Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. N. Berestovskii, Yu. G. Nikonorov, Finite homogeneous metric spaces, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 973–995

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.502>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.130.99

April 26, 2023, 14:17:07

УДК 515.124.4+514.172.4+512.542+519.173

КОНЕЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров

Аннотация. Рассматриваются класс конечных однородных метрических пространств и ряд его важных подклассов, имеющих естественное определение в терминах метрики и хорошо изученные аналоги в классе римановых многообразий. Исследуются взаимоотношения между этими классами. Строятся примеры соответствующих пространств, часть которых представляют собой множества вершин специальных выпуклых многогранников в евклидовых пространствах. Дается описание изучаемых классов на языке теории графов, с помощью которого строятся примеры конечных метрических пространств с необычными свойствами. Ставится несколько нерешенных задач.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.502

Ключевые слова: конечное (нормальное) однородное метрическое пространство, конечное однородное по Клиффорду — Вольфу метрическое пространство, (полу)правильный многогранник, вершинно-транзитивный граф, граф Кнезера.

*Посвящаем академику Юрию Григорьевичу Решетняку
в связи с его 90-летием*

1. Введение

В статье рассматриваются класс конечных однородных метрических пространств, его подклассы нормальных, обобщенных нормальных и сильно обобщенных нормальных однородных пространств, однородных по Клиффорду — Вольфу пространств, конечных групп с левоинвариантными или биинвариантными метриками и соотношения между этими классами.

Подобные классы изучались для римановых многообразий в [1–4].

Средства построения рассматриваемых пространств:

- (1) однородные пространства G/H конечных (в том числе неразложимых или простых) групп G по их подгруппе H , снабженные инвариантной метрикой;
- (2) компактные выпуклые (в том числе правильные и полуправильные [5–8]) многогранники в евклидовых пространствах с транзитивной на множестве вершин группой изометрий;
- (3) вершинно-симметрические (в другой терминологии, вершинно-транзитивные) связные конечные графы [9, 10] с естественной метрикой;
- (4) графы Кэли конечных групп для минимальных порождающих множеств [11, 12].

Каждый многогранник вида (2) можно рассматривать как симплицальный комплекс, причем его одномерный подкомплекс — граф вида (3). Графы вида (4) также являются (ориентированными) графами вида (3).

Естественная метрика на множестве вершин графа (3) характеризуется как максимальная среди метрик, для которых расстояние между вершинами равно 1 тогда и только тогда, когда они соединены ребром. Естественная метрика на множестве вершин графа Кэли конечной группы G относительно минимального порождающего множества S правоинвариантна.

Каждый граф допускает вложение в трехмерное пространство (см., например, [9]). В статье [13] классифицированы все конечные группы, граф Кэли которых относительно некоторого минимального порождающего множества группы планарный [10]. Полный список таких групп со ссылкой на [13] приведен и в [14].

2. Основные понятия и задачи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конечное метрическое пространство (M, d) называется *однородным*, если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия f пространства (M, d) на себя такая, что $f(x) = y$.

Для произвольного конечного метрического пространства (M, d) бывает полезно рассмотреть множество расстояний между различными точками M :

$$\text{Dist}(M, d) = \{d(x, y) \mid x, y \in M, x \neq y\}. \quad (1)$$

Ясно, что множество $\text{Dist}(M, d)$ конечно. В дальнейшем будем его неоднократно использовать.

Предложение 1. Множество $G = \text{Isom}(M, d)$ всех изометрий конечного однородного метрического пространства (M, d) образует группу относительно операции композиции отображений. При этом

- (1) G — подгруппа группы $S(M)$ всех подстановок (биекций) множества M ;
- (2) $G = S(M)$ тогда и только тогда, когда $d(x, y) \equiv c > 0$, если $x, y \in M, x \neq y$;
- (3) (M, d) реализуется как однородное пространство $(G/H, d)$, где $H = \{f \in G : f(x_0) = x_0\}$ — стабилизатор некоторой фиксированной точки $x_0 \in M$, а G стандартно действует слева на множестве смежных классов G/H ;
- (4) существует G -левоинвариантная и H -правоинвариантная метрика ρ на группе G такая, что каноническая проекция $p : (G, \rho) \rightarrow (G/H, d)$ — субметрия [15].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (1)–(3) очевидны. Докажем (4).

Пусть c — минимальное положительное расстояние между точками пространства (M, d) . Определим метрику ρ на G условиями: $\rho(g, g) = 0$,

$$\rho(g_1, g_2) = d(p(g_1), p(g_2)), \quad \text{если } p(g_1) \neq p(g_2),$$

и $\rho(g_1, g_2) = \alpha$, где $0 < \alpha \leq 2c$, если $p(g_1) = p(g_2)$ и $g_1 \neq g_2$; $g, g_1, g_2 \in G$. Легко видеть, что метрика ρ удовлетворяет условиям из (4). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $|M| = n$, где $|\cdot|$ обозначает мощность множества, то $S(M)$ изоморфна $S(n)$, так называемой симметрической группе степени n .

Предложение 2. Пусть G — конечная группа, H, G_1 — ее собственные подгруппы и $H_1 = G_1 \cap H$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- (1) каноническое левое действие G_1 на G/H транзитивно;
- (2) $G_1 \cdot H = G$;
- (3) индекс $|G_1 : H_1| = \text{индекс } |G : H|$.

При соблюдении любого из этих условий G_1/H_1 естественно отождествляется с G/H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этом случае естественно говорить, что группа G сужается до группы G_1 . Вопрос о расширении группы G_1 до группы G для эффективного однородного пространства G_1/H_1 , где H_1 — произвольная подгруппа в G_1 , более легкий: это произвольная подгруппа G в $S(G_1/H_1)$, включающая G_1 .

Предложение 3. Пусть G — произвольная конечная группа, H — некоторая ее подгруппа и d — метрика на G . Тогда

$$d_H(x, y) := \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G, h \in H} d(gxh, gyh), \quad x, y \in G, \quad (2)$$

— G -левоинвариантная и H -правоинвариантная метрика на G .

Если $H = G$, то $d_H(x, y)$ — биинвариантная метрика на G .

Если $H \neq G$, то на G/H существует единственная G -инвариантная метрика ρ с проекцией-субметрией $p : (G, d_H) \rightarrow (G/H, \rho)$. При этом $(G/H, \rho)$ — однородное метрическое пространство.

Если H — нормальная подгруппа и d — левоинвариантная метрика на G , то существует единственная левоинвариантная метрика ρ на фактор-группе G/H с проекцией-субметрией $p : (G, d) \rightarrow (G/H, \rho)$.

Предложение 4. Пусть $H_1 \subset H$ — собственные подгруппы конечной группы G , ρ — G -левоинвариантная и H -правоинвариантная метрика на группе G , d и d_1 — метрики на G/H и G/H_1 . Тогда если какие-нибудь две из трех канонических проекций

$$p : (G, \rho) \rightarrow (G/H, d),$$

$$p_1 : (G, \rho) \rightarrow (G/H_1, d_1),$$

$$q : (G/H_1, d_1) \rightarrow (G/H, d)$$

являются субметриями, то и третья проекция — субметрия и все три пространства (G, ρ) , $(G/H, d)$, $(G/H_1, d_1)$ однородны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конечное однородное метрическое пространство (M, d) называется *нормальным однородным*, если для группы G из предложения 1 существуют транзитивная на M подгруппа Γ группы G и биинвариантная метрика σ на Γ такие, что каноническая проекция $\pi : (\Gamma, \sigma) \rightarrow (\Gamma/(\Gamma \cap H), d) = (M, d)$ — субметрия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конечное однородное метрическое пространство (M, d) называется *обобщенным нормальным однородным*, если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия f (называемая *δ -сдвигом* в точке x) пространства (M, d) на себя такая, что $f(x) = y$ и $d(x, f(x)) \geq d(z, f(z))$ для любых $z \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Конечное однородное метрическое пространство (M, d) называется *сильно обобщенным нормальным однородным*, если для любых точек $x, y \in M$, $x \neq y$, существует изометрия f пространства (M, d) на себя такая, что f не имеет неподвижных точек, $f(x) = y$ и $d(x, f(x)) \geq d(z, f(z))$ для любых $z \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Конечное однородное метрическое пространство (M, d) называется *однородным по Клиффорду — Вольфу* (кратко *КВ-однородным*), если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия f (называемая *КВ-переносом*)

пространства (M, d) на себя такая, что $f(x) = y$ и $d(x, f(x)) = d(z, f(z))$ для любых $z \in M$.

Введем следующие обозначения для метрических пространств.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. FGBM, FGLM, FCWHS, FSGNHS, FGNHS, FNHS, FHS обозначают соответственно классы конечных групп с биинвариантной метрикой, конечных групп с левоинвариантной метрикой, конечных КВ-однородных пространств, конечных сильно обобщенных нормальных однородных пространств, конечных обобщенных нормальных однородных пространств, конечных нормальных однородных пространств, конечных однородных пространств.

Теорема 1. Справедливы следующие включения и равенство:

$$\text{FGBM} \subset \text{FCWHS} \subset \text{FSGNHS} \subset \text{FGNHS} = \text{FNHS} \subset \text{FHS}, \quad (3)$$

$$\text{FGBM} \subset \text{FGLM} \subset \text{FHS}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Все включения в теореме 1 строгие (см. следствие 11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включения из (4), а также второе и третье включения в (3) очевидны. Поскольку класс конечных однородных метрических пространств наиболее общий, остается доказать первое включение и равенство в (3).

Пусть G — конечная группа с биинвариантной метрикой d . Утверждается, что для любого элемента $c \in G$ левый сдвиг $l_c : g \in G \rightarrow cg$ — КВ-изометрия на (G, d) . Действительно, для любых $g, h \in G$

$$d(l_c(g), l_c(h)) = d(cg, ch) = d(g, h)$$

вследствие левой инвариантности метрики d , т. е. l_c — изометрия на (G, d) , и

$$d(g, l_c(g)) = d(g, cg) = d(h(h^{-1}g), ch(h^{-1}g)) = d(h, ch) = d(h, l_c(h))$$

вследствие правой инвариантности метрики d . Первое включение в (3) доказано.

Докажем включение $\text{FNHS} \subset \text{FGNHS}$.

Предположим, что Γ — транзитивная на M группа изометрий пространства (M, d) и σ — биинвариантная метрика на Γ такие, что каноническая проекция

$$\pi : (\Gamma, \sigma) \rightarrow (\Gamma/H, d) = (M, d),$$

где H — стабилизатор некоторой точки $x_0 \in M$ в Γ , является субметрией. Пусть x, y — произвольные точки из M и $g \in \pi^{-1}(x)$. Так как π — субметрия, существует элемент $h \in \pi^{-1}(y)$ такой, что $\sigma(g, h) = d(x, y)$. Пусть $c = hg^{-1}$, z — произвольная точка из M , $f \in \pi^{-1}(z)$. Тогда $x = gH$, $y = hH$, $z = fH$, $c(x) = y$ и

$$d(x, y) = d(x, c(x)) = \sigma(g, h) = \sigma(g, l_c(g)) = \sigma(f, l_c(f)) \geq d(\pi(f), \pi(cf)) = d(z, c(z)).$$

Вследствие произвола в выборе точек $x, y, z \in M$ требуемое включение доказано.

Докажем включение $\text{FGNHS} \subset \text{FNHS}$.

Предположим, что $(M, d) \in \text{FGNHS}$, G — полная группа изометрий пространства (M, d) и H — стабилизатор некоторой точки $x_0 \in M$ в G . Определим

$$\sigma(g, h) := \max_{x \in M} d(g(x), h(x)), \quad g, h \in G.$$

Легко убедиться, что σ — биинвариантная метрика на G . Утверждается, что

$$\pi : (G, \sigma) \rightarrow (G/H, d) = (M, d)$$

— субметрия, т. е. что $(M, d) \in \text{FNHS}$. Из определения σ следует, что

$$d(\pi(g), \pi(h)) = d(g(x_0), h(x_0)) \leq \sigma(g, h)$$

для любых $g, h \in G$, т. е. π не увеличивает расстояний. Пусть x — произвольная точка из M . Так как $(M, d) \in \text{FGNHS}$, существует $g \in G$ такой, что $g(x_0) = x$ и $d(x_0, x) = d(x_0, g(x_0)) \geq d(y, g(y))$ для всех $y \in M$. Следовательно,

$$\sigma(e, g) = d(x_0, g(x_0)) = d(\pi(e), \pi(g)).$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что $\pi(B(e, r)) = B(x_0, r) = B(\pi(e), r)$ для каждого числа $r \geq 0$. Тогда из левой инвариантности метрики σ следует, что $\pi(B(g, r)) = B(\pi(g), r)$ для любых $r \geq 0$, $g \in G$, т. е. π — субметрия. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Метрическое пространство (M, d) называется *прямым метрическим произведением метрических пространств* (M_1, d_1) и (M_2, d_2) , если $M = M_1 \times M_2$ и

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [d_1(x_1, y_1)^\alpha + d_2(x_2, y_2)^\alpha]^{1/\alpha}, \quad 1 \leq \alpha < +\infty, \quad (5)$$

или

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, \quad (6)$$

$x_1, y_1 \in M_1$, $x_2, y_2 \in M_2$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2. Будем использовать обозначение $d = d_1 \times_\alpha d_2$ (соответственно $d = d_1 \times_\infty d_2$), если d определяется формулой (5) (соответственно (6)).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Существуют более общие определения прямого метрического произведения метрических пространств (см., например, [16, разд. 2]).

Теорема 2. Если пространства (M_1, d_1) и (M_2, d_2) содержатся в одном и том же классе метрических пространств, введенных в обозначении 1, то их прямое метрическое произведение принадлежит тому же классу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пространство (M, d) , принадлежащее одному из классов, указанных в обозначении 1, называется *неразложимым* в этом классе, если его нельзя представить в виде прямого произведения метрических пространств (M_1, d_1) и (M_2, d_2) из того же класса при условии, что $|M_1| \geq 2$, $|M_2| \geq 2$. Иначе (M, d) называется *разложимым* в этом классе.

Теорема 3. Если $(M, d) \in \text{FHS}$, $|M| \geq 2$ и $|\text{Isom}(M, d)| = |M|!$, то (M, d) принадлежит любому классу из обозначения 1.

При этом для любого выбора одного из этих классов

(1) (M, d) неразложимо в этом классе (для всех групп $M = G$ в случае классов FGBM или FGLM) тогда и только тогда, когда $|M|$ — простое число;

(2) если $|M|$ непростое (и M представлено в виде любой конкретной группы G , если (M, d) рассматривается в классе FGBM или FGLM), то (M, d) с точностью до перестановки сомножителей единственным образом представляется в виде прямого метрического произведения неразложимых в этом классе пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для классов FGBM и FGLM применяется теорема Ремака — Шмидта [17] о единственности представления конечной группы G в виде прямого произведения неразложимых подгрупп.

Задача 1. Верно ли последнее утверждение теоремы 3 для произвольно-го разложимого в прямое (возможно, неассоциативное) произведение $(M, d) \in \text{FHS}$?

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Прямое произведение может быть неассоциативным при разложении на множители с различными α из определения 6 и обозначения 2.

3. FHS в евклидовых пространствах

Поскольку центр масс (барицентр) конечной системы материальных точек (с одной и той же массой) в евклидовом пространстве сохраняется при любой биекции этой системы, сразу получаем следующий результат.

Предложение 5. Пусть $M = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geq n + 1$, — конечное однородное метрическое подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, $n \geq 2$, с индуцированной из $\mathbb{E}^n$ метрикой, не лежащее в гиперплоскости. Тогда M — множество вершин $V(P)$ некоторого выпуклого многогранника P , лежащее на некоторой сфере радиуса $r > 0$ в $\mathbb{E}^n$ с центром $x_0 = (1/m) \cdot \sum_{k=1}^m x_k$.

Следствие 1. $\text{Isom}(M) \subset O(n)$. С точностью до подобия существует биекция между однородными конечными метрическими подпространствами в $\mathbb{E}^n$, $n \geq 2$, и конечными однородными метрическими подпространствами единичной сферы $S_1^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Аналоги предложения 5 и следствия 1 верны для конечных однородных метрических подпространств пространства Лобачевского L^n , $n \geq 2$.

ПРИМЕР 1. Множества вершин правильных и полуправильных [5–8] многогранников в евклидовых пространствах, их «равномерных усечений», прямых призм и антипризм с правильными и полуправильными основаниями и многое другое. К ним относятся множества вершин многогранников 1–18 из [6] для $n = 3$. В [5, 7, 8] приведена классификация всех правильных многогранников в евклидовых пространствах, полученная Шлефли в 1850 г.

Предложение 6. Множество T вершин правильного симплекса в $\mathbb{E}^n$ с индуцированной из $\mathbb{E}^n$ метрикой изометрично циклической (коммутативной) группе порядка $n + 1$ с биинвариантной метрикой. В качестве порождающей такой группы можно взять любую циклическую подстановку на $n + 1$ элементах из T . При этом подстановку можно выбрать так, что порождаемая ей группа содержится в $SO(n)$.

Предложение 7. Множество C вершин гиперкуба в $\mathbb{E}^n$ с индуцированной из $\mathbb{E}^n$ метрикой изометрично коммутативной группе $(\mathbb{Z}_2)^n$ с биинвариантной метрикой.

Следствие 2. Метрические пространства T и C КВ-однородны.

Следующая теорема доказывается с помощью теоремы 3, предложения 6 и результатов из [18].

Теорема 4. Неразложимое конечное КВ-однородное подпространство M евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ изометрично конечной группе G с биинвариантной метрикой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- (1) $|M| = 2$, $n = 1$ и G — циклическая группа порядка 2;
- (2) M — орбита циклической группы G вращений пространства $\mathbb{E}^2$ любого порядка ≥ 3 ;

- (3) M — орбита бинарно диэдральной или бинарно полиэдральной подгруппы мультипликативной группы $Sp(1) \subset \mathbb{H} = \mathbb{E}^4$ единичных кватернионов в $\mathbb{E}^4$;
 (4) $M = T$ из предложения 6 и $|T| \geq 5$ — простое число.

4. Раздутия метрических пространств

В этом разделе определяем и исследуем специальную конструкцию, позволяющую строить метрические пространства специального типа из заданных метрических пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть даны два конечных метрических пространства (M_1, d_1) и (M_2, d_2) , причем

$$d_2(y_1, y_2) \leq 2d_1(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in M_1, x_1 \neq x_2, \forall y_1, y_2 \in M_2. \quad (7)$$

Раздутием (M_1, d_1) *посредством* (M_2, d_2) назовем метрическое пространство (M, d) , где $M = M_1 \times M_2$ и

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} d_1(x_1, x_2) & \text{при } x_1 \neq x_2, \\ d_2(y_1, y_2) & \text{при } x_1 = x_2. \end{cases} \quad (8)$$

Метрику d будем обозначать через $d_1 \times_b d_2$.

Отметим, что неравенство треугольника для так определенной метрики следует из условия (7), которое выполняется лишь для определенных классов метрических пространств.

Если ψ_i — изометрия метрического пространства (M_i, d_i) для $i = 1, 2$, то, как нетрудно проверить, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — изометрия метрического пространства (M, d) . Укажем более широкий класс изометрий пространства (M, d) .

Рассмотрим метрическое пространство $(M = M_1 \times M_2, d = d_1 \times_b d_2)$, полученное раздутием (M_1, d_1) посредством (M_2, d_2) . Укажем некоторый естественный класс изометрий пространства (M, d) .

Для произвольной изометрии $\varphi \in \text{Isom}(M_1, d_1)$ и произвольного отображения $\psi : M_1 \rightarrow \text{Isom}(M_2, d_2)$ определим отображение $f : M \rightarrow M$ следующим образом:

$$f(x, y) = (\varphi(x), \psi(x)(y)), \quad x \in M_1, y \in M_2. \quad (9)$$

Лемма 1. Отображение (9) является изометрией метрического пространства $(M = M_1 \times M_2, d = d_1 \times_b d_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in M_1$ и $y_1, y_2 \in M_2$. Тогда

$$\begin{aligned} d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) &= d((\varphi(x_1), \psi(x_1)(y_1)), (\varphi(x_2), \psi(x_2)(y_2))) \\ &= \begin{cases} d_1(\varphi(x_1), \varphi(x_2)), & \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2), \\ d_2(\psi(x_1)(y_1), \psi(x_2)(y_2)), & \varphi(x_1) = \varphi(x_2), \end{cases} \\ &= \begin{cases} d_1(x_1, x_2), & x_1 \neq x_2, \\ d_2(\psi(x_1)(y_1), \psi(x_1)(y_2)), & x_1 = x_2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} d_1(x_1, x_2), & x_1 \neq x_2, \\ d_2(y_1, y_2), & x_1 = x_2, \end{cases} = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

При определенных условиях множество изометрий $\text{Isom}(M, d)$ исчерпывается изометриями вида (9).

Предложение 8. Предположим, что множества расстояний (см. (1)) для метрических пространств (M_1, d_1) и (M_2, d_2) удовлетворяют условию

$$\text{Dist}(M_1, d_1) \cap \text{Dist}(M_2, d_2) = \emptyset.$$

Тогда произвольная изометрия $f \in \text{Isom}(M, d)$ имеет вид (9) для некоторых $\varphi \in \text{Isom}(M_1, d_1)$ и $\psi : M_1 \rightarrow \text{Isom}(M_2, d_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть изометрия f имеет вид $f(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y))$ для некоторых отображений α, β и всех $x \in M_1, y \in M_2$. Пусть $x_1, x_2 \in M_1$ и $y_1, y_2 \in M_2$. Тогда

$$\begin{aligned} d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) &= d((\alpha(x_1, y_1), \beta(x_1, y_1)), (\alpha(x_2, y_2), \beta(x_2, y_2))) \\ &= \begin{cases} d_1(\alpha(x_1, y_1), \alpha(x_2, y_2)), & \alpha(x_1, y_1) \neq \alpha(x_2, y_2), \\ d_2(\beta(x_1, y_1), \beta(x_2, y_2)), & \alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2), \end{cases} \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} d_1(x_1, x_2), & x_1 \neq x_2, \\ d_2(y_1, y_2), & x_1 = x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $\text{Dist}(M_1, d_1) \cap \text{Dist}(M_2, d_2) = \emptyset$, то $x_1 = x_2$ влечет $\alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$ и $x_1 \neq x_2$ влечет $\alpha(x_1, y_1) \neq \alpha(x_2, y_2)$. Поэтому определено такое отображение $\varphi : M_1 \rightarrow M_1$, что $\varphi(x) = \alpha(x, y)$ для любого $y \in M_2$. Кроме того, из вышеприведенной формулы для $d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2))$ следует, что $\varphi \in \text{Isom}(M, d_1)$. Если в той же формуле положить $x_1 = x_2 =: x$, то

$$\begin{aligned} d(f(x, y_1), f(x, y_2)) &= d((\varphi(x), \beta(x, y_1)), (\varphi(x), \beta(x, y_2))) \\ &= d_2(\beta(x, y_1), \beta(x, y_2)) = d((x, y_1), (x, y_2)) = d_2(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Поэтому корректно определено такое отображение $\psi : M_1 \rightarrow \text{Isom}(M_2, d_2)$, что $\psi(x)(y) = \beta(x, y)$ для всех $y \in M_2$, что и завершает доказательство. $\square$

Для наших целей важную роль играет следующая

Теорема 5. Пусть метрическое пространство (M, d) получено раздутием (M_1, d_1) посредством (M_2, d_2) . Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) Если метрические пространства (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, однородны, то однородно и (M, d) .

(2) Если метрические пространства (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, нормальные однородные, то (M, d) также нормальное однородное.

(3) Если метрические пространства (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, однородны по Клиффорду — Вольфу, то (M, d) также однородно по Клиффорду — Вольфу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Согласно лемме 1 произвольные изометрии ψ_i метрических пространств (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, порождают изометрию $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ метрического пространства (M, d) . Следовательно, однородность метрических пространств (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, влечет однородность (M, d) .

Перейдем к доказательству утверждения (2). Согласно теореме 1 нормальная однородность эквивалентна обобщенной нормальной однородности. Для произвольных точек (x_1, y_1) и (x'_1, y'_1) из M надо найти изометрию f такую, что $f((x_1, y_1)) = (x'_1, y'_1)$ и

$$d((x_1, y_1), (x'_1, y'_1)) \geq d((x_2, y_2), f(x_2, y_2))$$

для всех $(x_2, y_2) \in M$. Поскольку исходные метрические пространства являются обобщенными нормальными однородными, существуют такие изометрии

ψ_i метрических пространств (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, что $\psi_1(x_1) = x'_1$, $\psi_2(y_1) = y'_1$, $d_1(x_1, x'_1) \geq d_1(x_2, \psi_1(x_2))$ для всех $x_2 \in M_1$ и $d_2(y_1, y'_1) \geq d_2(y_2, \psi_2(y_2))$ для всех $y_2 \in M_2$.

Разберем сначала случай $x'_1 = x_1$. Положим $f(x, y) = (x, \psi_2(y))$ для всех $x \in M_1$ и $y \in M_2$. Ясно, что

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x'_1, y'_1)) &= d((x_1, y_1), f(x_1, y_1)) = d((x_1, y_1), (x_1, \psi_2(y_1))) \\ &= d_2(y_1, \psi_2(y_1)) \geq d_2(y_2, \psi_2(y_2)) = d((x_2, y_2), (x_2, \psi_2(y_2))) = d((x_2, y_2), f(x_2, y_2)) \end{aligned}$$

для любых $x_2 \in M_1$, $y_2 \in M_2$. Таким образом, f обладает нужными свойствами.

Пусть теперь $x'_1 = \psi_1(x_1) \neq x_1$. Определим отображение

$$\eta : M_1 \rightarrow \text{Isom}(M_2, d_2)$$

следующим образом:

$$\eta(x) = \begin{cases} \psi_2, & x \neq \psi_1(x), \\ \text{Id}, & x = \psi_1(x). \end{cases}$$

Согласно предложению 8 отображение $f : M \rightarrow M$, определенное формулой $f(x, y) = (\psi_1(x), \eta(x)(y))$ для $x \in M_1$, $y \in M_2$, является изометрией пространства (M, d) . Ясно, что

$$(x'_1, y'_1) = f(x_1, y_1) = (\psi_1(x_1), \eta(x_1)(y_2)) = (\psi_1(x_1), \psi_2(y_2)).$$

Полагая $(x'_2, y'_2) := f(x_2, y_2) = (\psi_1(x_2), \eta(x_2)(y_2))$, получаем

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x'_1, y'_1)) &= d((x_1, y_1), f(x_1, y_1)) = d((x_1, y_1), (\psi_1(x_1), \psi_2(y_1))) \\ &= d_1(x_1, \psi_1(x_1)) \geq \begin{cases} d_1(x_2, \psi_1(x_2)), & x_2 \neq \psi_1(x_2), \\ d_2(y_2, \eta(x_2)(y_2)), & x_2 = \psi_1(x_2), \end{cases} \\ &= d((x_2, y_2), (\psi_1(x_2), \eta(x_2)(y_2))) = d((x_2, y_2), (x'_2, y'_2)) = d((x_2, y_2), f(x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Следует напомнить, что $\eta(x_2)(y_2) = y_2$ и $d_2(y_2, \eta(x_2)(y_2)) = 0$ при $x_2 = \psi_1(x_2)$. Таким образом, нужная изометрия f найдена и в этом случае.

Докажем утверждение (3). Для произвольных точек $(x_1, y_1), (x'_1, y'_1) \in M$ надо найти перенос Клиффорда — Вольфа ψ с условием $\psi((x_1, y_1)) = (x'_1, y'_1)$. Таким образом, нужна изометрия ψ такая, что

$$d((x_1, y_1), (x'_1, y'_1)) = d((x_2, y_2), (x'_2, y'_2))$$

для любой точки $(x_2, y_2) \in M$, где $(x'_1, y'_1) = \psi((x_1, y_1))$ и $(x'_2, y'_2) = \psi((x_2, y_2))$. Поскольку исходные метрические пространства однородны по Клиффорду — Вольфу, существуют такие изометрии ψ_i (переносы Клиффорда — Вольфа) метрических пространств (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, что $\psi_1(x_1) = x'_1$, $\psi_2(y_1) = y'_1$, $d_1(x_1, x'_1) = d_1(x_2, \psi_1(x_2))$ для всех $x_2 \in M_1$ и $d_2(y_1, y'_1) = d_2(y_2, \psi_2(y_2))$ для всех $y_2 \in M_2$. Пусть $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, тогда $(x'_1, y'_1) = \psi((x_1, y_1)) = (\psi_1(x_1), \psi_2(y_1))$. Полагая $(x'_2, y'_2) = \psi((x_2, y_2)) = (\psi_1(x_2), \psi_2(y_2))$, получаем

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x'_1, y'_1)) &= d((x_1, y_1), (\psi_1(x_1), \psi_2(y_1))) \\ &= \begin{cases} d_1(x_1, \psi_1(x_1)), & x_1 \neq \psi_1(x_1), \\ d_2(y_1, \psi_2(y_1)), & x_1 = \psi_1(x_1), \end{cases} \\ &= \begin{cases} d_1(x_2, \psi_1(x_2)), & x_2 \neq \psi_1(x_2), \\ d_2(y_2, \psi_2(y_2)), & x_2 = \psi_1(x_2), \end{cases} \\ &= d((x_2, y_2), (\psi_1(x_2), \psi_2(y_2))) = d((x_2, y_2), (x'_2, y'_2)). \end{aligned}$$

Следует подчеркнуть, что неравенства $x_1 \neq \psi_1(x_1)$ и $x_2 \neq \psi_1(x_2)$ равносильны в силу того, что ψ_1 — перенос Клиффорда — Вольфа. $\square$

5. Конечные метрические пространства и раскрашенные графы

Рассмотрим произвольное конечное метрическое пространство (M, d) с числом вершин $n = |M|$ и множество расстояний $\text{Dist}(M, d)$ между различными точками M .

Ясно, что множество $\text{Dist}(M, d)$ (см. (1)) конечно. Выпишем его элементы в порядке возрастания: $(0 <) \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s, s \geq 1$. Отметим, что на эти числа накладываются и дополнительные условия, вытекающие из неравенства треугольника. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 = 1$. Если $s = 1$, то такая метрика d на M называется *дискретной*.

В качестве стандартных справочников по терминологии теории графов можно порекомендовать книги [9, 10]. Обозначим через K_n полный граф с n вершинами. Вершины этого графа отождествим посредством произвольной биекции с элементами множества M . Множество $\text{Dist}(M, d)$ задает естественное раскрашивание ребер графа K_n в s цветов: ребро, соединяющее вершины x и y , окрашивается в i -й цвет, если $\alpha_i = d(x, y)$. В [19] такое раскрашивание называется *структурой симметричных бинарных отношений* (*symmetric binary relational structure*).

Отметим также, что для произвольного раскрашивания ребер графа K_n можно подобрать такое конечное метрическое пространство (M, d) , $|M| = n$, которое порождает (в указанном выше смысле) заданное раскрашивание. Более того, в качестве (M, d) можно взять множество вершин подходящего симплекса в $\mathbb{E}^{n-1}$ с метрикой, индуцированной евклидовой (см., например, доказательство леммы 2 в [19]).

Большое количество информации о раскрашивании ребер полного графа и связанных с этим проблемах, можно найти в [20].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В дальнейшем часто будем представлять конечное метрическое пространство (M, d) , $|M| = n$, в виде графа K_n с ребрами, раскрашенными в соответствии с расстояниями между точками, с указанием α_i (т. е. цветов или, другими словами, весов ребер).

Справедлива следующая очевидная

Лемма 2. Если конечное метрическое пространство (M, d) однородно, т. е. принадлежит классу FHS, то все вершины K_n инцидентны одному и тому же количеству ребер фиксированного цвета. Если $n = |M|$, ребра K_n раскрашены в s цветов ($s \geq 1$), а каждая вершина K_n инцидентна ровно l_i ребрам i -го цвета, $i = 1, \dots, s$, то количество ребер i -го цвета равно $n \cdot l_i / 2$. В частности, при нечетном n все числа l_i , $i = 1, \dots, s$, обязаны быть четными.

Принадлежность классам FCWHS, FGNHS и FNHS накладывает еще больше дополнительных условий на раскрашивание ребер графа K_n . Далее более детально обсудим различия между однородностью по Клиффорду — Вольфу и сильной обобщенной нормальной однородностью.

Рассмотрим конечное однородное метрическое пространство (M, d) , $|M| = n$, $|\text{Dist}(M, d)| = s \geq 1$.

Ясно, что при $s = 1$ группа изометрий метрического пространства (M, d) совпадает с $S(n)$, полной группой перестановок множества из n элементов. При этом каждая перестановка без неподвижных точек является переносом Клиффорда — Вольфа, следовательно, (M, d) однородно по Клиффорду — Вольфу (см. теорему 3).

Пусть теперь $s \geq 2$. Рассмотрим для каждого $i = 1, \dots, s$ подграфы Γ_i и $\Gamma_{\leq i}$ в $K_n = M$, состоящие из всех вершин K_n и соответственно всех его ребер i -го цвета и всех его ребер любого цвета k при $k \leq i$. Таким образом, граф $\Gamma_{\leq i}$ является объединением графов Γ_j при $1 \leq j \leq i$, а $\Gamma_{\leq s} = K_n$.

Граф G называется *вершинно-транзитивным* (или *вершинно-симметрическим*), если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его вершин. Аналогично граф G называется *реберно-транзитивным* (или *реберно-симметрическим*), если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его ребер. Напомним, что *степенью вершины графа* называется количество ребер графа, инцидентных данной вершине. Каждый вершинно-транзитивный граф *регулярен*, т. е. степени всех его вершин равны. Граф G называется *k -регулярным*, если степень каждой его вершины равна k . Обзор свойств вершинно-транзитивных графов и связанных с ними проблем можно найти в [21, 22].

Напомним, что *фактором* (в другой терминологии, *остовным подграфом*) связного графа G называется любой его подграф, имеющий те же вершины, что и граф G , *k -фактор* графа — это фактор, являющийся k -регулярным графом. В частности, множество ребер 1-фактора является совершенным паросочетанием, а 2-фактор — это набор циклов (без общих вершин), которые покрывают все вершины графа (см., например, [23]).

Таким образом, все графы Γ_i и $\Gamma_{\leq i}$, $i = 1, \dots, s$, являются факторами графа K_n , при этом графы Γ_i представляют собой l_i -регулярные факторы. Каждый граф Γ_i , $i = 1, \dots, s$, вершинно-транзитивен, хотя и не обязательно связан, но все его связные компоненты изоморфны друг другу в силу однородности метрического пространства (M, d) .

Очевидна следующая

Лемма 3. Биекция $f : M \rightarrow M$ является изометрией (M, d) тогда и только тогда, когда f является автоморфизмом каждого графа Γ_i (каждого графа $\Gamma_{\leq i}$), $i = 1, \dots, s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Автоморфизм f графа G назовем *смежно-вершинным*, если для любой вершины $x \in G$ вершина $f(x)$ ей смежна, т. е. $\{x, f(x)\}$ — ребро графа G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Граф G назовем *смежно-вершинно-транзитивным*, если для любых его смежных вершин x и y найдется смежно-вершинный автоморфизм графа G , переводящий x в y .

Приведенные определения позволяют получить

Предложение 9. В условиях и обозначениях, приведенных выше, конечное однородное метрическое пространство (M, d) однородно по Клиффорду — Вольфу (сильно обобщенно нормально однородно) тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x, y \in M$ существует отображение $f : M \rightarrow M$, являющееся автоморфизмом каждого графа Γ_i при $i = 1, \dots, s$ и смежно-вершинным автоморфизмом графа Γ_j (соответственно графа $\Gamma_{\leq j}$), где j определяется условием $d(x, y) = d_j$.

Следствие 3. Если метрическое пространство (M, d) однородно по Клиффорду — Вольфу (сильно обобщенно нормально однородно), то каждый граф Γ_i (соответственно $\Gamma_{\leq i}$), $i = 1, \dots, s$, вершинно-транзитивен и смежно-вершинно-транзитивен.

Следующие конструкции показывают существование большого количества однородных по Клиффорду — Вольфу конечных метрических пространств (M, d) с произвольным значением s , т. е. количества цветов (различных ненулевых расстояний между точками). Первый пример проще всего изложить на языке раздутых метрических пространств.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = p \cdot q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 2$. Сначала рассмотрим полный граф K_p с ребрами веса α_1 и граф K_q с ребрами веса α_2 , $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\alpha_1$. Заменим каждую вершину графа K_p копией графа K_q (размножив каждое ребро графа K_p до множества q^2 ребер, соединяющих попарно все новые вершины на разных концах исходного ребра, и сохраняя при этом их вес). Таким образом, получили двухцветную раскраску ребер графа K_n . Соответствующее метрическое пространство (M, d) (расстояние между вершинами полагаем равным весу соединяющего их ребра) однородно по Клиффорду — Вольфу.

Точнее, рассмотрим конечные метрические пространства $(M_1 = K_p, d_1)$ и $(M_2 = K_q, d_2)$ с метриками d_i такими, что расстояние между любыми различными точками равно α_i . Тогда (M, d) можно определить как результат раздутия метрического пространства (M_1, d_1) посредством метрического пространства (M_2, d_2) . КВ-однородность пространства (M, d) следует из теоремы 5 и из того, что этим свойством обладают метрические пространства (M_1, d_1) и (M_2, d_2) .

Рассмотрим обобщение конструкции из примера 2.

ПРИМЕР 3. Пусть $n = p_1 p_2 \cdots p_{s-1} p_s$, где $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i \geq 2$. Рассмотрим конечные метрические пространства $(M_i = K_{p_i}, d_i)$, $i = 1, \dots, s$, с метриками d_i такими, что расстояние между любыми различными точками равно α_i , причем $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s < 2\alpha_1$. Раздувая последовательно метрическое пространство (M_1, d_1) посредством (M_i, d_i) , $i = 2, \dots, s$, получим некоторое метрическое пространство (M, d) с $\text{Dist}(M, d) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$. Поскольку все пространства (M_i, d_i) КВ-однородны, теорема 5 влечет КВ-однородность пространства (M, d) .

Наглядно этот процесс можно представить следующим образом. Рассмотрим полные графы K_{p_i} с ребрами веса α_i , где $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s < 2$. Далее строим s -цветную раскраску ребер графа K_n , последовательно «раздувая» граф K_{p_1} с помощью графов K_{p_i} , $i \geq 2$ (каждая вершина заменяется графом K_{p_i} , а ребра между вершинами дублируются нужное количество раз).

ПРИМЕР 4. В качестве более очевидного примера конечного КВ-однородного метрического пространства можно привести метрическое пространство, представляющее собой множество вершин некоторой многоугольной призмы (антипризмы) в пространстве постоянной кривизны с индуцированной метрикой.

Рассмотрим еще несколько полезных конструкций конечных однородных метрических пространств (M, d) при $s = 2$. Понятно, что $n = |M| \geq 3$. Более того, при любом раскрашивании ребер K_3 в два цвета метрическое пространство (M, d) не является однородным. Действительно, два ребра должны быть одного цвета, а третье — другого, поэтому есть одна вершина, инцидентная двум одноцветным ребрам, в то время как остальные вершины инцидентны ребрам разного цвета. Далее считаем, что $n \geq 4$.

ПРИМЕР 5. Пусть $n \geq 4$ четно. Разобьем вершины графа K_n на пары и раскрасим ребра, инцидентные каждой такой паре, во 2-й цвет (расстояние между соответствующими парами точек положим равным положительному числу

α_2), в то время как остальные ребра раскрасим в 1-й цвет (расстояние между соответствующими парами положим равными α_1 , $\alpha_1 < \alpha_2 < 2\alpha_1$). Пусть отображение $I : M \rightarrow M$ таково, что оно переводит каждую точку $x \in M$ в точку y , соединяющуюся с x ребром длины α_2 . Понятно, что I является инволютивной изометрией (M, d) и смещает все точки на расстояние α_2 , т. е. является переносом Клиффорда — Вольфа.

Нетрудно понять, что определенное таким образом метрическое пространство КВ-однородно. Действительно, соответствующее метрическое пространство $(M = K_n, d)$ является результатом раздутия метрического пространства $(M_1 = K_{n/2}, d_1)$ посредством метрического пространства $(M_2 = K_2, d_2)$ (расстояние между различными точками в метрике d_i равно α_i , $i = 1, 2$). Таким образом, имеем дело с частным случаем конструкции из примера 2.

В качестве частного случая можно рассмотреть метрическое пространство, образуемое вершинами гипероктаэдра (кокуба, т. е. многогранника, двойственного n -мерному гиперкубу) в $\mathbb{E}^n$, где $n \geq 3$. Полагая длину ребра гипероктаэдра равной $\alpha_1 = 1$, легко понять, что $\alpha_2 = \sqrt{2}$. Ясно, что можно рассматривать и другие значения α_2 из интервала $(1, 2)$, но такие метрические пространства уже не вкладываются в $\mathbb{E}^n$. Множество вершин гипероктаэдра можно разбить на два подмножества, каждое из которых состоит из n вершин правильного $(n - 1)$ -мерного симплекса и для каждой вершины в любом из этих подмножеств найдется ровно одна, наиболее удаленная из другого. Гипероктаэдр также является простейшей антипризмой в $\mathbb{E}^n$ с основаниями, изометричными правильному $(n - 1)$ -мерному симплексу.

Следствие 4. Множество вершин правильного гипероктаэдра (кокуба) в $\mathbb{E}^n$ с индуцированной из $\mathbb{E}^n$ метрикой однородно по Клиффорду — Вольфу.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Отметим, что метрическое пространство, образуемое вершинами правильного гипероктаэдра в $\mathbb{E}^n$, является неразложимым. Поэтому операция раздутия метрических пространств может приводить к неразложимым пространствам. Этим она принципиально отличается от операции взятия прямого произведения.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим граф K_n с дискретной метрикой (все расстояния между различными вершинами равны 1), $n \geq 4$. Соответствующее метрическое пространство (M, d) КВ-однородно, а группой его движения является группа перестановок $S(n)$. Зафиксируем некоторый цикл ψ максимальной длины в $S(n)$ (т. е. $\psi^n = \text{Id}$ и $\psi^m \neq \text{Id}$ при $1 \leq m < n$). Рассмотрим следующее множество ребер графа: $R = \{\{x, \psi(x)\} \mid x \in M\}$. Циклическая группа $\mathbb{Z}_n$, порождаемая циклом ψ , действует транзитивно на M . Умножим на число α , $\alpha \in (1/2, 2)$, все расстояния между точками, являющимися концами ребер из множества R . Получим новое метрическое пространство, которое будем обозначать через $K_n(1, \alpha)$.

Нетрудно убедиться в том, что $K_n(1, \alpha)$ однородно по Клиффорду — Вольфу. Для этого достаточно заметить, что изометрия ψ^m сдвигает все точки на расстояние α при $m = 1$ или $m = n - 1$ и на расстояние 1 при $2 \leq m \leq n - 2$.

Эта конструкция вместе с теоремой 5 позволяет построить много новых примеров КВ-однородных конечных метрических пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Рассмотрим конечное метрическое пространство (M, d) , $|M| = n$. Любая перестановка $\eta \in S(n)$ порождает некоторую циклическую

группу преобразований множества M и может быть рассмотрена как аналог векторного поля на многообразии (порождаемая ей циклическая группа при этом является аналогом соответствующей однопараметрической группы диффеоморфизмов). Если η является изометрией (M, d) , то естественно ее рассматривать как аналог поля Киллинга на римановом многообразии. Если перестановка η при этом является циклом максимальной длины ($\eta^n = \text{Id}$ и $\eta^m \neq \text{Id}$ при $1 \leq m < n$), то она смещает все точки на одно и то же расстояние, т. е. является переносом Клиффорда — Вольфа. Действительно, пусть $c = d(x, \eta(x))$ для некоторого $x \in M$. Тогда для любого $y \in M$ существует такое число $l \in \mathbb{N}$, что $y = \eta^l(x)$. Поэтому $d(y, \eta(y)) = d(\eta^l(x), \eta^{l+1}(x)) = d(x, \eta(x)) = c$. Следовательно, такой цикл сдвигает все точки на одно и то же расстояние и является аналогом киллингова поля постоянной длины. Таким образом, в приведенной выше конструкции промасштабировали метрику в направлении некоторого «киллингова поля постоянной длины» (см. [1, 4]).

6. Метрические пространства, построенные по графам Кнезера

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n/2$. Графом Кнезера $KG_{n,k} = (V, E)$ называется граф, вершинами которого являются все k -элементные подмножества множества $\mathbb{Z}_n$ (или любого другого n -элементного множества), а ребрами являются пары таких подмножеств с пустым пересечением, т. е. $V = \{A \subset \mathbb{Z}_n \mid |A| = k\}$ и $E = \{\{A, B\} \mid A, B \in V, A \cap B = \emptyset\}$. Понятно, что $|V| = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Отметим, что при $k = 1$ получаем полный граф K_n , при $k = n/2$ граф Кнезера представляет собой паросочетание, а граф $KG_{5,2}$ является графом Петерсена. Обзор результатов, связанных с графами Кнезера, можно найти в [21, гл. 7].

По заданному графу Кнезера $KG_{n,k} = (V, E)$ при $k \geq 2$ определим конечное метрическое пространство $(M = V, d)$ с $|\text{Dist}(M, d)| = 2$. Рассмотрим положительные числа $\alpha_1 \neq \alpha_2$ такие, что $\alpha_1 < 2\alpha_2 < 4\alpha_1$, и определим метрику $d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2}$ следующим образом: $d(A, B) = \alpha_1$ при $A \cap B = \emptyset$ и $d(A, B) = \alpha_2$ при $A \cap B \neq \emptyset$ ($A, B \in V, A \neq B$).

Отметим, что при $k = n/2$ получаем в точности метрические пространства, рассмотренные в примере 5. Эти пространства однородны по Клиффорду — Вольфу. Далее рассматриваем лишь случай $2 \leq k < n/2$, в частности, $n \geq 5$.

Известно, что группа автоморфизмов графа $KG_{n,k}$ при $k < n/2$ совпадает с группой $S(n)$ всех подстановок множества $\mathbb{Z}_n$ (см. следствие 7.8.2 в [21]). Поэтому $S(n)$ является и группой всех изометрий метрического пространства $(M = V, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$: каждая подстановка $\psi \in S(n)$ порождает изометрию $i_\psi : V \rightarrow V$, действующую по формуле

$$i_\psi(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \{\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_k)\}. \quad (10)$$

В частности, все такие пространства однородны (а графы $KG_{n,k}$ вершинно-транзитивны).

Условимся записывать символом $(b_0 b_1 b_2 \dots b_{l-2} b_{l-1})$ цикл (подстановку), переводящий элемент b_i в b_{i+1} для всех индексов $i \in \mathbb{Z}_l$, длину цикла p (количество элементов, участвующих в цикле) будем обозначать через $|p|$. Отметим, что мы рассматриваем лишь циклы длины ≥ 2 (формально рассматриваемый цикл длины один оставляет все точки неподвижными).

Предложение 10. Метрическое пространство $(M = V, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$ нормально однородно тогда и только тогда, когда $\alpha_1 > \alpha_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что конечное метрическое пространство нормально однородно тогда и только тогда, когда оно обобщенно нормально однородно (см. теорему 1). Допустим, что $\alpha_1 < \alpha_2$ и существует δ -сдвиг f в точке $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in V$, переводящий ее в точку $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \in V$, причем $A \cap B = \emptyset$. Ясно, что $d(A, f(A)) = d(A, B) = \alpha_1$. Поскольку f — δ -сдвиг в точке A , для любой точки $C \in V$ выполнено неравенство $d(C, f(C)) \leq d(A, f(A)) = \alpha_1$. Так как f — изометрия, существует подстановка $\psi \in S(n)$, порождающая эту изометрию, т. е.

$$\{b_1, b_2, \dots, b_k\} = f(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \{\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_k)\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $b_1 = \psi(a_1)$.

Рассмотрим точку вида $C = \{a_1, b_1, \dots\}$. Ясно, что $b_1 \in f(C) \cap C$, так как $f(C) = f(\{a_1, b_1, \dots\}) = \{\psi(a_1) = b_1, \psi(b_1), \dots\}$. Поскольку $f(C) \cap C \neq \emptyset$, имеем $f(C, f(C)) = \alpha_2 > \alpha_1$, что невозможно. Таким образом, нужного δ -сдвига не существует и рассматриваемое пространство не обобщенно нормально однородно, а значит, и не нормально однородно по теореме 1.

Пусть теперь $\alpha_1 > \alpha_2$. Для точек $A, B \in V$ на расстоянии α_1 любая изометрия f с $f(A) = B$ является δ -сдвигом в точке A . В силу теоремы 1 и однородности рассматриваемого пространства для доказательства нормальной однородности достаточно доказать, что для любых точек $A, B \in V$, $A \neq B$, $A \cap B \neq \emptyset$, существует изометрия (δ -сдвиг) f такая, что $f(A) = B$ и $d(C, f(C)) \leq d(A, f(A)) = \alpha_2$ для всех $C \in V$. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l, c_1, c_2, \dots, c_{k-l}\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_l, c_1, c_2, \dots, c_{k-l}\}$, где $\{a_1, a_2, \dots, a_l\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_l\} = \emptyset$, $1 \leq l \leq k-1$. Рассмотрим подстановку $\eta \in S(n)$ такую, что $\eta(a_i) = b_i$, $\eta(b_i) = a_i$, $i = 1, \dots, l$, действующую тождественно на остальных элементах $\mathbb{Z}_n$. Порождаемая этой подстановкой изометрия i_η , очевидно, переводит точку A в точку B . Кроме того, $i_\eta(C) \cap C \neq \emptyset$ для всех $C \in V$. Поэтому $d(C, i_\eta(C)) = \alpha_2$ при $i_\eta(C) \neq C$ и $d(C, i_\eta(C)) = 0$ при $i_\eta(C) = C$. Следовательно, можно положить $f := i_\eta$. $\square$

Предложение 11. Пусть f — нетривиальный перенос Клиффорда — Вольфа на метрическом пространстве $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, и пусть он порожден подстановкой $\psi \in S(n)$ по формуле (10). Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) Изометрия f сдвигает все точки на расстояние α_2 .
- (2) Для разложения ψ в произведение циклов $p_1 p_2 \dots p_s$ имеет место неравенство $k > \sum_{i=1}^s \lfloor |p_i|/2 \rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ означает целую часть числа.
- (3) Не существует такой последовательности индексов $\{i_j\}$, $j = 1, \dots, u$ ($0 \leq u \leq s$), и такого числа l , $0 \leq l \leq n - \sum_{i=1}^s |p_i|$, что $\sum_{j=1}^u |p_{i_j}| + l = k$.

Более того, если подстановка $\psi \in S(n)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), то порождаемая ей изометрия i_ψ является переносом Клиффорда — Вольфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. (1). В разложении ψ в произведение циклов есть по крайней мере один цикл (длины ≥ 2), пусть он имеет вид $(ab \dots)$. Рассмотрим точку $C = \{a, b, \dots\} \in V$. Понятно, что $\psi(a) = b$ и $f(C) \cap C \neq \emptyset$. Поэтому $d(C, f(C)) = \alpha_2$.

Докажем п. (2). Допустим, что $k \leq \sum_{i=1}^s \lfloor |p_i|/2 \rfloor$. Тогда можно рассмотреть точку $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in V$, выбранную следующим образом. Первые $\lfloor |p_1|/2 \rfloor$

элементов a_i берем из цикла p_1 , выбирая все его элементы, стоящие на нечетных местах, кроме последнего, если $|p_1|$ нечетно. Аналогично выбираем следующие $\lfloor |p_2|/2 \rfloor$ элементов a_i из цикла p_2 и так продолжаем работать с оставшимися циклами до тех пор, пока не выберем последний элемент a_k . По своему построению точка A такова, что $f(A) \cap A = \emptyset$. Значит, $d(A, f(A)) = \alpha_1$, что невозможно в силу утверждения (1).

Если не выполняется (3), т. е. существуют последовательность индексов $i_1 < i_2 < \dots < i_u$, $1 \leq u \leq s$, и число l , $0 \leq l \leq n - \sum_{i=1}^s |p_i|$, такие, что $\sum_{j=1}^u |p_{i_j}| + l = k$, то можно выбрать точку $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \in V$ такую, что она содержит все элементы каждого из циклов p_{i_j} , $1 \leq u \leq s$, а также еще l элементов, не участвующих ни в одном из циклов p_i , $i = 1, \dots, s$ (они являются элементами $\mathbb{Z}_n$, неподвижными относительно ψ). Ясно, что такая точка B обладает свойством $f(B) = B$, т. е. $d(B, f(B)) = 0$, что противоречит п. (1).

Докажем последнее утверждение. Если подстановка ψ удовлетворяет условию (3), то изометрия i_ψ не имеет неподвижных точек. Если она удовлетворяет условию (2), то для любой точки $D \in V$ имеем $i_\psi(D) \cap D \neq \emptyset$, поэтому $d(D, f(D)) = \alpha_2$. $\square$

Следствие 5. Метрическое пространство $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $n/2 > k \geq 2$, не однородно по Клиффорду — Вольфу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 11 точки на расстоянии α_1 не переводятся друг в друга никаким переносом Клиффорда — Вольфа. $\square$

Следствие 6. Если $k = 2$, то метрическое пространство $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $n \geq 5$, не допускает нетривиальных переносов Клиффорда — Вольфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда по условию (3) из предложения 11 соответствующая подстановка ψ не может иметь более одной неподвижной точки и циклов длины 2 при разложении в произведение циклов. Кроме того, согласно условию (2) в таком разложении может быть лишь один цикл длины 3 (и отсутствуют циклы большей длины), но тогда $n \leq 4$. $\square$

Следствие 7. Если $k = 3$, то метрическое пространство $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $n \geq 7$, допускает нетривиальные переносы Клиффорда — Вольфа только при $n = 7$, причем любой такой перенос порождается подстановкой $\psi \in S(7)$, являющейся циклом длины 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный нетривиальный перенос Клиффорда — Вольфа, порождаемый подстановкой $\psi \in S(n)$. Тогда по условию (3) из предложения 11 ψ при разложении в произведение циклов не может иметь циклов длины 3, при наличии цикла длины 2 — неподвижных точек, при отсутствии циклов длины 2 — более двух неподвижных точек. Кроме того, согласно условию (2) в таком разложении не может быть циклов длины ≥ 6 , а цикл длины 4 или 5 может быть лишь один (при этом должны отсутствовать циклы длины 2). Легко понять, что обоим условиям удовлетворяет лишь цикл длины 5 (с двумя неподвижными точками) при $n = 7$ (при $n > 7$ соответствующий набор циклов и неподвижных точек не может существовать). Если рассмотреть произвольный цикл ψ длины 5 при $n = 7$, то понятно, что для любой точки $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ выполнено условие $A \cap i_\psi(A) \neq \emptyset$ и $A \neq i_\psi(A)$, поскольку $i_\psi(A) = \{\psi(a_1), \psi(a_2), \psi(a_3)\}$. Поэтому $d(A, i_\psi(A)) = \alpha_2$. $\square$

Укажем бесконечно много значений k , при которых существуют пространства $(M = V, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$ с нетривиальными КВ-переносами.

Следствие 8. Пусть $n = 3m$, где $m \geq 3$ и $m \not\equiv -1 \pmod{3}$, а $k = m + 1$. Тогда любая подстановка $\psi \in S(n)$, представляемая в виде произведения m циклов длины 3, является переносом Клиффорда — Вольфа (на расстояние α_2) на метрическом пространстве $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используем предложение 11. Поскольку $k = m + 1$ не делится на 3, а неподвижные точки у ψ отсутствуют, условие (3), очевидно, выполняется. Условие (2) также выполняется. Осталось воспользоваться последним утверждением предложения 11. $\square$

Задача 2. Классифицировать метрические пространства $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, допускающие нетривиальные переносы Клиффорда — Вольфа.

Следующий результат доказывает существование сильно обобщенных нормальных однородных конечных метрических пространств, не являющихся однородными по Клиффорду — Вольфу.

Теорема 6. Метрическое пространство $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $\alpha_1 > \alpha_2$, сильно обобщенно нормально однородно при $(n, k) = (7, 3)$ и при $(n, k) = (3m, m + 1)$, где $m \geq 3$ и $m \not\equiv -1 \pmod{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема будет доказана, если докажем следующие два утверждения:

(1) для любых точек $A, B \in M$ с условием $d(A, B) = \alpha_1$ существует изометрия без неподвижных точек f , переводящая A в B ;

(2) для любых точек $A, B \in M$ с условием $d(A, B) = \alpha_2$ существует перенос Клиффорда — Вольфа f , переводящий A в B .

Утверждение (1) верно для любых n и k при $k \leq n/2$. Рассмотрим точки $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ с $d(A, B) = \alpha_1$. Тогда по определению метрики $d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2}$ имеем $A \cap B = \emptyset$. Рассмотрим подстановку $\psi \in S(n)$, являющуюся циклом длины n следующего вида: $\psi = (a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots a_k b_k \dots)$, т. е. в начале выписываем, чередуя, элементы точек A и B , а затем остальные элементы из $\mathbb{Z}_n$ в произвольном порядке. Понятно, что изометрия $f := i_\psi$ не имеет неподвижных точек и переводит точку A в точку B .

Докажем утверждение (2). Выберем две точки A и B на расстоянии α_2 . Требуется найти перенос Клиффорда — Вольфа f , переводящий A в B . По определению метрики $d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2}$ имеем $A \cap B \neq \emptyset$.

Пусть сначала $(n, k) = (7, 3)$. Поскольку $|A \setminus (A \cap B)| = |B \setminus (A \cap B)| \leq 2$, легко найти цикл ψ длины 5 в $S(7)$, переводящий элементы множества $A \setminus (A \cap B)$ в элементы множества $B \setminus (A \cap B)$ и оставляющий элементы множества $A \cap B$ неподвижными. Понятно, что изометрия $f := i_\psi$, построенная по этому циклу, переводит A в B и является переносом Клиффорда — Вольфа по следствию 7.

Пусть теперь $(n, k) = (3m, m + 1)$, где $m \geq 3$ и $m \not\equiv -1 \pmod{3}$. Понятно, что $|A \setminus (A \cap B)| = |B \setminus (A \cap B)| =: l \leq m$. Пусть $A \setminus (A \cap B) = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ и $B \setminus (A \cap B) = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$.

Определим специальную подстановку $\psi = p_1 p_2 \dots p_m \in S(3m)$, являющуюся произведением m циклов p_i длины 3.

Пусть сначала $l = m$, тогда $A \cap B = \{e\}$ для некоторого элемента e . Положим $p_1 = (a_1 e b_1)$, а каждый цикл p_i , $2 \leq i \leq l$, выберем так, что он переводит элемент a_i в элемент b_i .

Определим нужную нам подстановку при $l < m$. Сначала потребуем, чтобы каждый цикл p_i , $1 \leq i \leq l$, переводил элемент a_i в элемент b_i , а b_i в некоторый элемент, не принадлежащий $A \cup B$.

Пусть $m - l + 1 = 3s + t$, $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \{0, 1, 2\}$. Представим $A \cap B$ в виде объединения s 3-элементных множеств C_j , $j = 1, \dots, s$, и множества C_0 с t элементами. Дополнительно потребуем, чтобы циклы p_{l+j} были циклами на подмножествах C_j , $j = 1, \dots, s$.

Далее разберем три случая: 1) $t = 0$, 2) $t = 1$, 3) $t = 2$. В случае 1 оставшиеся циклы p_i , $i > l + s$, можно взять произвольно.

Рассмотрим случай 2. Пусть $C_0 = \{e\}$. Заменим первый цикл $p_1 = (a_1 b_1 u)$, где $u \notin A \cup B$, циклом $(a_1 e b_1)$. При этом циклы p_i , $i > l + s$, можно взять произвольно из незадействованных ранее элементов.

Рассмотрим случай 3. Пусть $C_0 = \{e, f\}$. Заменим первый цикл $p_1 = (a_1 b_1 u)$, где $u \notin A \cup B$, циклом $(a_1 e b_1)$, второй цикл $p_2 = (a_2 b_2 v)$, где $v \notin A \cup B$, циклом $(a_2 f b_2)$. Следует отметить, что в этом случае $l \geq 2$, поэтому построение корректно. Действительно, если предположить, что $l = 1$, то $m = 3s + t = 3s + 2$, что невозможно в силу условия $m \not\equiv -1 \pmod{3}$. Как в предыдущем случае, циклы p_i , $i > l + s$, можно взять произвольно из незадействованных ранее элементов. Этим построение подстановки ψ закончено.

Ясно, что изометрия $f := i_\psi$, построенная по этой подстановке, переводит A в B и является переносом Клиффорда — Вольфа по следствию 8. Теорема полностью доказана. $\square$

Из теоремы 6 и следствия 5 сразу получаем

Следствие 9. Существуют сильно обобщенные нормальные однородные конечные метрические пространства, не являющиеся однородными по Клиффорду — Вольфу.

Задача 3. Классифицировать метрические пространства $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, являющиеся сильно обобщенными нормальными однородными.

Задача 4. Найти конечное метрическое пространство (M, d) наименьшей мощности, являющееся сильно обобщенным нормальным однородным, но не однородным по Клиффорду — Вольфу.

Теорема 6 дает пример такого пространства мощности 35.

7. Локальный граф

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть (M, d) — конечное однородное метрическое пространство, не изометричное множеству вершин правильного симплекса, 1 — минимальное ненулевое расстояние между точками из (M, d) . По определению множество вершин $V(\Gamma)$ локального графа $\Gamma = \Gamma(O, O')$ пространства (M, d) на вершинах $O, O' \in M$ — объединение двух сфер $S(O, 1) \cup S(O', 1) \subset M$ радиуса 1 с центрами O, O' , где $d(O, O') = 1$; вершины $v, w \in V(\Gamma)$ соединены ребром $\in R = R(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $d(v, w) = 1$.

Очевидно

Предложение 12. Пусть ψ — КВ-перенос (соответственно δ -сдвиг в вершине O) пространства (M, d) и $\psi(O) = O'$. Тогда

$$\psi(S(O, 1)) = S(O', 1), \quad \psi(R(S(O, 1))) = R(S(O', 1))$$

и $(v, \psi(v)) \in R$, если $v \in S(O, 1)$ (соответственно $(v, \psi(v)) \in R$ или $\psi(v) = v$, если $v \in S(O, 1)$).

Рис. 1. (а) додекаэдр; (b) икосаэдр; (с) реберная структура икосаэдра

Теорема 7. Множество вершин (M, d) правильного додекаэдра в $\mathbb{E}^3$ не обобщенно нормально однородно, следовательно, не сильно обобщенно нормально однородно и не КВ-однородно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество вершин $V(\Gamma)$ каждого локального графа $\Gamma = \Gamma(O, O')$ для (M, d) состоит из некоторых точек A, B, O, O', A', B' , где $S(O, 1) = \{A, B, O'\}$, $S(O', 1) = \{A', B', O\}$. При этом $R(\Gamma) = \{OA, OB, OO', O'A', O'B'\}$ (рис. 1(a)). Если (M, d) обобщенно нормально однородно, то существует δ -сдвиг ψ пространства (M, d) в точке O такой, что $\psi(O) = O'$. Так как $A, B \notin S(O', 1)$, вследствие предложения 12 $(A, \psi(A)) \in R(\Gamma)$, $(B, \psi(B)) \in R(\Gamma)$ и $\psi(A) = O = \psi(B)$; противоречие. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Ненулевые расстояния между вершинами правильного додекаэдра могут принимать пять различных значений, точнее, пять реализующихся расстояний между вершинами находятся в пропорции $2/(\sqrt{5} + 1) : 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2/(\sqrt{5} - 1)$.

Теорема 8. Множество вершин (M, d) правильного икосаэдра в $\mathbb{E}^3$ обобщенно нормально однородно, но не сильно обобщенно нормально однородно, а значит, и не КВ-однородно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество вершин $V(\Gamma)$ каждого локального графа $\Gamma = \Gamma(O, O')$ для (M, d) состоит из некоторых точек $O', A, B, C, D, O, D', A'$, где $S(O, 1) = \{O', A, B, C, D\}$, $S(O', 1) = \{O, D, D', A', A\}$ и вершины перечислены в порядке обхода правильных пятиугольников по часовой стрелке. При этом O соединено ребрами со всеми точками из $S(O, 1)$, O' соединено ребрами со всеми точками из $S(O', 1)$ и все пять сторон каждого из двух правильных пятиугольников являются ребрами; других ребер нет (рис. 1(b)).

Предположим, что (M, d) сильно обобщенно нормально однородно. Тогда существует такая изометрия ψ пространства (M, d) , что $\psi(O) = O'$ и $0 < d(X, \psi(X)) \leq d(O, \psi(O) = O')$ для всех точек $X \in M$. Понятно, что изометрия ψ является КВ-переносом, поскольку 1 — наименьшее ненулевое расстояние между точками в M . Вследствие предложения 12 $\psi(S(O, 1)) = S(O', 1)$, $\psi(R(S(O, 1))) = R(S(O', 1))$ и $(v, \psi(v)) \in R$, если $v \in S(O, 1)$. Учитывая, что $B, C \notin S(O', 1)$, $\psi(B) \in \{O, A\}$, $\psi(C) \in \{O, D\}$ и $d(\psi(B), \psi(C)) = 1$, получаем или 1) $\psi(B) = O$, $\psi(C) = D$, или 2) $\psi(B) = A$, $\psi(C) = O$. Вследствие изложенного в случае 1 должно быть $\psi(A) = O' = \psi(O)$, а в случае 2 — $\psi(D) = O' = \psi(O)$; противоречие.

Рис. 2. Локальные графы для различных полуправильных многогранников

Предположим, что ψ — δ -сдвиг пространства (M, d) в точке O такой, что $\psi(O) = O'$. Тогда есть те же случаи 1 и 2, что и выше. В случае 1 должно быть $\psi(A) = A$, $\psi(D) = D'$, $\psi(O') = A'$. Ясно, что ψ — изометрия сферы $S(O, 1)$ на сферу $S(O', 1)$. Более того, эта изометрия — ограничение δ -сдвига ψ пространства (M, d) , осуществляемого вращением икосаэдра вокруг оси, соединяющей вершину A с диаметрально противоположной ей вершиной икосаэдра. В случае 2 должно быть $\psi(D) = D$, $\psi(A) = A'$, $\psi(O') = D'$. Ясно, что ψ — изометрия сферы $S(O, 1)$ на сферу $S(O', 1)$. Более того, эта изометрия — ограничение δ -сдвига ψ пространства (M, d) , осуществляемого вращением икосаэдра вокруг оси, соединяющей вершину D с диаметрально противоположной ей вершиной икосаэдра.

Ненулевые расстояния между вершинами правильного икосаэдра могут принимать три различных значения. Нетрудно показать, что три реализующихся расстояния между вершинами находятся в пропорции $1 : \varphi : \sqrt[4]{5}\sqrt{\varphi}$, где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618033988$ — так называемое золотое сечение. Удобно это выразить в терминах угловых расстояний $s : \alpha < \pi/2, \pi - \alpha, \pi$, причем существует гиперплоскость в $\mathbb{E}^3$, содержащая четыре точки из (M, d) , ненулевые расстояния между которыми могут принимать все три указанных значения (рис. 1(c)). Следует заметить, что $\alpha = 2 \arcsin(1/\sqrt{\varphi^2 + 1}) = 2 \arcsin(\sqrt{2/(5 + \sqrt{5})}) \approx 1,107148717$.

Если $s(A, B) = \pi$, $A, B \in M$, то отображение $\psi = -\text{Id}$ — КВ-перенос для (M, d) и $\psi(A) = B$, $\psi(B) = A$. Вращения ψ и ψ^2 вокруг оси AB на углы $2\pi/5$ и $4\pi/5$ являются δ -сдвигами пространства (M, d) , смещающими все его точки, кроме A, B , на угловые расстояния s , равные соответственно α и $\pi - \alpha$. Отсюда легко вывести, что (M, d) обобщенно нормально однородно. $\square$

Теорема 9. Множество вершин каждого полуправильного евклидова многогранника в $\mathbb{E}^3$ (архимедова тела) — однородное, но не обобщенно нормальное однородное метрическое пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что множества вершин архимедовых тел однородны.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим локальные графы множества вершин архимедовых тел, следуя фотографиям из [6].

Усеченные октаэдр и икосаэдр (номера 7 и 9 из [6]) и ромбоусеченные кубооктаэдр и икосододекаэдр (номера 15 и 16 из [6]) имеют (топологически) тот же локальный граф, что и додекаэдр (рис. 2(a)). Вследствие доказательства теоремы 7 множества их вершин не являются обобщенными нормальными однородными пространствами.

Локальные графы усеченных тетраэдра, куба и додекаэдра (номера 6, 8 и 10 из [6]) содержат два треугольника AOB и $A'O'B'$, соединенные ребром OO' (рис. 2(b)). Для этого локального графа каждое отображение сферы $S(O, 1)$ в сферу $S(O', 1)$, смещающее точки A, B первой сферы на расстояние ≤ 1 , должно переводить точки A, B в одну точку O . Вследствие предложения 12 не существует δ -сдвига ψ в точке O любого из соответствующих метрических пространств такого, что $\psi(O) = O'$, и эти три пространства не являются обобщенными нормальными однородными.

Локальные графы множеств вершин кубооктаэдра и икосододекаэдра (номера 11 и 12 из [6]) состоят из вершин A, B, O, C, O', A', B' и ребер

$$OA, OB, OC, OO', AB, O'C, O'A', O'B', A'B'$$

этих многогранников, причем A, B и включающие их ребра не принадлежат $S(O', 1)$, а A', B' и включающие их ребра не принадлежат $S(O, 1)$ (рис. 2(c)). Ромбокубооктаэдр и ромбоикосододекаэдр (номера 13 и 14 из [6]) имеют по два локальных графа. Их более простые графы отличаются от только что указанного графа лишь отсутствием ребер AB и $A'B'$ (рис. 2(d)). Для этих локальных графов каждое отображение сферы $S(O, 1)$ в сферу $S(O', 1)$, смещающее точки A, B первой сферы на расстояние ≤ 1 , должно переводить точки A, B в одну точку O . Вследствие предложения 12 не существует δ -сдвига ψ в точке O любого из соответствующих метрических пространств такого, что $\psi(O) = O'$, и эти четыре пространства не являются обобщенными нормальными однородными.

Наиболее сложные наборы локальных графов имеют два оставшихся многогранника: курносый куб и курносый додекаэдр (номера 17 и 18 из [6]). Достаточно рассмотреть их наиболее простые локальные графы. Граф курносого додекаэдра состоит из вершин $O, A, B, C, D, O', A', B', C'$ и ребер

$$OA, OB, OC, OD, OO', AB, BC, CD, DO', O'C', O'B', O'A', DC', C'B', B'A',$$

причем A, B, C и включающие их ребра не принадлежат $S(O', 1)$, а A', B', C' и включающие их ребра не принадлежат $S(O, 1)$ (рис. 2(e)). Граф курносого куба получается из указанного графа добавлением ребра AA' (рис. 2(f)). Для первого графа каждое отображение ψ сферы $S(O, 1)$ в сферу $S(O', 1)$, смещающее точки A, B первой сферы на расстояние ≤ 1 , должно переводить точки A, B в одну точку O ; для второго графа возможно еще смещение точки A в точку A' , но при этом

$$d(\psi(A), \psi(B)) > d(A, B) = 1.$$

Вследствие предложения 12 не существует δ -сдвига ψ в точке O любого из соответствующих метрических пространств такого, что $\psi(O) = O'$, и эти два пространства не являются обобщенными нормальными однородными. $\square$

Далее потребуется следующий результат.

Теорема 10 [18, 24]. Каждая конечная подгруппа группы $SO(3)$ является циклической, диэдральной, тетраэдральной, октаэдральной или икосаэдральной группой. Порядки последних трех групп равны соответственно 12, 24 и 60. Если две конечные подгруппы группы $SO(3)$ изоморфны, то они сопряжены в $SO(3)$.

Следствие 10. Порядки конечных подгрупп группы $O(3)$, не содержащихся в $SO(3)$ и содержащих тетраэдральную, октаэдральную или икосаэдральную группу, равны соответственно 24, 48 и 120.

Теорема 11. Множества вершин всех правильных (платоновых) и полуправильных (архимедовых) многогранников в E^3 с индуцированной метрикой, кроме октаэдра, додекаэдра и икосододекаэдра, допускают просто транзитивные группы изометрий, являющиеся конечными подгруппами группы $SO(3)$ или $O(3)$. При этом такие группы являются подгруппами $SO(3)$, если многогранники отличны от куба, ромбоусеченного кубооктаэдра или ромбоусеченного икосододекаэдра. Более того, кроме случая тетраэдра и куба, соответствующие метрики на группах левоинвариантны, но не биинвариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи тетраэдра и куба рассмотрены в предложениях 6 и 7.

Дальнейшие рассуждения используют информацию из [24].

Известно, что все рассматриваемые правильные и полуправильные многогранники допускают транзитивные на множестве вершин подгруппы в $SO(3)$ или $O(3)$.

При этом числа вершин ромбоусеченного кубооктаэдра и ромбоусеченного икосододекаэдра равны соответственно 48 и 120. На основании теоремы 10 и следствия 10 они допускают просто транзитивные на множестве вершин подгруппы группы $O(3)$, но не $SO(3)$. Построенная ранее (на самом деле единственная) просто транзитивная на множестве вершин куба группа порождена отражениями в гиперплоскостях, поэтому она не содержится в $SO(3)$.

Все многогранники, кроме ромбоусеченных кубооктаэдра и икосододекаэдра, допускают транзитивные на множестве вершин подгруппы группы $SO(3)$. Более того, в отличие от всех других многогранников курносые куб и додекаэдр не допускают несобственных, т. е. меняющих ориентацию пространства, симметрий. Поэтому каждый из этих двух многогранников имеет две энантиоморфные формы (правую и левую), получаемые друг из друга центральной симметрией.

Интересно, что на множествах вершин икосаэдра и кубооктаэдра действует просто транзитивно тетраэдральная группа порядка 12 (рис. 10.14 в [24]).

Ввиду теоремы 10 и следствия 10 остается исключить многогранники, числа вершин которых не равны порядку действующих на них групп симметрий. Это только октаэдр с числом вершин $6 \neq 12, 24$, додекаэдр с числом вершин $20 \neq 60$ и икосододекаэдр с числом вершин $30 \neq 60$.

Последнее утверждение теоремы — следствие предложений 6 и 7, теорем 1 и 9. $\square$

Следствие 11. Все включения из теоремы 1 строгие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строгость включений $FGBM \subset FGLM$, $FNHS \subset FHS$, и $FGBM \subset FCWHS$ следует из теорем 9 и 11 и того факта, что множество вершин октаэдра с индуцированной евклидовой метрикой есть по следствию 4 KB-однородное пространство, не являющееся группой (в силу опять же тео-

ремы 11). Строгость включений $FCWHS \subset FSGNHS$ и $FSGNHS \subset FGNHS$ вытекает из следствия 9 и теоремы 8 соответственно. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 497–514.
2. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Clifford–Wolf homogeneous Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 2009. V. 82, N 3. P. 467–500.
3. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Generalized normal homogeneous Riemannian metrics on spheres and projective spaces // Ann. Global Anal. Geom. 2014. V. 45, N 3. P. 167–196.
4. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Римановы многообразия и однородные геодезические. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и PCO-A, 2012.
5. Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1.
6. Веннинджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974.
7. Coxeter H. S. M. Regular polytopes. 3d ed. New York: Dover, 1973.
8. Coxeter H. S. M. Regular complex polytopes. 2nd ed. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1991.
9. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.
10. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
11. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. М.: Мир, 1971.
12. Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.
13. Maschke H. The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams // Amer. J. Math. 1896. V. 18, N 2. P. 156–194.
14. Knauer K., Knauer U. On planar right groups // Semigroup Forum. 2016. V. 92. P. 142–157.
15. Berestovskii V. N., Guijarro L. A metric characterization of Riemannian submersions // Ann. Glob. Anal. Geom. 2000. V. 18, N 6. P. 577–588.
16. Avgustinovich S., Fon-Der-Flaass D. Cartesian products of graphs and metric spaces // European J. Combin. 2000. V. 21, N 7. P. 847–851.
17. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
18. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
19. Babai L. Symmetry groups of vertex-transitive polytopes // Geometriae Dedicata. 1977. V. 6, N 3. P. 331–337.
20. Andersen L. D., Rodger C. A. Decompositions of complete graphs: embedding partial edge-colourings and the method of amalgamations. Surveys in combinatorics, 2003 (Bangor), 7–41, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 307. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003.
21. Godsil C., Royle G. Algebraic graph theory. New York: Springer–Verl., 2001. (Grad. Texts Math.; V. 207).
22. Kutnar K., Marušič D. Recent trends and future directions in vertex-transitive graphs // Ars Math. Contemp. 2008. V. 1, N 2. P. 112–125.
23. Tutte W. T. The factors of graphs // Canadian J. Math. 1954. V. 4. P. 314–328.
24. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1997.

Поступила в редакцию 25 декабря 2018 г.

После доработки 25 декабря 2018 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Никоноров Юрий Геннадьевич
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
nikonorov2006@mail.ru