}_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \emptyset.$$

Тогда $d(x) := \inf\{\rho(x, b) : b \in B_1 \cup B_2\} > 0$ для любой точки $x \in \bar{A}_1$.

Пусть задана точка $a \in A_2$. Для произвольно фиксированной точки $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1$ рассмотрим функцию

$$f(x; b_1, b_2) := \frac{\rho(x, b_1)\rho(a, b_2) + \rho(x, b_2)\rho(a, b_1)}{\rho(\bar{a}_1, b_1)\rho(a, b_2) + \rho(\bar{a}_1, b_2)\rho(a, b_1)}$$

на множестве $\bar{A}_1 \times B_1 \times B_2$. Из неравенств

$$\begin{aligned}\rho(\bar{a}_1, b_1)\rho(a, b_2) + \rho(\bar{a}_1, b_2)\rho(a, b_1) &\geq d(\bar{a}_1)(\rho(a, b_2) + \rho(a, b_1)), \\ |(\rho(x, b_1)\rho(a, b_2) + \rho(x, b_2)\rho(a, b_1)) - (\rho(\bar{a}_1, b_1)\rho(a, b_2) + \rho(\bar{a}_1, b_2)\rho(a, b_1))| \\ &\leq \rho(a, b_2)|\rho(x, b_1) - \rho(\bar{a}_1, b_1)| + \rho(a, b_1)|\rho(x, b_2) - \rho(\bar{a}_1, b_2)| \\ &\leq \rho(a, b_2)\rho(x, \bar{a}_1) + \rho(a, b_1)\rho(x, \bar{a}_1) = \rho(x, \bar{a}_1)(\rho(a, b_2) + \rho(a, b_1))\end{aligned}$$

вытекает оценка

$$|f(x; b_1, b_2) - 1| \leq \frac{\rho(x, \bar{a}_1)}{d(\bar{a}_1)},$$

дающая равномерную относительно $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ сходимость $f(x; b_1, b_2) \Rightarrow 1$ при $x \rightarrow \bar{a}_1$, $x \in \bar{A}_1$, и, следовательно, равномерную на $B_1 \times B_2$ сходимость при $x \rightarrow \bar{a}_1$, $x \in \bar{A}_1$,

$$\frac{\alpha(\bar{a}_1, a; b_1, b_2)}{\alpha(x, a; b_1, b_2)} = \frac{\rho(\bar{a}_1, a)}{\rho(x, a)} \cdot f(x; b_1, b_2) \Rightarrow 1.$$

Значит, для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ имеется точка $a^0 \in A_1$, для которой неравенство $\alpha(a^0, a; b_1, b_2) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(\bar{a}_1, a; b_1, b_2)$ выполняется при всех $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$. Взяв супремум по $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ в обеих частях неравенства, получим оценку

$$\inf_{a_1 \in A_1} \sup_{b_j \in B_j} \alpha(a_1, a; b_1, b_2) \leq \sup_{b_j \in B_j} \alpha(a^0, a; b_1, b_2) \leq (1 + \varepsilon) \sup_{b_j \in B_j} \alpha(\bar{a}_1, a; b_1, b_2),$$

справедливую при любом $\varepsilon > 0$. Устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем неравенство

$$\inf_{a_1 \in A_1} \sup_{b_j \in B_j} \alpha(a_1, a; b_1, b_2) \leq \sup_{b_j \in B_j} \alpha(\bar{a}_1, a; b_1, b_2),$$

верное при любом выборе точки $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1$. Следовательно,

$$\inf_{a_1 \in A_1} \sup_{b_j \in B_j} \alpha(a_1, a; b_1, b_2) \leq \inf_{\bar{a}_1 \in \bar{A}_1} \sup_{b_j \in B_j} \alpha(\bar{a}_1, a; b_1, b_2).$$

Взяв в полученном неравенстве инфимум по $a \in A_2$, получаем $\alpha(A_1, A_2; B_1, B_2) \leq \alpha(\bar{A}_1, A_2; B_1, B_2)$. Обратное неравенство тривиально вытекает из включения $A_1 \subset \bar{A}_1$. Таким образом, (2.2.3) доказано.

Так как перестановка сторон не влияет на величину обобщенного угла, используя свойство (2.2.3), получим требуемое соотношение:

$$\begin{aligned}\alpha(\Psi) &= \alpha(A_1, A_2; \bar{B}_1, \bar{B}_2) = \alpha(\bar{A}_1, A_2; \bar{B}_1, \bar{B}_2) = \alpha(A_2, \bar{A}_1; \bar{B}_1, \bar{B}_2) \\ &= \alpha(\bar{A}_2, \bar{A}_1; \bar{B}_1, \bar{B}_2) = \alpha(\bar{A}_1, \bar{A}_2; \bar{B}_1, \bar{B}_2).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

2.3. Теорема. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M}')$ имеет свойство ω -BAD. Если отображение $\bar{F} : X \rightarrow 2^Y$, заданное формулой $\bar{F}(x) = \text{Cl}_Y(F(x))$, гиперинъективно, то оно обладает свойством ω -BAD с той же контрольной функцией ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в [2, лемма 4.2], достаточно установить оценку $\alpha(\bar{F}(\Psi)) \geq \omega(\alpha(\Psi))$ для обобщенных углов $\Psi = (\{a_1\}, \{a_2\}; \{b_1\}, \{b_2\})$ с попарно различными точками a_1, a_2, b_1, b_2 из X . Условие гиперинъективности отображения $\bar{F}$ гарантирует выполнение требования (2.2.1) для обобщенного угла $F(\Psi) = (F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2))$, поэтому лемма 2.2 дает соотношение $\alpha(\bar{F}(\Psi)) = \alpha(F(\Psi)) \geq \omega(\alpha(\Psi))$. Теорема доказана.

Множества A и B в полуметрическом пространстве (X, ρ) называем *примыкающими* друг к другу, если $\text{dist}_\rho(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} = 0$. Это отношение между множествами в общем случае зависит от выбора полуметрики ρ в мёбиусовой структуре $(X, \mathcal{M})$, однако справедливо

2.4. Утверждение. Если в птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ множества $A, B \subset X$ примыкают друг к другу в какой-нибудь метрике из $\mathcal{M}$, то они примыкают друг к другу в любой ограниченной метрике $\sigma \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то A и B примыкают друг к другу в любой метрике на X . Если $A = \{a\}$ — одноточечное множество, то $\text{dist}_\rho(\{a\}, B) = 0$ равносильно тому, что $a \in \bar{B}$ в метрической топологии мёбиусовой структуры $(X, \mathcal{M})$. Значит, $\text{dist}_\sigma(\{a\}, B) = \text{dist}_\sigma(\{a\}, \bar{B}) = 0$ в любой метрике $\sigma \in \mathcal{M}$.

Пусть $A \cap B = \emptyset$, $\rho \in \mathcal{M}$ — ограниченная метрика, $\rho(.,.) \leq M_\rho$, и каждое из множеств A, B содержит две различные точки, т. е. $\text{diam}(A) > 0$, $\text{diam}(B) > 0$ в любой метрике на X . Так как $\text{dist}_\rho(A, B) = 0$, для любого натурального n найдутся точки $a_n \in A$, $b_n \in B$, для которых $\rho(a_n, b_n) < 1/n$. Найдутся также точки $c_n \in A$ и $d_n \in B$ такие, что $\rho(a_n, c_n) \geq (1/2)\text{diam}_\rho(A)$ и $\rho(b_n, d_n) \geq (1/2)\text{diam}_\rho(B)$. Пусть $\sigma \in \mathcal{M}$ — произвольная ограниченная метрика, $\sigma(.,.) \leq M_\sigma$. Тогда из неравенства

$$\frac{(\text{dist}_\sigma(A, B))^2}{M_\sigma^2} \leq \frac{\sigma(a_n, b_n)\sigma(c_n, d_n)}{\sigma(a_n, c_n)\sigma(b_n, d_n)} = \frac{\rho(a_n, b_n)\rho(c_n, d_n)}{\rho(a_n, c_n)\rho(b_n, d_n)} \leq \frac{4M_\rho/n}{\text{diam}_\rho(A)\text{diam}_\rho(B)}$$

следует, что $\text{dist}_\sigma(A, B) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. A и B примыкают друг к другу в метрике σ .

Таким образом, если A и B примыкают друг к другу в какой-нибудь ограниченной метрике из $\mathcal{M}$, то они примыкают друг к другу в любой другой ограниченной метрике из $\mathcal{M}$.

Пусть $\rho \in \mathcal{M}$ — произвольная метрика из $\mathcal{M}$ и множества A, B примыкают друг к другу в метрике ρ . Фиксируем пару различных точек $x_0, y_0 \in X$ и построим для ρ ограниченную метрику $\sigma \in \mathcal{M}$ по формуле, указанной в [2, теорема 4.1]:

$$\sigma(x, y) := \frac{\rho(x, y)}{(\rho(x, x_0) + \rho(x, y_0))(\rho(y, x_0) + \rho(y, y_0))} \leq \frac{\rho(x, y)}{[\rho(x_0, y_0)]^2}.$$

Из этого неравенства следует, что A и B примыкают друг к другу в ограниченной метрике σ . Тогда в силу доказанного выше они примыкают друг к другу в любой ограниченной метрике из $\mathcal{M}$.

Утверждение доказано.

Образ $F(x)$ точки $x \in X$ при отображении $F : X \rightarrow 2^Y$ будем называть *толстой точкой*. Имеет место

2.5. Теорема [2, теорема 6.1]. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M}')$ имеет свойство ω -BAD. Тогда при любом выборе метрики $\sigma \in \mathcal{M}'$ реализуется одна из трех возможных ситуаций:

(I) не существует различных толстых точек в (Y, σ) , примающихся друг к другу;

(II) существуют такие две различные толстые точки $F(p)$ и $F(q)$ в (Y, σ) , не примыкающие друг к другу, что любая толстая точка, отличная от $F(q)$, примыкает к $F(p)$;

(III) любые две толстые точки в (Y, σ) примыкают друг к другу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулировка этой теоремы в [2] содержит условие ограниченности метрики σ , которое не используется в доказательстве, поэтому является лишним.

2.6. Теорема. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M}')$ обладает свойством ω -BAD и имеет три толстые точки, попарно не примыкающие друг к другу в некоторой метрике $\sigma \in \mathcal{M}'$. Тогда отображение $\bar{F} : X \rightarrow 2^Y$, $\bar{F}(x) := \text{Cl}_Y(F(x))$, гиперинъективно и обладает свойством ω -BAD с той же контрольной функцией ω . При этом левое обратное к $\bar{F}$ отображение $f : \bar{F}(X) \rightarrow X$ равномерно непрерывно на $\bar{F}(X)$ при любом выборе ограниченных метрик из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наличие трех толстых точек, попарно не примыкающих друг к другу в метрике $\sigma \in \mathcal{M}'$, означает, что в теореме 2.5 реализуется ситуация (I). Значит, для любой пары различных точек $a \in X$, $b \in X$ множества $\text{Cl}_Y(F(a))$ и $\text{Cl}_Y(F(b))$ не пересекаются. Следовательно, отображение $\bar{F} : X \rightarrow 2^Y$, $\bar{F}(x) = \text{Cl}_Y(F(x))$ гиперинъективно, и теорема 2.3 дает свойство ω -BAD у отображения $\bar{F}$.

Пусть даны ограниченные метрики $\sigma \in \mathcal{M}'$ и $\rho \in \mathcal{M}$, $\sigma(.,.) \leq M_\sigma$, $\rho(.,.) \leq M_\rho$, и фиксированы точки $z_1, z_2, z_3 \in X$ с попарными расстояниями $\geq d_0 > 0$. Толстые точки $Z_j = \bar{F}(z_j)$ ($j = 1, 2, 3$) попарно не примыкают друг к другу в метрике σ на Y , поэтому $\min\{\text{dist}_\sigma(Z_i, Z_j) : i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j\} \geq D_0 > 0$.

Для любых $a_1, a_2 \in X$ и любой пары различных индексов $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\alpha(a_1, a_2; z_i, z_j) = \frac{\rho(a_1, a_2)\rho(z_i, z_j)}{\rho(a_1, z_i)\rho(a_2, z_j) + \rho(a_1, z_j)\rho(a_2, z_i)} \geq \rho(a_1, a_2) \frac{d_0}{2M_\rho^2}. \quad (2.6.1)$$

Для любых $u_1 \in A_1 = \bar{F}(a_1)$, $u_2 \in A_2 = \bar{F}(a_2)$ найдется такая пара различных индексов $i, j \in \{1, 2, 3\}$, что $\text{dist}_\sigma(u_1, Z_i) \geq D_0/4$ и $\text{dist}_\sigma(u_2, Z_j) \geq D_0/4$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(u_1, u_2; Z_i, Z_j) &= \sup_{v_i \in Z_i, v_j \in Z_j} \alpha(u_1, u_2; v_i, v_j) \\ &= \sup_{v_i \in Z_i, v_j \in Z_j} \frac{\sigma(u_1, u_2)\sigma(v_i, v_j)}{\sigma(u_1, v_i)\sigma(u_2, v_j) + \sigma(u_1, v_j)\sigma(u_2, v_i)} \\ &\leq \sigma(u_1, u_2) \sup_{v_i \in Z_i, v_j \in Z_j} \frac{\sigma(v_i, v_j)}{(D_0/4)(\sigma(u_2, v_i) + \sigma(u_2, v_j))} \leq \sigma(u_1, u_2) \frac{4}{D_0}. \end{aligned}$$

Взяв в этой оценке инфимум по всем $u_1 \in A_1$, $u_2 \in A_2$, получаем неравенство

$$\alpha(A_1, A_2; Z_1, Z_2) \leq \frac{4}{D_0} \inf_{u_1 \in A_1, u_2 \in A_2} \sigma(u_1, u_2) = \frac{4}{D_0} \text{dist}_\sigma(A_1, A_2). \quad (2.6.2)$$

Воспользовавшись свойством ω -BAD отображения $\bar{F}$ и неравенствами (2.6.1), (2.6.2), приходим к оценке

$$\rho(a_1, a_2) \leq \frac{2M_\rho^2}{d_0} \omega^{-1} \left(\frac{4}{D_0} \text{dist}_\sigma(A_1, A_2) \right),$$

означающей, что для любых $u_1, u_2 \in \bar{F}(X)$

$$\rho(f(u_1), f(u_2)) \leq \frac{2M_\rho^2}{d_0} \omega^{-1} \left(\frac{4}{D_0} \sigma(u_1, u_2) \right).$$

Это дает равномерную непрерывность отображения $f : (\bar{F}(X), \sigma) \rightarrow (X, \rho)$ метрических пространств.

Теорема доказана.

2.7. Следствие. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^Y$, $Y = F(X)$, в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M}')$ имеет свойство ω -BAD и $(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{M}}')$ — пополнение мёбиусова пространства $(Y, \mathcal{M}')$. Если в Y существуют три толстые точки, попарно не примыкающие друг к другу в какой-нибудь ограниченной метрике $\sigma \in \mathcal{M}'$, то отображение $\tilde{F} : X \rightarrow 2^{\tilde{Y}}$, заданное формулой $\tilde{F}(x) := \text{Cl}_{\tilde{Y}}(F(x))$, гиперинъективно, обладает свойством ω -BAD и $F(x) = \tilde{F}(x) \cap Y$ для любого $x \in X$. При этом левое обратное к F отображение $f : Y \rightarrow X$ продолжается по непрерывности до левого обратного к $\tilde{F}$ отображения $\tilde{f} : \tilde{Y} \rightarrow X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отображения $F : X \rightarrow 2^{\tilde{Y}}$ в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$, $(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{M}}')$ и ограниченной метрики $\tilde{\sigma} \in \tilde{\mathcal{M}}'$ выполнены все условия теоремы 2.6, которая и дает требуемый результат.

Таким образом, в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M}')$ при изучении отображений $F : X \rightarrow 2^Y$ со свойством ω -BAD всегда можно без нарушения общности считать, что $(Y, \mathcal{M}')$ — полное мёбиусово пространство и $F(X)$ плотно в Y . Если, кроме того, подпространство $(F(X), \mathcal{M}')$ имеет свойство $V[\varphi]$ (см. определение 4.3), то $(Y, \mathcal{M}')$ компактно. Так как метрическая топология в Y порождается ограниченными метриками из $\mathcal{M}'$, в случае компактности Y (в этой топологии) примыкание толстых точек $F(x)$, $F(Y)$ равносильно тому, что их замыкания в Y имеют непустое пересечение. Тогда при наличии трех попарно не примыкающих друг к другу толстых точек в $F(X)$ отображение F продолжается по формуле $\bar{F}(x) := \text{Cl}_Y(F(x))$ до отображения $\bar{F} : X \rightarrow 2^Y$, обладающего свойством ω -BAD.

§ 3. О сходимости толстых точек

Напомним определение топологического предела последовательности множеств (см. [7, § 29]).

Пусть в топологическом пространстве X задана последовательность $\{A_n\}$ непустых подмножеств. Множество $\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} A_n$ всех предельных точек всех подпоследовательностей $\{a_{n_k} \in A_{n_k}\}$ называется *верхним топологическим пределом*, а множество $\text{Li}_{n \rightarrow \infty} A_n$ пределов всех сходящихся последовательностей $\{a_n \in A_n\}$ — *нижним топологическим пределом* последовательности множеств $\{A_n\}$. В случае, когда $\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} A_n = \text{Li}_{n \rightarrow \infty} A_n = A \neq \emptyset$, множество A называется *топологическим пределом* последовательности $\{A_n\}$ и обозначается символом $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Свойства топологических пределов см. в [7, § 29].

3.1. Лемма. Пусть $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M}')$ — толемеевы мёбиусовы пространства и отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ имеет свойство ω -BAD. Тогда для любой предельной точки $x_0 \in X$ существует множество $L(x_0) \subset Y$ (возможно, пустое) такое, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$, сходящейся к x_0 при $n \rightarrow \infty$, топологический предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ в Y существует и совпадает с $L(x_0)$.

Если при этом множества $F(x)$ замкнуты в $F(X)$ при всех $x \in X$, то

$$L(x_0) \cap F(X) \subset F(x_0). \quad (3.1.0)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем ограниченные метрики $\rho \in \mathcal{M}$ и $\sigma \in \mathcal{M}'$. Вначале докажем, что для любых последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}$ в $X \setminus \{x_0\}$, сходящихся к x_0 , выполняется включение

$$\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(y_n) \subset \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(x_n), \quad (3.1.1)$$

где верхние топологические пределы берутся в пространстве Y .

Допустим от противного, что имеется точка $p \in \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(y_n)$, не лежащая в $L := \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$. Тогда существуют $\delta_1 > 0$ и номер N_0 такие, что при всех $n \geq N_0$ множества $F(x_n)$ не пересекаются с открытым шаром $B_\sigma(p, \delta_1)$.

Так как $p \in \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(y_n)$, имеются подпоследовательность $\{z_m\} \subset \{y_n\}$ и последовательность $\{u_m \in F(z_m)\}$, сходящаяся к p при $m \rightarrow \infty$. Поэтому найдется номер $N_1 > N_0$ такой, что при всех $m \geq N_1$ точки u_m лежат в $B_\sigma(p, \delta_1/2)$ и, следовательно, при всех $n, m \geq N_1$ выполняется оценка $\text{dist}_\sigma(u_m, F(x_n)) \geq \delta := \delta_1/2$. Положим $a = x_{N_1}$.

Для обобщенных углов $\Psi_{n,k} = (z_n, z_{n+k}; a, x_{n+k})$ при $k \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $n > N_1$ имеем сходимость

$$\begin{aligned} \alpha(\Psi_{n,k}) &= \frac{\rho(z_n, z_{n+k})\rho(a, x_{n+k})}{\rho(z_n, a)\rho(z_{n+k}, x_{n+k}) + \rho(z_n, x_{n+k})\rho(z_{n+k}, a)} \\ &\rightarrow \frac{\rho(z_n, x_0)\rho(a, x_0)}{\rho(z_n, a) \cdot 0 + \rho(z_n, x_0)\rho(x_0, a)} = 1. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Так как при $n > N_1$ для любых $v \in F(a), v_{n+k} \in F(x_{n+k})$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} \alpha(u_n, u_{n+k}; v, v_{n+k}) &= \frac{\sigma(u_n, u_{n+k})\sigma(v, v_{n+k})}{\sigma(u_n, v)\sigma(u_{n+k}, v_{n+k}) + \sigma(u_n, v_{n+k})\sigma(u_{n+k}, v)} \\ &\leq \frac{\sigma(u_n, u_{n+k})}{\delta} \cdot \frac{\sigma(v, v_{n+k})}{\sigma(u_{n+k}, v_{n+k}) + \sigma(u_{n+k}, v)} \leq \frac{\sigma(u_n, u_{n+k})}{\delta}, \end{aligned}$$

то

$$R(u_n, u_{n+k}) := \sup_{v \in F(a), v_{n+k} \in F(x_{n+k})} \alpha(u_n, u_{n+k}; v, v_{n+k}) \leq \frac{\sigma(u_n, u_{n+k})}{\delta}.$$

Используя свойство ω -BAD и сходимость (3.1.2), получаем в пределе при $k \rightarrow \infty$ неравенство $\omega(1) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} R(u_n, u_{n+k}) \leq \delta^{-1}\sigma(u_n, p)$, верное при всех $n > N_1$. Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ дает противоречие: $\omega(1) \leq 0$. Таким образом, включение (3.1.1) доказано.

Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в этом рассуждении равноправны, верно и обратное включение $\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \subset \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(y_n)$, т. е. равенство

$$\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} F(y_n)$$

верно для любых последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$, сходящихся к x_0 . Это означает (см. [7, § 29.V, (1)]) существование топологического предела $L(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} F(x_n)$ в Y , не зависящего от выбора последовательности $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$, сходящейся к x_0 .

Для доказательства включения (3.1.0) допустим от противного, что имеется точка $p \in L(x_0) \cap F(X)$, не лежащая в $F(x_0)$. Тогда $p \in F(a)$ для некоторого $a \in X \setminus \{x_0\}$. Возьмем последовательность $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$, сходящуюся к x_0 при $n \rightarrow \infty$, и отметим последовательность $\{u_n \in F(x_n)\}$, сходящуюся к p .

Так как $F(x_0)$ — замкнутое множество в $F(X)$, то $\text{dist}_\sigma(p, F(x_0)) > \delta > 0$, и из сходимости $u_n \rightarrow p$ следует, что при всех достаточно больших $n \geq N_0$ выполняется оценка $\text{dist}_\sigma(u_n, F(x_0)) > \delta$. Для обобщенного угла $\Psi_{n,k} = (a, x_{n+k}; x_n, x_0)$ при любом фиксированном n и $k \rightarrow \infty$ имеем сходимость

$$\begin{aligned} \alpha(\Psi_{n,k}) &= \frac{\rho(a, x_{n+k})\rho(x_n, x_0)}{\rho(a, x_n)\rho(x_{n+k}, x_0) + \rho(a, x_0)\rho(x_0, x_n)} \\ &\rightarrow \frac{\rho(a, x_0)\rho(x_n, x_0)}{\rho(a, x_n) \cdot 0 + \rho(a, x_0)\rho(x_0, x_n)} = 1. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Для любых точек $v_n \in F(x_n), v_0 \in F(x_0)$ при $n \geq N_0$ получим оценку

$$\begin{aligned} \alpha(p, u_{n+k}; v_n, v_0) &= \frac{\sigma(p, u_{n+k})\sigma(v_n, v_0)}{\sigma(p, v_n)\sigma(u_{n+k}, v_0) + \sigma(p, v_0)\sigma(u_{n+k}, v_n)} \\ &\leq \frac{\sigma(p, u_{n+k})}{\delta} \cdot \frac{\sigma(v_n, v_0)}{\sigma(v_n, p)}. \end{aligned}$$

Из условия замкнутости в $F(X)$ множества $F(x_n)$ следует, что $p \notin F(x_n)$ и, значит, $\text{dist}_\sigma(p, F(x_n)) = \delta_1 > 0$. Таким образом, при любом фиксированном $n \geq N_0$ оценка

$$\alpha(p, u_{n+k}; v_n, v_0) \leq \frac{\sigma(p, u_{n+k})M_\sigma}{\delta \delta_1}$$

выполняется при всех $k > 0$. Следовательно, при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(F(\Psi_{n,k})) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{v_n \in F(x_n), v_0 \in F(x_0)} \alpha(p, u_{n+k}; v_n, v_0) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(p, u_{n+k}) \cdot \frac{M_\sigma}{\delta \delta_1} = 0, \end{aligned}$$

что противоречит свойству ω -BAD и сходимости (3.1.3):

$$0 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(F(\Psi_{n,k})) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(\alpha(\Psi_{n,k})) = \omega(1) > 0.$$

Лемма доказана.

3.2. Теорема. Пусть птолемеево мёбиусово пространство $(Y, \mathcal{M}')$ компактно. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ птолемеева мёбиусова пространства $(X, \mathcal{M})$ имеет свойство ω -BAD и все толстые точки $F(x)$ замкнуты в Y . Тогда

(i) Для любой точки $x_0 \in X$ и любой открытой окрестности V толстой точки $F(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $F(U) \subset V$.

(ii) Если x_0 — предельная точка в X , то существует топологический предел $L(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} F(x) \subset F(x_0)$. При этом для любой метрики $\sigma \in \mathcal{M}'$ и инверсной метрики $h(z, w) = \sigma(z, w)/(\sigma(z, q)\sigma(w, q))$ с полюсом $q \in F(X) \setminus F(x_0)$ при всех $p \in F(x_0)$ справедлива оценка

$$\text{dist}_h(p, L(x_0)) \leq \text{diam}_h(L(x_0))/(2\omega(1)). \quad (3.2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Фиксируем ограниченные метрики $\sigma \in \mathcal{M}'$, $\sigma(.,.) \leq M_\sigma$, и $\rho \in \mathcal{M}$, $\rho(.,.) \leq M_\rho$. В силу компактности $F(x_0)$ для любой открытой окрестности V множества $F(x_0)$ найдется такое $r > 0$, что $F(x_0) \subset \{y \in Y : \text{dist}_\sigma(y, F(x_0)) < r\} \subset V$. Допустим, что (i) неверно. Тогда найдутся последовательность $\{x_n\} \subset X \setminus \{x_0\}$, сходящаяся к x_0 , и последовательность $u_n \in F(x_n)$ такая, что $\text{dist}_\sigma(u_n, F(x_0)) > r$ для всех n . В силу компактности Y без нарушения общности можно считать, что существует предел $p = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ и $\text{dist}_\sigma(p, F(x_0)) \geq r$. Фиксируем какую-нибудь точку $a \in X \setminus \{x_0\}$. Тогда $p \notin F(X)$ по лемме 3.1 и, следовательно, $\text{dist}_\sigma(p, F(a)) = d > 0$. Стало быть, неравенство $\text{dist}_\sigma(u_n, F(a) \cup F(x_0)) \geq d_0 := \min\{d/2, r/2\}$ выполняется при всех достаточно больших $n \geq n_0$. Задав произвольно малое $\varepsilon > 0$, отметим номер $n_1 > n_0$ такой, что $\sigma(u_n, p) < \varepsilon$ при всех $n \geq n_1$.

Для обобщенного угла $\Psi_{n,k} = (x_n, x_{n+k}; a, x_0)$ при фиксированном $n \geq n_1$ и $k \rightarrow \infty$ имеем сходимость $\alpha(\Psi_{n,k}) \rightarrow 1$. При $n \geq n_1$ для любых $v \in F(a)$, $v_0 \in F(x_0)$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \alpha(u_n, u_{n+k}; v, v_0) &= \frac{\sigma(u_n, u_{n+k})\sigma(v, v_0)}{\sigma(u_n, v)\sigma(u_{n+k}, v_0) + \sigma(u_n, v_0)\sigma(u_{n+k}, v)} \\ &\leq \frac{\sigma(u_n, u_{n+k})}{d_0} \frac{\sigma(v, v_0)}{\sigma(u_n, v) + \sigma(u_n, v_0)} \leq \frac{\sigma(u_n, u_{n+k})}{d_0}, \end{aligned}$$

$$R(u_n, u_{n+k}) := \sup_{v \in F(a), v_0 \in F(x_0)} \alpha(u_n, u_{n+k}; v, v_0) \leq \sigma(u_n, u_{n+k})/d_0.$$

Свойство ω -BAD дает неравенство

$$\omega(\alpha(\Psi_{n,k})) \leq \alpha(F(\Psi_{n,k})) \leq R(u_n, u_{n+k}) \leq \sigma(u_n, u_{n+k})/d_0.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем оценку

$$\omega(1) \leq \sigma(u_n, p)/d_0 \leq \varepsilon/d_0,$$

противоречащую произвольному выбору $\varepsilon > 0$. Таким образом, утверждение (i) доказано.

(ii) Существование топологического предела $L(x_0)$ установлено в лемме 3.1. При этом $L(x_0) \neq \emptyset$ в силу компактности пространства Y . Утверждение (i) дает включение $L(x_0) \subset F(x_0)$.

Пусть заданы $q \in F(X) \setminus F(x_0)$ с $r_0 := (1/2)\text{dist}_\sigma(q, F(x_0)) > 0$ и $p \in F(x_0) \setminus L(x_0)$ с $\Delta := \text{dist}_h(p, L(x_0)) > 0$. Отметим толстую точку $F(a)$, содержащую точку q , и возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X \setminus \{a, x_0\}$, сходящуюся к x_0 при $n \rightarrow \infty$. Вне шара $B_\sigma(q, r_0)$ метрики σ и h квазиизометричны друг другу: $(1/M_\sigma^2)\sigma(.,.) \leq h(.,.) \leq (1/r_0^2)\sigma(.,.)$. Поэтому в силу топологической сходимости $F(x_n) \rightarrow L(x_0)$ для любого $\delta \in (0, \Delta/3)$ все толстые точки $F(x_n)$ при всех достаточно больших $n \geq n_0$ лежат в δ -окрестности множества $L(x_0)$ относительно метрики h .

Для обобщенных углов $\Psi_{n,k} = (a, x_0; x_n, x_{n+k})$ при $k \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $n \geq n_0$ имеем сходимость

$$\alpha(\Psi_{n,k}) = \frac{\rho(a, x_0)\rho(x_n, x_{n+k})}{\rho(a, x_n)\rho(x_0, x_{n+k}) + \rho(a, x_{n+k})\rho(x_0, x_n)} \rightarrow 1.$$

Для любых $v_n \in F(x_n)$, $v_{n+k} \in F(x_{n+k})$ при $n \geq n_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \alpha(q, p; v_n, v_{n+k}) &= \frac{\sigma(q, p)\sigma(v_n, v_{n+k})}{\sigma(q, v_n)\sigma(p, v_{n+k}) + \sigma(q, v_{n+k})\sigma(p, v_n)} \\ &= \frac{\sigma(q, p)h(v_n, v_{n+k})\sigma(q, v_n)\sigma(q, v_{n+k})}{\sigma(q, v_n)h(p, v_{n+k})\sigma(q, p)\sigma(q, v_{n+k}) + \sigma(q, v_{n+k})h(p, v_n)\sigma(q, p)\sigma(q, v_n)} \\ &= \frac{h(v_n, v_{n+k})}{h(p, v_{n+k}) + h(p, v_n)} \leq \frac{\text{diam}_h(L(x_0)) + 2\delta}{2(\Delta - \delta)}. \end{aligned}$$

Следовательно, свойство ω -BAD дает при всех $n \geq n_0$ и $k > 0$ неравенство

$$\begin{aligned} \omega(\alpha(\Psi_{n,k})) &\leq \alpha(F(\Psi_{n,k})) \\ &\leq \sup_{v_n \in F(x_n), v_{n+k} \in F(x_{n+k})} \alpha(q, p; v_n, v_{n+k}) \leq \frac{\text{diam}_h(L(x_0)) + 2\delta}{2(\Delta - \delta)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем $\text{diam}_h(L(x_0)) + 2\delta \geq 2\omega(1)(\Delta - \delta)$. В силу произвольной малости δ это дает требуемое неравенство $\text{diam}_h(L(x_0)) \geq 2\omega(1) \cdot \Delta$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^{F(X)}$ птолемеевых мёбиусовых пространств $(X, \mathcal{M})$, $(F(X), \mathcal{M}')$ имеет свойство ω -BAD. Выполнение условий теоремы 3.2 для отображения $\bar{F} : X \rightarrow 2^Y$, где $(Y, \mathcal{M}')$ — пополнение мёбиусова пространства $(F(X), \mathcal{M}')$ и $\bar{F}(x) = \text{Cl}_Y(F(x))$, равносильно тому, что в некоторой ограниченной метрике $\sigma \in \mathcal{M}'$ пространство $(F(X), \sigma)$ вполне ограничено и в нем существуют три толстые точки, попарно не примыкающие друг к другу.

Действительно, в этом случае пополнение $(Y, \mathcal{M}')$ вполне ограниченного пространства $(F(X), \mathcal{M}')$ компактно, а отображение $\bar{F}$ гиперинъективно и обладает свойством ω -BAD (по теореме 2.6).

3.3. Следствие. В условиях теоремы 3.2 отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ полунепрерывно сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного открытого множества $V \subset Y$, содержащего толстую точку $F(x_0)$, точка x_0 является внутренней точкой множества $\{x \in X : F(x) \subset V\}$ в силу утверждения (i) теоремы 3.2. Это означает (см. [7, § 18.1, (3)]), что F полунепрерывно сверху в точке x_0 . В силу произвольности $x_0 \in X$ получаем полунепрерывность сверху отображения F (см. [7, § 18.1, теорема 1]).

Следствие доказано.

3.4. Следствие. В условиях теоремы 3.2 множество X_0 всех точек $x \in X$, в которых $F(x)$ — одноточечное множество, замкнуто в X . В частности, если ограничение $F|_S$ отображения F на множестве S , плотном в X , является однозначным отображением, то F — однозначное отображение на всем X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из утверждения (ii) в теореме 3.2.

3.5. Теорема. Пусть для отображения $F : X \rightarrow 2^Y$ птолемеевых мёбиусовых пространств $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M})'$ выполнены условия теоремы 3.2. Тогда отображение $F^0(x) = \{F(x), \text{ если } x \text{ — изолированная точка; } L(x), \text{ если } x \text{ —}$

предельная точка } обладает свойством ω -BAD с той же контрольной функцией ω и является непрерывным отображением (в смысле [7, § 18]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан обобщенный угол $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2) \subset X$. Для точки b_j ($j = 1, 2$) рассмотрим последовательность $\{b_j^n\} \subset X$, сходящуюся к b_j при $n \rightarrow \infty$. При этом если b_j — изолированная точка, полагаем $b_j^n = b_j$ для всех n , а если b_j — предельная точка, то потребуем, что $\{b_j^n\} \subset X \setminus \{b_j\}$. Для произвольно фиксированных точек $u_1 \in F^0(a_1)$, $u_2 \in F^0(a_2)$ положим

$$R_0(u_1, u_2) := \sup_{v_j \in F^0(b_j)} \alpha(u_1, u_2; v_1, v_2), \quad R_n(u_1, u_2) := \sup_{v_j \in F(b_j^n)} \alpha(u_1, u_2; v_1, v_2).$$

Задав произвольно малое $\varepsilon \in (0, 1/2)$, выберем точки $w_j^n \in F(b_j^n)$ ($j = 1, 2$) так, что

$$\alpha(u_1, u_2; w_1^n, w_2^n) \geq (1 - \varepsilon)R_n(u_1, u_2). \quad (3.5.1)$$

Воспользовавшись компактностью пространства Y и перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $w_j^n \rightarrow w_j^0 \in F^0(b_j)$ при $n \rightarrow \infty$. В силу непрерывности функции $\alpha(t_1, t_2; s_1, s_2)$ в любой точке $(t'_1, t'_2; s'_1, s'_2)$ с попарно различными координатами имеем при $n \rightarrow \infty$ сходимость

$$\alpha(u_1, u_2; w_1^n, w_2^n) \rightarrow \alpha(u_1, u_2; w_1^0, w_2^0), \quad \alpha(a_1, a_2; b_1^n, b_2^n) \rightarrow \alpha(\Psi).$$

Поэтому для заданного ε найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства

$$\alpha(u_1, u_2; w_1^0, w_2^0) \geq (1 - \varepsilon)\alpha(u_1, u_2; w_1^n, w_2^n), \quad \alpha(a_1, a_2; b_1^n, b_2^n) \geq (1 - \varepsilon)\alpha(\Psi).$$

Тогда в силу (3.5.1) при всех достаточно больших n получаем оценки

$$\alpha(u_1, u_2; w_1^0, w_2^0) \geq (1 - \varepsilon)R_n(u_1, u_2), \quad R_0(u_1, u_2) \geq (1 - \varepsilon)R_n(u_1, u_2).$$

Взяв в обеих частях последнего неравенства инфимум по $u_1 \in F^0(a_1)$, $u_2 \in F^0(a_2)$, получим соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(F^0(\Psi)) &\geq (1 - \varepsilon)^2 \alpha(F^0(a_1), F^0(a_2); F(b_1^n), F(b_2^n)) \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \alpha(F(a_1), F(a_2); F(b_1^n), F(b_2^n)) \geq (1 - \varepsilon)^2 \omega(\alpha(a_1, a_2; b_1^n, b_2^n)) \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \omega((1 - \varepsilon)\alpha(\Psi)). \end{aligned}$$

Так как неравенство $\alpha(F^0(\Psi)) \geq (1 - \varepsilon)^2 \omega((1 - \varepsilon)\alpha(\Psi))$ выполняется при произвольно малом $\varepsilon > 0$, в силу непрерывности контрольной функции ω приходим к требуемой оценке $\alpha(F^0(\Psi)) \geq \omega(\alpha(\Psi))$. Это означает, что отображение F^0 обладает свойством ω -BAD. Значит, отображение $F^0 : X \rightarrow 2^Y$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2.

По утверждению (ii) теоремы 3.2 в любой предельной точке $x_0 \in X$ существует топологический предел $H := \lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} F^0(x) \subset F^0(x_0)$. Покажем, что $H = F^0(x_0)$.

Допустим от противного, что нашлась точка $p \in H \setminus F^0(x_0)$, т. е. $d := \text{dist}_\sigma(p, F^0(x_0)) > 0$. Используя утверждение (i) теоремы 3.2 для отображения F^0 , построим окрестность $V \subset X$ точки x_0 такую, что для любого $x \in V$ множество $F^0(x)$ содержится в $(d/3)$ -окрестности толстой точки $F^0(x_0)$ и, следовательно, $\text{dist}_\sigma(p, F^0(x)) \geq (2/3)d$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset V \setminus \{x_0\}$, сходящуюся к x_0 при $n \rightarrow \infty$. Если x_n — изолированная точка,

то положим $y_n = x_n$. Если x_n — предельная точка, то благодаря равенству $F^0(x_n) = \lim_{y \rightarrow x_n, y \neq x_n} F(y)$ и оценке $\text{dist}_\sigma(p, F^0(x_n)) \geq (2/3)d$ найдется такая точка $y_n \in V \setminus \{x_0, x_n\}$, что $\rho(x_n, y_n) < 1/n$ и $\text{dist}_\sigma(p, F(y_n)) \geq (1/2)d$. Последовательность $\{y_n\} \subset V \setminus \{x_0\}$ сходится к $\{x_0\}$, при этом $\text{dist}_\sigma(p, F^0(x_0)) \geq (1/2)d > 0$, так как $F^0(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n)$. Это противоречит выбору точки $p \in F^0(x_0)$.

Полученное противоречие показывает, что в любой предельной точке $x_0 \in X$ выполняется равенство $F^0(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} F^0(x)$. Отсюда, в частности, следует, что $F^0(x_0)$ не имеет внутренних точек в пространстве $(F^0(X), \sigma)$. В силу [3, теорема 2.2] левое обратное к F^0 отображение $f^0 : F^0(X) \rightarrow X$ открыто и, значит (см. [7, § 18.I, теорема 4]), отображение F^0 полунепрерывно снизу. Применение следствия 3.3 к F^0 дает полунепрерывность сверху и тем самым непрерывность многозначного отображения F^0 .

Теорема доказана.

§ 4. О выделении однозначных ветвей

В следующей теореме указаны достаточные условия, при которых однозначная ветвь отображения $F : X \rightarrow 2^Y$ класса BAD также имеет свойство BAD.

4.1. Теорема. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ в птолемеевых метрических пространствах (X, ρ) и (Y, σ) обладает свойством ω -BAD. Пусть на множестве $J \subset X$, имеющем не менее четырех различных точек, выделена однозначная ветвь $f(x) \in F(x)$. Если

$$\frac{\text{dist}_\sigma(f(J), F(J) \setminus f(J))}{\text{diam}_\sigma f(J)} = d > 0, \quad (4.1.1)$$

то f обладает свойством $\tilde{\omega}$ -BAD с контрольной функцией

$$\tilde{\omega}(t) = \min \left\{ 1, \frac{d^2}{3}, \frac{d^2}{(1+d)^2}, \frac{d^4}{9(1+d)^2} \right\} [\omega(t)]^2. \quad (4.1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как требуемую оценку искажения величин обобщенных углов $\alpha(f(\Psi)) \geq \tilde{\omega}(\alpha(\Psi))$ достаточно установить для элементарных углов $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$ (см. [2, лемма 4.2]), не ограничивая общности, можно считать, что $J = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Положим $G(x) = F(x) \setminus \{f(x)\}$ при всех $x \in J$. Для обобщенных углов $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$, $\Psi' = (b_1, b_2; a_1, a_2)$ справедливы равенства $\alpha(\Psi) = \alpha(\Psi')$ и $\alpha(f(\Psi)) = \alpha(f(\Psi'))$. Поэтому, получив какое-либо соотношение для элементарного угла $f(\Psi)$, тем самым получаем соответствующее соотношение для угла $f(\Psi')$.

Введем обозначения:

$$R(u_1, u_2) = \sup_{v_1 \in F(b_1), v_2 \in F(b_2)} \alpha(u_1, u_2; v_1, v_2),$$

$$Q(v_1, v_2) = \sup_{u_1 \in F(a_1), u_2 \in F(a_2)} \alpha(v_1, v_2; u_1, u_2),$$

$$R_i = \frac{\sigma(f(a_1), f(a_2))}{\sigma(f(a_1), f(b_i)) + \sigma(f(a_2), f(b_i))}, \quad Q_i = \frac{\sigma(f(b_1), f(b_2))}{\sigma(f(b_1), f(a_i)) + \sigma(f(b_2), f(a_i))},$$

где $i \in \{1, 2\}$. Для краткости будем писать fx вместо $f(x)$ и Gx вместо $G(x)$.
Задав произвольно малое $\varepsilon > 0$, отметим точки $v_1^0 \in Fb_1$, $v_2^0 \in Fb_2$ и $u_1^0 \in Fa_1$,
 $u_2^0 \in Fa_2$, для которых

$$R(fa_1, fa_2) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(fa_1, fa_2; v_1^0, v_2^0), \quad (4.1.3)$$

$$Q(fb_1, fb_2) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(u_1^0, u_2^0; fb_1, fb_2). \quad (4.1.4)$$

Рассмотрим все возможные варианты расположения этих точек.

ВАРИАНТ 1. Если обе точки v_1^0, v_2^0 лежат в $f(J)$ или обе точки u_1^0, u_2^0 лежат
в $f(J)$, то $\alpha(f(\Psi)) \geq (1 + \varepsilon)^{-1}\omega(\alpha(\Psi))$.

Действительно, пусть $v_1^0 = fb_1, v_2^0 = fb_2$. Тогда $R(fa_1, fa_2) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(f(\Psi))$
и, следовательно,

$$\omega(\alpha(\Psi)) \leq \alpha(F(\Psi)) = \inf_{u_j \in Fa_j} R(u_1, u_2) \leq R(fa_1, fa_2) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(f(\Psi)).$$

Если $u_1^0 = fa_1, u_2^0 = fa_2$, то аналогичным образом приходим к такой же оценке
 $\omega(\alpha(\Psi)) = \omega(\alpha(\Psi')) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(f(\Psi')) = (1 + \varepsilon)\alpha(\Psi)$. Итак, в этом варианте

$$\alpha(f(\Psi)) \geq (1 + \varepsilon)^{-1}\omega(\alpha(\Psi)). \quad (4.1.5)$$

В дальнейшем по умолчанию предполагается, что $i, j \in \{1, 2\}$ и $i \neq j$, т. е.
 $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Фиксируем некоторое $K > 2$.

ВАРИАНТ 2. Пусть выполнено одно из условий:

(а) $v_1^0, v_2^0 \in G(J)$ и $\sigma(v_1^0, v_2^0) \geq K \cdot \sigma(v_i^0, fb_j)$ для каждого индекса $i = 1, 2$;

(б) $u_1^0, u_2^0 \in G(J)$ и $\sigma(u_1^0, u_2^0) \geq K \cdot \sigma(u_i^0, fa_j)$ для каждого индекса $i = 1, 2$.

Тогда

$$\alpha(f(\Psi)) \geq \frac{d^2(K - 2)}{K(1 + \varepsilon)}\omega(\alpha(\Psi)). \quad (4.1.6)$$

Действительно, пусть реализуется случай (а). Тогда

$$\sigma(v_1^0, v_2^0) \leq \sigma(v_1^0, fb_2) + \sigma(fb_2, fb_1) + \sigma(fb_1, v_2^0) \leq (2/K)\sigma(v_1^0, v_2^0) + \sigma(fb_1, fb_2)$$

и, следовательно, $\sigma(v_1^0, v_2^0) \leq (K/(K - 2))\sigma(fb_1, fb_2)$. Применив эту оценку
в числителе дроби

$$\alpha(fa_1, fa_2; v_1^0, v_2^0) = \frac{\sigma(fa_1, fa_2)\sigma(v_1^0, v_2^0)}{\sigma(fa_1, v_i^0)\sigma(fa_2, v_j^0) + \sigma(fa_1, v_j^0)\sigma(fa_2, v_i^0)}$$

и используя в знаменателе неравенства

$$\sigma(fa_i, v_j^0) \geq \text{dist}(f(J), G(J)) = d \cdot \text{diam } f(J) \geq d \cdot \sigma(fa_i, fb_j),$$

получим соотношение

$$\frac{1}{1 + \varepsilon}R(fa_1, fa_2) \leq \frac{K}{d^2(K - 2)}\alpha(fa_1, fa_2; fb_1, fb_2) = \frac{K}{d^2(K - 2)}\alpha(f(\Psi)).$$

Стало быть,

$$\omega(\alpha(\Psi)) \leq \alpha(F(\Psi)) = \inf_{u_i \in F(a_i)} R(u_1, u_2) \leq R(fa_1, fa_2) \leq \frac{K(1 + \varepsilon)}{d^2(K - 2)}\alpha(f(\Psi)),$$

что и дает требуемую оценку в случае (а).

Случай (б) сводится к случаю (а) заменой угла Ψ на угол Ψ' .

ВАРИАНТ 3. Не реализуются ситуации, рассмотренные в вариантах 1 и 2.

В этом случае докажем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Если только одна из точек $v_j^0 \in \{v_1^0, v_2^0\}$ лежит в $G(J)$, то

$$R_i \geq \frac{d}{(1+d)(1+\varepsilon)} R(fa_1, fa_2), \quad (4.1.7)$$

где $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Действительно, если $v_j^0 \in Gb_j$, то для любого $k \in \{1, 2\}$ (независимо от положения точки v_i^0) имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(fa_k, v_j^0)}{\sigma(fb_i, v_j^0)} &\geq \frac{\sigma(fa_k, v_j^0)}{\sigma(fb_i, fa_k) + \sigma(fa_k, v_j^0)} = \left(1 + \frac{\sigma(fb_i, fa_k)}{\sigma(fa_k, v_j^0)}\right)^{-1} \\ &\geq \left(1 + \frac{\text{diam}_\sigma f(J)}{\text{dist}_\sigma(f(J), G(J))}\right)^{-1} = (1 + 1/d)^{-1} = \frac{d}{d+1}, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

используя которую в равенстве

$$\alpha(fa_1, fa_2; fb_i, v_j^0) = \frac{\sigma(fa_1, fa_2)}{\sigma(fa_1, fb_i) \frac{\sigma(fa_2, v_j^0)}{\sigma(fb_i, v_j^0)} + \sigma(fa_2, fb_i) \frac{\sigma(fa_1, v_j^0)}{\sigma(fb_i, v_j^0)}},$$

приходим к требуемому неравенству:

$$\frac{1}{1+\varepsilon} R(fa_1, fa_2) \leq \alpha(fa_1, fa_2; v_i^0, v_j^0) = \alpha(fa_1, fa_2; fb_i, v_j^0) \leq \frac{d+1}{d} R_i.$$

Применив утверждение 1 к углу Ψ' , получаем

Утверждение 2. Если только одна из точек $u_j^0 \in \{u_1^0, u_2^0\}$ лежит в $G(J)$, то

$$Q_i \geq \frac{d}{(1+d)(1+\varepsilon)} Q(fb_1, fb_2), \quad (4.1.9)$$

где $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Утверждение 3. Если обе точки v_1^0 и v_2^0 лежат в $G(J)$ и существует индекс $j \in \{1, 2\}$, при котором $\sigma(v_1^0, v_2^0) \leq K \cdot \sigma(v_j^0, fb_i)$, то

$$R_i \geq \frac{d^2}{K(1+d)(1+\varepsilon)} R(fa_1, fa_2). \quad (4.1.10)$$

Действительно, используя в числителе дроби

$$\alpha(fa_1, fa_2; v_1^0, v_2^0) = \frac{\sigma(fa_1, fa_2) \sigma(v_1^0, v_2^0)}{\sigma(fa_1, v_i^0) \sigma(fa_2, v_j^0) + \sigma(fa_1, v_j^0) \sigma(fa_2, v_i^0)},$$

неравенство $\sigma(v_1^0, v_2^0) \leq K \cdot \sigma(v_j^0, fb_i)$, а в знаменателе — оценки $\sigma(fa_1, v_i^0) \geq \text{dist}_\sigma(f(J), G(J)) = d \cdot \text{diam}_\sigma f(J) \geq d \cdot \sigma(fa_1, fb_i)$ и аналогично $\sigma(fa_2, v_i^0) \geq d \cdot \sigma(fa_2, fb_i)$, получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon} R(fa_1, fa_2) &\leq \alpha(fa_1, fa_2; v_1^0, v_2^0) \\ &\leq \left(\frac{K}{d}\right) \frac{\sigma(fa_1, fa_2) \sigma(v_j^0, fb_i)}{\sigma(fa_1, fb_i) \sigma(fa_2, v_j^0) + \sigma(fa_1, v_j^0) \sigma(fa_2, fb_i)}. \end{aligned}$$

Применение в этой дроби оценки (4.1.8) (не зависящей от точки v_i^0) дает неравенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon} R(fa_1, fa_2) \leq \left(\frac{K}{d}\right) \frac{1+d}{d} \frac{\sigma(fa_1, fa_2)}{\sigma(fa_1, fb_i) + \sigma(fa_2, fb_i)} = \left(\frac{K}{d}\right) \frac{1+d}{d} R_i,$$

из которого вытекает требуемая оценка (4.1.10).

Применив утверждение 3 к обобщенному углу Ψ' , получим

Утверждение 4. Если обе точки u_1^0 и u_2^0 лежат в $G(J)$ и существует индекс $j \in \{1, 2\}$, при котором $\sigma(u_1^0, u_2^0) \leq K\sigma(u_j^0, fa_i)$, то

$$Q_i \geq \frac{d^2}{K(1+d)(1+\varepsilon)} Q(fb_1, fb_2). \quad (4.1.11)$$

Утверждение 5. Для любых индексов $i \in \{i, j\} = \{1, 2\}$ и $k \in \{k, s\} = \{1, 2\}$ верно неравенство $R_i Q_k \leq \alpha(f(\Psi))$.

Действительно, выполнив умножение в знаменателе дроби

$$\begin{aligned} R_i Q_k &= \frac{\sigma(fa_1, fa_2)\sigma(fb_1, fb_2)}{(\sigma(fa_1, fb_i) + \sigma(fa_2, fb_i)) \cdot (\sigma(fb_1, fa_k) + \sigma(fb_2, fa_k))} \\ &= \frac{\sigma(fa_i, fa_j)\sigma(fb_i, fb_j)}{(\sigma(fa_i, fb_i) + \sigma(fa_j, fb_i)) \cdot (\sigma(fb_i, fa_k) + \sigma(fb_j, fa_k))}, \end{aligned}$$

при $k = i$ получим

$$\begin{aligned} &\sigma(fa_j, fb_i)\sigma(fb_j, fa_i) + \sigma(fb_i, fa_i)[\sigma(fa_j, fb_i) + \sigma(fb_i, fa_i) + \sigma(fa_i, fb_j)] \\ &\geq \sigma(fa_j, fb_i)\sigma(fb_j, fa_i) + \sigma(fb_i, fa_i)\sigma(fa_j, fb_j), \end{aligned}$$

а при $k = j$ —

$$\begin{aligned} &\sigma(fa_i, fb_i)\sigma(fb_j, fa_j) + \sigma(fb_i, fa_j)[\sigma(fb_j, fa_j) + \sigma(fb_i, fa_j) + \sigma(fa_i, fb_i)] \\ &\geq \sigma(fa_i, fb_i)\sigma(fb_j, fa_j) + \sigma(fb_i, fa_j)\sigma(fb_j, fa_j). \end{aligned}$$

В обоих случаях приходим к нужному неравенству

$$R_i Q_k \leq \frac{\sigma(fa_i, fa_j)\sigma(fb_i, fb_j)}{\sigma(fa_i, fb_i)\sigma(fb_j, fa_j) + \sigma(fb_i, fa_j)\sigma(fb_j, fa_j)} = \alpha(f(\Psi)).$$

Итак, пусть не реализуются варианты 1 и 2. Тогда для некоторого $i \in \{i, j\} = \{1, 2\}$ выполнены условия одного из утверждений 1 или 3 и для некоторого $k \in \{k, s\} = \{1, 2\}$ выполнены условия одного из утверждений 2 или 4. Положив

$$C(d, K) = \frac{d}{(1+d)} \min\{1, d/K\},$$

из неравенств (4.1.7), (4.1.10) и соответственно (4.1.9), (4.1.11) получим оценки

$$R_i \geq \frac{C(d, K)}{1+\varepsilon} R(fa_1, fa_2), \quad Q_k \geq \frac{C(d, K)}{1+\varepsilon} Q(fb_1, fb_2).$$

Тогда в силу утверждения 5 имеем

$$\begin{aligned} \frac{(1+\varepsilon)^2}{C(d, K)^2} \alpha(f(\Psi)) &\geq R(fa_1, fa_2) Q(fb_1, fb_2) \\ &\geq \inf_{u_1 \in F(a_1), u_2 \in F(a_2)} R(u_1, u_2) \inf_{v_1 \in F(b_1), v_2 \in F(b_2)} Q(v_1, v_2) \\ &= [\alpha(F(\Psi))]^2 \geq [\omega(\alpha(\Psi))]^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вариант 3 приводит к оценке

$$\alpha(f(\Psi)) \geq \frac{C(d, K)^2}{(1+\varepsilon)^2} [\omega(\alpha(\Psi))]^2. \quad (4.1.12)$$

Соединяя оценки (4.1.5), (4.1.6) и (4.1.12), с учетом условия $\omega(1) \leq 1$ получаем неравенство

$$\alpha(f(\Psi)) \geq \min \left\{ 1, \frac{d^2(K-2)}{K}, \frac{d^2}{(1+d)^2}, \frac{d^4}{K^2(1+d)^2} \right\} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} [\omega(\alpha(\Psi))]^2,$$

справедливое при любых $d > 0$, $K > 2$ и $\varepsilon > 0$. Устремив ε к нулю, приходим к оценке

$$\alpha(f(\Psi)) \geq \min \left\{ 1, \frac{d^2(K-2)}{K}, \frac{d^2}{(1+d)^2}, \frac{d^4}{K^2(1+d)^2} \right\} [\omega(\alpha(\Psi))]^2,$$

справедливой при любом $K > 2$. В частности, положив $K = 3$, получим требуемую оценку $\alpha(f(\Psi)) \geq \tilde{\omega}(\alpha(\Psi))$ с контрольной функцией (4.1.2).

Теорема доказана.

Используя понятие слабой (h, H) -квазимёбиусовости из [9] и лемму 3.4 из [3], выводим

4.2. Следствие. В условиях теоремы 4.1 однозначное отображение $f : J \rightarrow Y$ слабо (h, H) -квазимёбиусово с произвольным $h > 0$ и константой $H = 1/\tilde{\omega}(1/(1+2h))$, где функция $\tilde{\omega}(t)$ определена формулой (4.1.2).

Мёбиусово-инвариантная версия свойства НТВ (homogeneously totally bounded) метрического пространства введена и изучена в [3, § 5].

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3, определение 5.4]. Пусть $\varphi : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ — целочисленная неубывающая непрерывная справа функция. Множество A в птолемеевом полуметрическом пространстве (X, ρ) обладает свойством $V[\varphi]$, если любое конечное множество $P \subset A$, у которого $\alpha(\Psi) \geq 1/t$ для любого элементарного угла $\Psi = (a_1, a_1; b_1, b_2)$ в P , содержит не более чем $\varphi(t)$ точек.

Мёбиусово-инвариантное свойство μ -плотности множеств в метрических пространствах (см. [9–11]), эквивалентное свойству равномерной совершенности (UP), имеет следующее

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3, § 4]. Множество A в метрическом пространстве (X, ρ) называется μ -плотным с константой $\mu > 1$, если для любой пары точек $a, b \in A$ существует последовательность $\{x_j\} \subset A$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) такая, что $\rho(a, x_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow -\infty$, $\rho(b, x_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ и для каждого j

$$\frac{1}{\mu} < \frac{\rho(a, x_j)\rho(x_{j+1}, b)}{\rho(a, x_{j+1})\rho(x_j, b)} < \mu.$$

4.5. Теорема. Пусть отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ в птолемеевых метрических пространствах (X, ρ) , (Y, σ) имеет свойство ω -BAD, и пусть на некотором μ -плотном подмножестве $J \subset X$ выделена однозначная ветвь $f(x) \in F(x)$. Если множества J и $f(J)$ обладают свойством $V[\varphi]$ и

$$\frac{\text{dist}_\sigma(f(J), F(J) \setminus f(J))}{\text{diam}_\sigma(f(J))} = d > 0,$$

то отображение $f : J \rightarrow f(J)$ η -квазимёбиусово с контрольной функцией η , зависящей только от ω , μ , φ и d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как выполнены все условия теоремы 4.1, отображение $f : J \rightarrow Y$ имеет свойство $\tilde{\omega}$ -BAD с контрольной функцией $\tilde{\omega}$, зависящей

лишь от ω и параметра d , зависящего от метрики σ . Кроме того, выполнены условия теоремы 6.2 в [3], в силу которой f η -квазимёбиусово с контрольной функцией η , зависящей лишь от $\tilde{\omega}$ и характеристик μ и φ метрических пространств (J, ρ) и $(f(J), \sigma)$, что и требовалось доказать.

Автор глубоко благодарен рецензенту за указанные им опечатки, неточности и советы по улучшению текста этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев В. В., Сычев А. В., Тетенов А. В. Мёбиусово-инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеевых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.
2. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 241–256.
3. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах. II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 976–987.
4. Aseev V. V. On coordinate vector-functions of quasiregular mappings // Sib. Electron. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 768–772.
5. Aseev V. V. The coefficient of quasimobiusness in Ptolemaic spaces // Sib. Electron. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 246–257.
6. Буяло С. В. Мёбиусовы и субмёбиусовы структуры // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 5. С. 1–20.
7. Куратовский К. Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
9. Wang Xiantao, Zhou Qingshan. Quasimöbius maps, weakly quasimöbius maps and uniform perfectness in quasi-metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 2017. V. 42, N 1. P. 257–284.
10. Асеев В. В., Троценко Д. А. Квазисимметрические вложения, четверки точек и искажение модулей // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 32–38.
11. Ибрагимов З. Ш. Метрическая плотность и квазимёбиусовы отображения // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1007–1019.

Поступила в редакцию 12 марта 2019 г.

После доработки 24 июня 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru