S. K. Vodopyanov, Isomorphisms of Sobolev spaces on Riemannian manifolds and quasiconformal mappings, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 996–1034

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.503>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.210.77.194

April 26, 2023, 10:28:48

УДК 517.518+517.54

ИЗОМОРФИЗМЫ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

С. К. Водопьянов

Аннотация. Доказано, что измеримое отображение областей на полных римановых многообразиях индуцирует по правилу замены переменной изоморфизм пространств Соболева с первыми обобщенными производными, показатель суммируемости которых равен топологической размерности многообразия, тогда и только тогда, когда оно совпадает почти всюду с некоторым квазиконформным отображением.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.503

Ключевые слова: риманово многообразие, квазиконформное отображение, пространство Соболева, оператор композиции.

Посвящается 90-летию
Юрия Григорьевича Решетняка

Введение

Работу можно рассматривать как естественное продолжение исследований, начатых в [1–10]. В [1–5] получены различные доказательства теоремы о том, что измеримое отображение областей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (областей на группе Карно $\mathbb{G}$ [6–8]), индуцирующее изоморфизм некоторых пространств дифференцируемых функций по правилу замены переменной, совпадает почти всюду с квазиконформным отображением.

В [9] начато исследование аналогичной задачи для измеримых отображений областей римановых многообразий, индуцирующих изоморфизмы классов Соболева с первыми обобщенными производными. Полное решение задачи, обсуждаемой в [9], содержится в двух статьях: в [10] эта задача решена для пространств Соболева, суммируемость функций которых отлична от топологической размерности многообразий; в данной работе содержится полное решение рассматриваемой задачи в том случае, когда суммируемость функций пространств Соболева совпадает с топологической размерностью римановых многообразий.

Метод настоящей работы представляет существенную модификацию рассуждений работы [5] и основан на результатах работ [4, 9, 10]. В [10] введен основной объект исследования: класс IL_p^1 отображений римановых многообразий.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.а03.21.0008) и частичной поддержке гранта РФФИ (код проекта № 17–01–00801).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ — римановы многообразия одинаковой топологической размерности $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{M}$ ($D' \subset \mathbb{M}'$) — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}'$). Будем говорить, что измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow D'$, определенное п. в. в D , принадлежит классу IL_p^1 , $p \in [1, \infty)$, если φ индуцирует оператор композиции в пространствах Соболева:

$$\varphi^* : L_p^1(D') \cap C^\infty(D') \rightarrow L_p^1(D), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L_p^1(D') \cap C^\infty(D'), \quad (1)$$

такой, что

1) справедливы неравенства

$$K^{-1} \|f\|_{L_p^1(D')} \leq \|\varphi^*(f)\|_{L_p^1(D)} \leq K \|f\|_{L_p^1(D')}$$

для любой функции $f \in L_p^1(D') \cap C^\infty(D')$, где постоянная K не зависит от выбора функции f ,

2) образ $\varphi^*(L_p^1(D') \cap C^\infty(D'))$ всюду плотен в $L_p^1(D)$.

В [6, 10] показано, что условие 2 определения 1 не зависит от условия 1.

В данной работе приведено полное описание отображений класса IL_n^1 , где n — топологическая размерность многообразий $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$, т. е. получено полное описание измеримых отображений областей на римановых многообразиях, индуцирующих в смысле определения 1 изоморфизмы пространств Соболева L_n^1 . В [10] исследован случай $p \neq n$, общая схема изложена в [9]. Основной результат настоящей работы сформулирован в следующем утверждении (см. определения основных понятий после формулировки теоремы).

Теорема 2 [9]. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ — римановы многообразия одинаковой топологической размерности $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{M}$ ($D' \subset \mathbb{M}'$) — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}'$), причем $\mathbb{M}'$ — параболическое многообразие. Измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ принадлежит классу IL_n^1 тогда и только тогда, когда φ совпадает п. в. с некоторым квазиконформным отображением $\Phi : D \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \mathbb{M}$ (здесь $x_{\text{inv}} \in D$ — некоторая точка), для которого области $\Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ и D' $(1, n)$ -эквивалентны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Риманово многообразие $\mathbb{M}'$ называется *параболическим*, если $\text{cap}(K; L_n^1(\mathbb{M}')) = 0$ для любого компактного множества $K \subset \mathbb{M}'$, и *гиперболическим* в противном случае.

Напомним, что *емкостью компактного множества* $K \subset \mathbb{M}'$ в пространстве $L_n^1(\mathbb{M}')$ называется величина

$$\text{cap}(K; L_n^1(\mathbb{M}')) = \inf \{ \|\nabla u\|_{L_n(\mathbb{M}')}^n : u \in C_0^\infty(\mathbb{M}') \cap L_n^1(\mathbb{M}'), \text{ и } u \geq 1 \text{ на } K \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Гомеоморфизм $\Phi : D \rightarrow D'$ класса $W_{n, \text{loc}}^1$ называется *квазиконформным*, если существует постоянная K такая, что $|D\Phi(x)|^n \leq K|J(x, \Phi)|$ п. в. в D , где $D\Phi(x)$ — аппроксимативный дифференциал [11] отображения Φ , а $J(x, \Phi) = \det D\Phi(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Два открытых множества D_1 и D_2 называются $(1, p)$ -эквивалентными, если операторы ограничения $r_i : L_p^1(D_1 \cup D_2) \rightarrow L_p^1(D_i)$, $r_i(f) = f|_{D_i}$, где $f \in L_p^1(D_1 \cup D_2)$, являются изоморфизмами.

Это определение совпадает с определением $(1, p)$ -эквивалентности из [10] и эквивалентно определению из [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [12]). Два открытых множества D_1 и D_2 называются $(1, p)$ -эквивалентными, если операторы ограничения $r_i : L_p^1(D_i) \rightarrow L_p^1(D_1 \cap D_2)$

$D_2)$, $r_i(f) = f|_{D_1 \cap D_2}$, где $f \in L_p^1(D_i)$, таковы, что $r_2^{-1} \circ r_1$, $r_1^{-1} \circ r_2$ являются изоморфизмами.

В евклидовом пространстве теорема, аналогичная теореме 2, доказана в [1] при условии, что область D' ограничена. Свойства $(1, p)$ -эквивалентных областей исследованы в евклидовом пространстве в [12], на группе Карно — в [13, 14].

Основу полученного в настоящей работе доказательства теоремы 2 составляет метод работы [5] с существенными добавлениями, неизбежными для рассматриваемой в работе ситуации: в [5] в качестве областей D и D' рассматривается евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а в качестве пространства функций — подходящее нормированное функциональное пространство.

Заметим, что классы отображений IL_p^1 при $p \neq n$ полностью исследованы в [10], где также приведены детальная история данного вопроса и подробная библиография. Для сравнения с теоремой 2 сформулируем основной результат работы [10].

Теорема 7 [10, теорема 1]. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ — римановы многообразия одинаковой топологической размерности $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{M}$ ($D' \subset \mathbb{M}'$) — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}'$), $p \geq 1$, $p \neq n$. Измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ принадлежит классу IL_p^1 тогда и только тогда, когда φ совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией $\Phi : D \rightarrow \Phi(D)$, для которой области $\Phi(D)$ и D' $(1, p)$ -эквивалентны.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Пространства Соболева на римановых многообразиях. Далее фиксируем связное полное риманово многообразие $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, g)$, т. е. гладкое многообразие $\mathbb{M}$, в каждом касательном пространстве $T_x \mathbb{M}$ которого выбрана евклидова метрика g_x , гладко меняющаяся от точки к точке.

Длина абсолютно непрерывной кусочно гладкой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}$ выражается интегралом $l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ (здесь $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$ — длина касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$ в евклидовом пространстве $T_{\gamma(t)} \mathbb{M}$ со скалярным произведением $g_{\gamma(t)}$).

Метрика $d(x, y)$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно гладких кривых с концевыми точками x и y .

Пусть D — область (связное открытое множество) на римановом многообразии $\mathbb{M}$. Определим пространство функций $L_p(D)$, суммируемых в степени $p \in [1, \infty)$, как совокупность измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p d\omega \right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь $d\omega$ — стандартный элемент объема на римановом многообразии $\mathbb{M}$. Если измеримая функция $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ суммируема на каждой компактной части области D , то она называется *локально суммируемой*.

Локально суммируемая функция $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной локально суммируемой функции* $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ вдоль векторного поля X ,

определенного на области D , и обозначается символом $v = Xf$, если

$$\int_D v\psi \, d\omega = - \int_D fX^*\psi \, d\omega$$

для произвольной финитной функции $\psi \in C_0^\infty(D)$ (здесь X^* — дифференциальный оператор, сопряженный к дифференциальному оператору X).

Однородное пространство Соболева $L_p^1(D)$ состоит из локально интегрируемых функций $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих обобщенный градиент $\nabla f \in L_p(D)$. Полунорма в $L_p^1(D)$ определяется как величина

$$\|f\|_{L_p^1(D)} = \|\nabla f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |\nabla f(x)|^p \, d\omega \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $d\omega$ — элемент n -мерного объема, $\nabla f(x)$ — обобщенный градиент функции f в точке $x \in D$, а $|\nabla f(x)|$ — длина обобщенного градиента $\nabla f(x)$ в евклидовом пространстве $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x .

Пространство Соболева $W_p^1(D)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{W_p^1(D)} = \|f\|_{L_p(D)} + \|\nabla f\|_{L_p(D)}.$$

Будем говорить, что f принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(D)$, если $f \in W_p^1(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset D$ такой, что $\bar{V} \subset D$.

Ю. Г. Решетняк предложил в [15] подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{X}, r)$ — полное метрическое пространство, r — метрика на $\mathbb{X}$, а D — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$. Будем говорить, что отображение $\varphi : D \rightarrow \mathbb{X}$ принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(D; \mathbb{X})$, если выполнены следующие условия.

(А) Для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[\varphi]_z : x \in D \mapsto r(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(D)$.

(В) Семейство градиентов $(\nabla[\varphi]_z)_{z \in \mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{p,\text{loc}}(D)$, т. е. существует функция $g \in L_{p,\text{loc}}(D)$, не зависящая от z , такая, что $|\nabla[\varphi]_z(x)| \leq g(x)$ для п. в. $x \in D$.

Если $\mathbb{X} = \mathbb{M}'$ — еще одно риманово многообразие с расстоянием d' , то получаем определение отображения класса Соболева различных римановых многообразий и обозначаем этот класс символом $W_{p,\text{loc}}^1(D; \mathbb{M}')$. В этом случае удобно использовать эквивалентное описание отображения класса Соболева (см., например [16, 17]): отображение $\varphi : D \mapsto \mathbb{M}'$ принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(D; \mathbb{M}')$ тогда и только тогда, когда его можно изменить на множестве нулевой меры так, что

(а) функция $D \ni x \mapsto [\varphi]_z(x) = d'(\varphi(x), z)$ принадлежит $L_{p,\text{loc}}(D)$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;

(б) отображение $\varphi : D \rightarrow \mathbb{M}'$ абсолютно непрерывно на интегральных линиях базисных векторных полей, т. е. для любого открытого ограниченного множества U , $\bar{U} \subset D$, произвольного определенного на U набора X_j , $j = 1, \dots, n$, базисных векторных полей и слоения Γ_k множества U , определяемого векторным полем X_k , отображение φ абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U \in \Gamma_k$ относительно одномерной меры Хаусдорфа для $d\tau$ -п. в. кривых $\gamma \in \Gamma_k$, $k = 1, \dots, n$ (здесь γ — это интегральная линия $\exp tX_k(x)$ векторного поля X_k с началом в

точке $x \in U$, а мера¹⁾ $d\tau$ на слое Γ_k равна внутреннему произведению $i(X_k)$ векторного поля X_k с формой объема ω ;

(с) производная $X_k\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\exp tX_k(x))|_{t=0}$ существует и принадлежит $T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ п. в. в открытом множестве U , $\bar{U} \subset D$, и, кроме того, $|X_k\varphi| \in L_p(U)$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Если отображение $\varphi : D \mapsto \mathbb{M}'$ удовлетворяет только сформулированным выше условиям (а) и (б), то говорят, что φ принадлежит $ACL(D)$. Для такого отображения φ существуют производные $X_k\varphi \in T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ вдоль векторных полей X_k , $k = 1, \dots, n$, п. в. в U (см. [11, 16, 17]).

Матрица, столбцы которой — это векторы $X_k\varphi(x)$, $j = 1, \dots, n$, определяет линейный оператор $D\varphi(x) : T_x\mathbb{M} \mapsto T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ касательного пространства $T_x\mathbb{M}$ в касательное пространство $T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ для п. в. x и называется (формальным) дифференциалом отображения φ в точке x . Пусть $|D\varphi|(x)$ — норма этого оператора. В случае $\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{M}'$ якобиан $J(x, \varphi) = \det D\varphi(x)$ представляет собой определитель матрицы $D\varphi(x)$. Заметим, что в данном случае формальный дифференциал $D\varphi(x)$ совпадает п. в. с аппроксимативным дифференциалом отображения φ [11].

Справедлива следующая формула замены переменных.

Предложение 8 [18]. Пусть отображение $\varphi : A \rightarrow \mathbb{M}'$, где $A \subset \mathbb{M}$ — измеримое множество, имеет аппроксимативные частные производные на A . Тогда существует множество $\Sigma_\varphi \subset A$ меры 0 такое, что формула замены переменных в интеграле Лебега для любой неотрицательной измеримой функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$\int_A f(x)|J(x, \varphi)| d\omega(x) = \int_{\mathbb{M}'} \left(\sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \cap (A \setminus \Sigma_\varphi)} f(x) \right) d\nu(y). \quad (2)$$

Если φ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина, можно считать множество Σ_φ пустым.

1.2. Области Джона и неравенство Пуанкаре. В этом пункте мы применяем неравенство Пуанкаре в областях Джона, доказанное в [19] (более ранние результаты установлены в [20–23]). Более того, это неравенство потребуется далее в некоторой специальной модификации (см. ниже лемму 12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 [24]. Собственная область $\Omega \subset \mathbb{M}$ называется *областью Джона* $J_{\alpha, \beta}$ (коротко $\Omega \in J_{\alpha, \beta}$), $0 < \alpha \leq \beta$, если найдется точка $x_0 \in \Omega$ такая, что любую точку $x \in \Omega$ можно соединить с x_0 спрямляемой кривой γ , которая содержится в Ω и удовлетворяет следующим условиям: если $s \in [0, l]$ — натуральная параметризация кривой γ ($\gamma(0) = x$, $\gamma(l) = x_0$), то

$$l \leq \beta \text{ и } \text{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l} \text{ для всех } s \in [0, l].$$

Лемма 10 [10, лемма 3]. Пусть D — произвольная область в $\mathbb{M}$ и замыкания шаров B_0, B_1 содержатся в этой области. Тогда найдется область Джона

¹⁾Точнее говоря, $d\tau$ будет мерой на любой гладкой $(n-1)$ -мерной поверхности S , трансверсальной к слоению Γ_k . Сформулированное свойство означает следующее: если S_1 и S_2 — две $(n-1)$ -мерные поверхности, трансверсальные к слоению Γ_k и такие, что каждая кривая части Γ'_k слоя Γ_k пересекается как с S_1 , так и с S_2 , то $d\tau$ -мера пересечения $\Gamma'_k \cap S_1$ равна нулю тогда и только тогда, когда равна нулю $d\tau$ -мера пересечения $\Gamma'_k \cap S_2$. Это разъяснение следует отнести и к [10, с. 70].

$\Omega \in J_{\alpha, \beta}$, $\Omega \in D$, с некоторыми параметрами α, β , зависящими от области D и шаров B_0, B_1 , которая будет содержать оба этих шара.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Из доказательства [10, лемма 3] получаем следующее свойство: если $\text{dist}(\partial D, B_0) > 0$ и $\text{dist}(\partial D, B_1) > 0$, то для достаточно малого параметра $\lambda > 0$ можно построить дополнительную область Джона Ω_λ такую, что $\Omega \in \Omega_\lambda \in D$, т. е. области Ω и Ω_λ ограниченные и, кроме того, $\text{dist}(\partial D, \Omega_\lambda) > 0$ и $\text{dist}(\partial \Omega, \Omega_\lambda) > 0$. Действительно, идея доказательства [10, лемма 3] состоит в построении спрямляемой кривой Γ , содержащейся в области D и соединяющей центры шаров B_0, B_1 . Область Джона Ω строится как совокупность шаров с центрами на кривой Γ с радиусом $\delta = \frac{1}{2} \text{dist}(\Gamma, \partial D)$. Область Ω_λ можно построить так же, как и в предыдущем случае, увеличив радиусы исходных шаров, чтобы их замыкания все еще были частью области D , а шары с центрами на кривой Γ имели радиус в интервале $(\frac{1}{2} \text{dist}(\Gamma, \partial D), \frac{3}{4} \text{dist}(\Gamma, \partial D))$.

Лемма 12 [10, лемма 4]. Пусть $U \in M$ — компактно вложенная область Джона $J(\alpha, \beta)$ и измеримое подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру, $|F| > 0$. Тогда для всех $u(x) \in W_p^1(U)$, $p \leq q \leq \frac{np}{n-p}$, $p < n$, таких, что $u|_F = 0$, выполнено неравенство

$$\left(\int_U |u(x)|^q d\omega \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{|U|^{\frac{1}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}} C_U \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n \text{diam}(U)^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \left(\int_U |\nabla u(x)|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}},$$

причем $C_U > 0$ не зависит от u, α, β , но зависит от постоянной в условии удвоения²⁾ на области U (см. детали в [19, разд. 6]).

1.3. Свойства отображений класса IL_p^1 . Для отображений класса IL_p^1 в [10] установлены следующие свойства.

Предложение 13. 1. Областью определения отображения φ можно считать множество $T = \bigcup_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности [10, лемма 13, замечания 9, 10].

2. Отображение φ непрерывно на каждом из T_k [10, лемма 13].

3. На множестве T для отображения φ выполнены $\mathcal{N}$ -свойство и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство Лузина [10, леммы 9, 17].

4. Отображение $\varphi : T \rightarrow D'$ инъективно [10, предложение 8].

5. Образ $\varphi(T)$ всюду плотен в D' и $|D' \setminus \varphi(T)| = 0$ [10, лемма 22].

Оператор (1) распространяется на $L_p^1(D)$ с сохранением свойств оператора композиции:

Лемма 14 [10, лемма 11]. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ — римановы многообразия одинаковой топологической размерности $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{M}$ ($D' \subset \mathbb{M}'$) — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}'$), а отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ принадлежит IL_p^1 , $p \in [1, \infty)$. Тогда оператор $\varphi^* : L_p^1(D') \cap C^\infty(D') \rightarrow L_p^1(D)$ продолжается по непрерывности до оператора $\widetilde{\varphi}^* : L_p^1(D') \rightarrow L_p^1(D)$ и обладает следующими свойствами:

²⁾Так как $U \in \mathbb{M}$, существуют (см., например, [25]) положительные числа r_0 и M такие, что $|B(x, 2r)| \leq M|B(x, r)|$ для всех $x \in U$ и $r \in (0, r_0)$.

1) значение оператора $\widetilde{\varphi}^* : L_p^1(D') \rightarrow L_p^1(D)$ на классах $[f] \in L_p^1(D')$ можно найти по формуле

$$\widetilde{\varphi}^*([f]) = \begin{cases} f \circ \varphi & \text{при } p \leq n, \text{ где } f \text{ — произвольный представитель класса } [f], \\ \tilde{f} \circ \varphi & \text{при } p > n, \text{ где } \tilde{f} \text{ — непрерывный представитель класса } [f]; \end{cases}$$

$$2) K^{-1} \|f\|_{L_p^1(D')} \leq \|\widetilde{\varphi}^*(f)\|_{L_p^1(D)} \leq K \|f\|_{L_p^1(D')};$$

$$3) \widetilde{\varphi}^* : L_p^1(D') \rightarrow L_p^1(D) \text{ — изоморфизм.}$$

§ 2. Пространство $L_{n,F}^1$

Всюду далее фиксируем римановы многообразия $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ одинаковой топологической размерности $n \geq 2$, область $D \subset \mathbb{M}$ ($D' \subset \mathbb{M}'$) на римановом многообразии $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}'$) и отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ класса IL_n^1 . Всякое такое отображение обладает свойствами, сформулированными в п. 1.3.

Фиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ и замкнутое множество положительной меры $F \subset T_{k_0}$ без изолированных точек. Можно считать, что $F \subset B_F$, где $B_F \subset D$ — некоторый шар. В силу замечания 14 из [10] можно также предполагать, что отображение $\varphi : F \rightarrow \varphi(F)$ билипшицево. Такой выбор обеспечивает для образа $\varphi(F)$ выполнение тех же самых свойств, которые имеет множество F : образ $\varphi(F)$ замкнут, не имеет изолированных точек и его мера положительна.

Рассмотрим совокупность функций

$$L_{n,F}^1(D) = \{u \in L_n^1(D) : u(x) = 0 \text{ для п. в. } x \in F\}.$$

Заметим, что $L_{n,F}^1(D)$ является замкнутым подпространством в $L_n^1(D)$ и нормированным пространством с нормой $\|u\|_{L_{n,F}^1(D)} = \|u\|_{L_n^1(D)}$. Последнее легко показать с помощью леммы 12. Следовательно, $L_{n,F}^1(D)$ — банахово пространство.

Аналогично предыдущему определим еще одно банахово пространство

$$L_{n,\varphi(F)}^1(D') = \{v \in L_n^1(D') : v(y) = 0 \text{ для п. в. } y \in \varphi(F)\}.$$

С помощью предложения 13 и леммы 14 можно проверить, что $f \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi \in L_{n,F}^1(D)$. Следовательно, оператор

$$\varphi_F^* : L_{n,\varphi(F)}^1(D') \rightarrow L_{n,F}^1(D), \quad \varphi_F^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$$

является изоморфизмом.

Применение пространств $L_{n,F}^1$ позволит установить существование квази-непрерывного представителя для отображения φ .

Введем обозначения $D_F = D \setminus F$ и $D'_F = D' \setminus \varphi(F)$.

§ 3. Емкость

В этой части приведем основные свойства емкости в пространствах Соболева, которые помогут в изучении дальнейших свойств отображения φ .

3.1. Емкость в пространстве $L_{n,F}^1(D)$ и ее свойства. Приведем понятие и свойства емкости в пространстве $L_{n,F}^1(D)$, которые потребуются нам в дальнейшем. Сформулированные в пп. 4.1, 4.2 настоящей работы свойства емкости аналогичны свойствам емкости работ [3, 26, 27; 5, § 6; 13, § 6; 14], где они доказаны применительно к другим пространствам функций. Для удобства

читателя приводим ссылки на работы, содержащие утверждения, близкие по содержанию к формулируемым в настоящей статье. Доказательства формулируемых здесь утверждений могут быть получены по аналогии с доказательствами их прототипов.

Емкостью $\text{Cap}(K; L_{n,F}^1(D))$ компакта $K \subset D_F$ в пространстве $L_{n,F}^1(D)$ называется величина

$$\text{Cap}(K; L_{n,F}^1(D)) = \inf \|g \mid L_{n,F}^1(D)\|^n, \quad (3)$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $g \in L_{n,F}^1(D)$ таким, что $g \geq 1$ на K .

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Точная нижняя грань в (3) не изменится, если рассматривать неотрицательные непрерывные функции из $L_{n,F}^1(D)$ такие, что $g > 1$ на K .

Для произвольного множества $E \subset D_F$ его *внутренняя емкость* равна

$$\underline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)) = \sup \{ \text{Cap}(K; L_{n,F}^1(D)) : K \subset E, K \text{ компактно} \},$$

а его *внешняя емкость* — величине

$$\overline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)) = \inf \{ \text{Cap}(U; L_{n,F}^1(D)) : E \subset U, U \subset D_F \text{ открыто} \}.$$

В следующей лемме сформулированы основные свойства емкости.

Лемма 16 (см. для сравнения [5, лемма 6.1; 13, теорема 6.1; 14]). Емкость в пространстве $L_{n,F}^1(D)$ обладает следующими свойствами.

(1) Если множество $K \subset D_F$ компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $K \subset U_\varepsilon$ и для всякого компакта $K' \subset U_\varepsilon$

$$\text{Cap}(K'; L_{n,F}^1(D)) \leq \text{Cap}(K; L_{n,F}^1(D)) + \varepsilon.$$

(2) Если $E \subset E'$, то

$$\underline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)) \leq \underline{\text{Cap}}(E'; L_{n,F}^1(D)), \quad \overline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)) \leq \overline{\text{Cap}}(E'; L_{n,F}^1(D)).$$

(3) Пусть $K_1, K_2 \subset D_F$ — компактные множества, тогда

$$\begin{aligned} \text{Cap}(K_1 \cup K_2; L_{n,F}^1(D)) + \text{Cap}(K_1 \cap K_2; L_{n,F}^1(D)) \\ \leq \text{Cap}(K_1; L_{n,F}^1(D)) + \text{Cap}(K_2; L_{n,F}^1(D)). \end{aligned}$$

(4) Пусть $E_1, \dots, E_k \subset D_F$, $F_i \subset E_i$, $\overline{\text{Cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k F_i; L_{n,F}^1(D)\right) < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k E_i; L_{n,F}^1(D)\right) - \overline{\text{Cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k F_i; L_{n,F}^1(D)\right) \\ \leq \sum_{i=1}^k (\overline{\text{Cap}}(E_i; L_{n,F}^1(D)) - \overline{\text{Cap}}(F_i; L_{n,F}^1(D))). \end{aligned}$$

(5) Для всякой возрастающей последовательности множеств $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k \subset \dots \subset D_F$ справедливо

$$\overline{\text{Cap}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k; L_{n,F}^1(D)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\text{Cap}}(E_k; L_{n,F}^1(D)).$$

(6) Пусть $\{E_k\} \subset D_F$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность множеств, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Тогда

$$\overline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\text{Cap}}(E_k; L_{n,F}^1(D)).$$

Множество E называется *измеримым* относительно емкости, если

$$\underline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)) = \overline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)).$$

В силу леммы 16 емкость в пространстве $L_{n,F}^1(D)$ является емкостью в смысле Шоке [29]. Отсюда вытекает, что все аналитические, в частности, борелевские множества измеримы [29].

Говорят, что некоторое свойство выполняется *квазивсюду*, если оно выполняется всюду, за исключением множества, имеющего нулевую емкость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Функция $f \in L_{n,F}^1(D)$ называется *уточненной*, если существует последовательность $\{f_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, функций из $L_{n,F}^1(D) \cap C(D)$ такая, что

$$(1) \|f - f_s\|_{L_{n,F}^1(D)} \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty;$$

(2) для любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $\overline{\text{Cap}}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность f_s сходится к функции f равномерно на $D_F \setminus U_\varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. 1. Всякий элемент пространства $L_{n,F}^1(D)$ содержит уточненную функцию (см. [5, следствие 6.4]).

2. Всякая последовательность уточненных функций, сходящаяся в $L_{n,F}^1(D)$ к уточненной функции f , содержит подпоследовательность, сходящуюся к f квазивсюду (см. [5, следствие 6.7]).

Лемма 19 (см. для сравнения [5, лемма 6.5; 13, лемма 6.4]). Пусть $E \subset D_F$ — произвольное множество и $f \in L_{n,F}^1(D)$ — уточненная функция такая, что $|f(x)| \geq \alpha > 0$ квазивсюду на E . Тогда

$$\overline{\text{Cap}}(E; L_{n,F}^1(D)) \leq \frac{\|f\|_{L_{n,F}^1(D)}^n}{\alpha^n}.$$

Следствие 20. Две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $L_{n,F}^1(D)$, совпадают квазивсюду на D_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f и g — две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $L_{n,F}^1(D)$. В частности,

$$\|f - g\|_{L_{n,F}^1(D)} = 0. \quad (4)$$

Обозначим $\Sigma = \{x \in D_F : f(x) \neq g(x)\}$ и $\Sigma_k = \{x \in D_F : |f(x) - g(x)| > 2^{-k}\}$, тогда

$$\Sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_k.$$

По лемме 19 и неравенству (4) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{\text{Cap}}(\Sigma_k; L_{n,F}^1(D)) = 0$. В силу счетной полуаддитивности внешней емкости (см. лемму 16) выводим $\overline{\text{Cap}}(\Sigma; L_{n,F}^1(D)) = 0$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Для произвольного множества $E \subset D_F$ положим $A(E) = \{f \in L_{n,F}^1(D) : \text{уточненный представитель } \hat{f}(x) \text{ не меньше } 1 \text{ квазивсюду на } E\}$. Функция $f \in A(E)$ называется *допустимой* для множества E .

Лемма 22 (см. для сравнения [14, лемма 6.5]). Пусть $E \subset D_F$ — произвольное множество. Множество $A(E)$ допустимых функций слабо замкнуто и выпукло в $L^1_{n,F}(D)$.

Из леммы 22 вытекает

Следствие 23. Если $E \in D_F$ и $A(E) \neq \emptyset$, то существует единственный элемент $f_E \in A(E)$ такой, что

$$\|f_E \mid L^1_{n,F}(D)\| = \inf\{\|f \mid L^1_{n,F}(D)\| : f \in A(E)\}.$$

Доказательство. Обозначим $I = \inf\{\|f \mid L^1_{n,F}(D)\| : f \in A(E)\}$. Пусть $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A(E)$ — последовательность такая, что $I = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k \mid L^1_{n,F}(D)\|$. Из последовательности $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность f_{k_j} . Обозначим символом f_E ее слабый предел: $f_E = \lim_{\text{сл}}_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}$. По лемме 22 имеем $f_E \in A(E)$. Единственность можно вывести стандартным способом из равномерной выпуклости нормы в пространстве $L^1_{n,F}(D)$. $\square$

Следствие 24 (см. для сравнения [13, следствие 6.5]). Пусть $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность множеств, $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, $A(E_m) \neq \emptyset$ для всех m . Тогда

$$A(E) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A(E_m), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{E_m} \mid L^1_{n,F}(D)\| = \inf\{\|f \mid L^1_{n,F}(D)\| : f \in A(E)\}.$$

Теорема 25 (см. для сравнения [5, теорема 6.11; 13, теорема 6.4]). Для произвольного множества $E \subset D_F$

$$\overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D)) = \inf\{\|f \mid L^1_{n,F}(D)\|^n : f \in A(E)\}.$$

Если $A(E) \neq \emptyset$, то найдется функция f_E такая, что

$$\overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D)) = \|f_E \mid L^1_{n,F}(D)\|^n.$$

Функция f_E из теоремы 25 называется *емкостной функцией* для множества E .

Лемма 26. Если $f \in L^1_{n,F}(D)$ — уточненная функция, то равенство

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(z) d\omega(z) \quad (5)$$

выполняется для квазивсех $x \in D_F$.

Доказательство. Так как результат локальный, можно ограничить рассмотрение на произвольный шар $2B \subset D_F$, который находится в некоторой координатной окрестности. С учетом леммы 12 можно сделать вывод, что уточненная функция $f \in L^1_{n,F}(D)$ принадлежит пространству $W^1_n(2B)$. Так как в шаре $2B$ евклидова метрика эквивалентна римановой, на шаре $2B$ выполняется неравенство Пуанкаре. Следовательно, можно применить вывод работы [30], чтобы получить поточечную оценку

$$|f(x) - f(y)| \leq cd(x, y)(g(x) + g(y)) \quad (6)$$

для всех $x, y \in B \setminus \Sigma$, где $\Sigma \subset B$ — некоторое множество нулевой меры, а $g \in L_n(B)$. В [31, теорема 4.5] доказано, что для всякой уточненной функции, удовлетворяющей неравенству (6), справедливо (5) для квазивсех $x \in B$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Функцию f , определенную квазивсюду на D_F , будем называть *квазинепрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $\overline{\text{Cap}}(U_\varepsilon; L_{n,F}^1(D)) < \varepsilon$ и сужение f на дополнение $D_F \setminus U_\varepsilon$ непрерывно.

ЗАМЕЧАНИЕ 28. Ниже в предложении 34 будет доказано, что функция класса $L_{n,F}^1(D)$ квазинепрерывна тогда и только тогда, когда она — уточненная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Пусть $E \subset D_F$ — произвольное измеримое множество. Точку $x \in D_F$ будем называть *точкой ненулевой плотности* для множества E , если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|B(x, r) \cap E|}{|B(x, r)|} > 0.$$

Совокупность всех точек $x \in D_F$, которые являются точками ненулевой плотности для множества E , будем обозначать символом $\tilde{E}$.

Лемма 30 (см. для сравнения [5, предложение 6.16; 13, теорема 6.5]). Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры. Если функция $f \in L_{n,F}^1(D)$ квазинепрерывна и для п. в. $x \in E$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, где $g : E \cup \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$ — полунепрерывная снизу функция, то $f(x) \geq g(x)$ для квазивсех $x \in \tilde{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция f квазинепрерывна, для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U_ε такое, что $\overline{\text{Cap}}(U_\varepsilon; L_{n,F}^1(D)) < \varepsilon$ и f непрерывна на $D_F \setminus U_\varepsilon$. Пусть f_m — неотрицательная емкостная функция для множества $U_{\frac{1}{m}}$. Так как $\|f_m\|_{L_{n,F}^1(D)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = 0 \quad \text{при квазивсех } x \in D_F. \quad (7)$$

По лемме 26 для любого m имеем

$$f_m(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f_m(z) d\omega(z) \quad \text{при квазивсех } x \in D_F. \quad (8)$$

Поэтому равенства (7) и (8) выполняются при квазивсех $x \in \tilde{E}$. Пусть $x \in \tilde{E}$ — точка, в которой справедливы равенства (7) и (8) одновременно. Поскольку x — точка положительной плотности множества E , найдется число $\rho_0 > 0$ такое, что $\frac{|E \cap B(x, \rho)|}{|B(x, \rho)|} > \delta > 0$ для всех $\rho \in (0, \rho_0)$. Докажем, что при всех достаточно больших m неравенство

$$|U_{\frac{1}{m}} \cap E \cap B(x, \rho)| < |E \cap B(x, \rho)|$$

выполняется для достаточно малых ρ .

Действительно, так как $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = 0$, при достаточно больших m имеем

$f_m(x) < \delta$. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|U_{\frac{1}{m}} \cap E \cap B(x, \rho)|}{|E \cap B(x, \rho)|} &\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|B(x, \rho)|}{|E \cap B(x, \rho)|} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{U_{\frac{1}{m}} \cap E \cap B(x, \rho)} f_m(y) d\omega(y) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, \rho)|} \int_{B(x, \rho)} f_m(y) d\omega(y) = \delta^{-1} f_m(x) < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, найдутся числа $m(x) \in \mathbb{N}$ и $\rho(x) > 0$ такие, что при всех $m > m(x)$ и каждом $\rho \in (0, \rho(x))$ мера множества $V_\rho = (E \cap B(x, \rho)) \setminus U_{\frac{1}{m}}$ положительная.

Учитывая непрерывность f на $D_F \setminus U_{\frac{1}{m}}$ и тот факт, что $f(y) \geq g(y)$ при почти всех $y \in E$, получаем

$$f(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|V_\rho|} \int_{V_\rho} f(y) dy \geq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|V_\rho|} \int_{V_\rho} g(y) dy \geq g(x). \quad \square$$

Следствие 31 (см. для сравнения [5, следствие 6.17; 13, следствие 6.7]). Пусть измеримое множество $E \subset D_F$ имеет положительную меру. Если две квазинепрерывные функции $f_1, f_2 \in L^1_{n,F}(D)$ совпадают п. в. на E , то f_1 и f_2 совпадают квазिवсюду на $\tilde{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, полагая в лемме 30 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ ($f(x) = f_2(x) - f_1(x)$), а $g \equiv 0$, получаем, что $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$ ($f_2(x) - f_1(x) \geq 0$) квазिवсюду на $\tilde{E}$. Следовательно, $f_1(x) = f_2(x)$ квазिवсюду на $\tilde{E}$. $\square$

Следствие 32 (см. для сравнения [5, следствие 6.19]). Для любого множества $E \subset D_F$ справедливо $\overline{\text{Cap}}(E \cup \tilde{E}; L^1_{n,F}(D)) = \overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что по свойству (2) леммы 16 имеем

$$\overline{\text{Cap}}(E \cup \tilde{E}; L^1_{n,F}(D)) \geq \overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D)). \quad (9)$$

Если $\overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D)) = \infty$, то равенство очевидно.

Пусть $\overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D)) < \infty$, тогда согласно теореме 25 и замечанию 18 существует уточненная функция f_E такая, что $\overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D)) = \|f_E \mid L^1_{n,F}(D)\|^n$ и $f(x) \geq 1$ квазिवсюду на E . В силу леммы 30 неравенство $f(x) \geq 1$ справедливо квазिवсюду на $\tilde{E}$. Таким образом, $f_E \in A(E \cup \tilde{E})$. Следовательно,

$$\overline{\text{Cap}}(E \cup \tilde{E}; L^1_{n,F}(D)) \leq \|f_E \mid L^1_{n,F}(D)\|^n = \overline{\text{Cap}}(E; L^1_{n,F}(D)),$$

что вместе с неравенством (9) обеспечивают требуемое равенство. $\square$

Следствие 33 [5, следствие 6.20]. Пусть выполнены условия леммы 30. Если $f(x) = g(x)$ п. в. на множестве $E \subset D_F$, где f — квазинепрерывная на D_F функция, а g — непрерывная на $E \cup \tilde{E}$ функция, то $f(x) = g(x)$ для квазисовсех точек $x \in \tilde{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение сразу следует из леммы 30, поскольку функция g , в частности, полунепрерывна снизу на $E \cup \tilde{E}$. $\square$

Предложение 34. Определения 17 и 27 эквивалентны: каждая уточненная функция квазинепрерывна и, обратно, любая квазинепрерывная функция класса $L_{n,F}^1(D)$ уточненная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если f — уточненная функция, то в силу условия (2) определения 17 для любого $\varepsilon > 0$ найдется некоторое открытое множество U_ε емкости, меньшей $\varepsilon > 0$, такое, что на дополнении $D_F \setminus U_\varepsilon$ последовательность непрерывных функций $f_n \in L_{n,F}^1(D)$ сходится равномерно. Следовательно, f непрерывна на $D_F \setminus U_\varepsilon$.

Пусть функция $f \in L_{n,F}^1(D)$ квазинепрерывна. Тогда по замечанию 18 существует уточненная функция $\tilde{f}$, совпадающая с f п. в. в D_F . По доказанному выше функция $\tilde{f}$ квазинепрерывна, и тем самым по следствию 31 функции f и $\tilde{f}$ совпадают квазिवсюду. Остается заметить, что функция, совпадающая квазिवсюду с уточненной, сама уточненная. $\square$

3.2. Емкость в пространстве потенциалов. Пусть Ω — открытое связное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Емкостью $\text{cap}(K; W_n^1(\Omega))$ компакта $K \subset \Omega$ в пространстве $W_n^1(\Omega)$ называется величина

$$\text{cap}(K; W_n^1(\Omega)) = \inf \|g \mid W_n^1(\Omega)\|^n,$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $g \in W_n^1(\Omega)$ таким, что $g \geq 1$ на K . Для произвольного множества $E \subset \Omega$ его *внутренняя емкость* равна

$$\underline{\text{cap}}(E; W_n^1(\Omega)) = \sup \{ \text{cap}(K; W_n^1(\Omega)) : K \subset E, K \text{ компактно} \},$$

а его *внешняя емкость* — величине

$$\overline{\text{cap}}(E; W_n^1(\Omega)) = \inf \{ \underline{\text{cap}}(U; W_n^1(\Omega)) : E \subset U, U \text{ открыто} \}.$$

Свойства емкости в пространстве $W_n^1(\Omega)$ (см., например, [5]) аналогичны свойствам емкости в пространстве $L_{n,F}^1(D)$, установленным выше.

Пространство бесселевых потенциалов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ — это пространство $S_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ функций вида

$$g(x) = J_\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\alpha(x-y) f(y) dy,$$

где $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, \infty)$, J_α — бесселево ядро [25] на пространстве $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, \infty)$. Определим норму в пространстве потенциалов следующим образом: $\|g \mid S_p^\alpha(\mathbb{R}^n)\| = \|f \mid L_p(\mathbb{R}^n)\|$. Если $\alpha = k$ — натуральное число, то пространство $S_p^k(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Соболева $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ [25]. Далее нас интересует случай, когда $\alpha = 1$, так как $S_p^1(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$.

Бесселева емкость произвольного множества $E \in \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом (см. подробнее в [26]):

$$\text{cap}(E; S_p^1(\mathbb{R}^n)) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{M}} f(y)^p dy : J_1 * f(x) \geq 1 \text{ в точках } x \in E \right\}.$$

В [26] показано, что емкость в пространстве $S_p^1(\mathbb{R}^n)$ является внешней емкостью.

Предложение 35 [26, следствие 2]. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r < 1$. Для бесселевой емкости шара справедлива эквивалентность $\text{cap}(B(x, r); S_n^1(\mathbb{R}^n)) \sim (\ln \frac{2}{r})^{1-n}$.

Замечание 36. В силу эквивалентности норм в $S_n^1(\mathbb{R}^n)$ и $W_n^1(\mathbb{R}^n)$ [25] емкости $\text{cap}(E; S_n^1(\mathbb{R}^n))$ и $\overline{\text{cap}}(E; W_n^1(\mathbb{R}^n))$ также сравнимы, т. е. существуют постоянные m и M такие, что

$$m \overline{\text{cap}}(E; W_n^1(\mathbb{R}^n)) \leq \text{cap}(E; S_n^1(\mathbb{R}^n)) \leq M \overline{\text{cap}}(E; W_n^1(\mathbb{R}^n)).$$

В частности, $\overline{\text{cap}}(E; W_n^1(\mathbb{R}^n)) = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{cap}(E; S_n^1(\mathbb{R}^n)) = 0$.

Лемма 37. Пусть $\Sigma \subset D_F$. Следующие два свойства равносильны:

$$\overline{\text{Cap}}(\Sigma; L_{n,F}^1(D)) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\text{cap}}(\Sigma; W_n^1(\mathbb{M})) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\overline{\text{Cap}}(\Sigma; L_{n,F}^1(D)) = 0$. В силу счетной полуаддитивности емкости можно считать, что множество Σ содержится в шаре $B_\Sigma \subset D$, а множество F — в шаре $B_F \subset D$, при этом $\text{dist}(B_F, B_\Sigma) > 0$, $\text{dist}(\partial D, B_F) > 0$ и $\text{dist}(\partial D, B_\Sigma) > 0$.

Поскольку $\overline{\text{Cap}}(\Sigma; L_{n,F}^1(D)) = 0$, найдется последовательность открытых множеств $\{U_k\}$, упорядоченных по включению, такая, что

$$B_\Sigma \supset U_1 \supset U_2 \cdots \supset \Sigma \quad \text{и} \quad \overline{\text{Cap}}(U_k; L_{n,F}^1(D)) \leq \frac{1}{2^k}.$$

В силу теоремы 25 найдется последовательность функций $h_k \in L_{n,F}^1(D)$ такая, что $h_k \geq 1$ квазिवсюду на U_k и $\|h_k \mid L_{n,F}^1(D)\| \leq 1/2^k$. Переходя к срезке $\min(1, h_k)$, можно считать, что $h_k = 1$ всюду на U_k .

Пусть $\Omega \subset D$ — область Джона, содержащая шары B_Σ , B_F , и $\text{dist}(\partial\Omega, \partial D) > 0$ (лемма 10). Для достаточно малого $\delta > 0$ выберем (см. замечание 11) дополнительную область Джона $\Omega_\delta \supset \Omega$ так, что $\text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_\delta) \geq \delta$ и $\text{dist}(\partial D, \partial\Omega_\delta) \geq \delta$. По неравенству Пуанкаре (лемма 12) имеем $\|h_k \mid L_n(\Omega_\delta)\| \leq C \|h_k \mid L_n^1(\Omega_\delta)\|$. Поэтому, переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $h_k \rightarrow 0$ п. в. на Ω_δ и $\nabla h_k \rightarrow 0$ п. в. на Ω_δ . Выберем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{M})$ такую, что $\eta = 1$ на Ω и $\eta = 0$ на $\mathbb{M} \setminus \Omega_\delta$. Тогда произведения $\eta h_k \in W_n^1(\mathbb{M})$ будут такими, что

$$\eta h_k(x) = \begin{cases} h_k(x) & \text{при } x \in \Omega, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{M} \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

Далее, $|\nabla(\eta h_k)| \leq |(\nabla\eta)h_k| + |\eta \nabla h_k|$, и $\|\eta h_k \mid W_n^1(\mathbb{M})\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\text{cap}(U_k; W_n^1(\mathbb{M})) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда

$$\overline{\text{cap}}(\Sigma; W_n^1(\mathbb{M})) = 0. \quad (10)$$

Пусть верно (10). Тогда найдется убывающая по включению последовательность открытых множеств $\{W_k\} \subset B_\Sigma$, содержащих Σ , такая, что $\text{cap}(\Sigma; W_n^1(\mathbb{M})) \leq 1/2^{k+1}$, и последовательность функций $u_k \in W_n^1(\mathbb{M})$ таких, что $u_k = 1$ квазिवсюду на W_k и $\|u_k \mid W_n^1(\mathbb{M})\|^n \leq 1/2^k$.

Определим срезку $\eta' \in C_0^\infty(\mathbb{M})$ такую, что $\eta = 1$ на B_Σ и $\eta' = 0$ на $\mathbb{M} \setminus \lambda B_\Sigma$, где $\lambda > 1$, при которой $D \supset \lambda B_\Sigma \supset B_\Sigma$ и $\lambda B_\Sigma \cap B_F = \emptyset$. Тогда для функций $\eta' \cdot u_k = f_k \in L_{n,F}^1(D)$ будет $f_k = 1$ на W_k и $\|f_k \mid L_{n,F}^1(D)\|^n \leq c/2^k$, где c — постоянная, не зависящая от k . Отсюда получаем $\text{Cap}(\Sigma; L_{n,F}^1(\mathbb{M})) = 0$. $\square$

Замечание 38. Метод доказательства леммы 37 применим для доказательства более общего утверждения. Пусть $\{U_k\}_1^\infty \subset D_F$ — последовательность открытых множеств, содержащихся в некотором шаре $B(0, R)$, такая, что

$\text{dist}(U_k, \partial D_F) \geq \eta > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда следующие два равенства эквивалентны:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\text{Cap}}(U_k; L_{n,F}^1(D)) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\text{cap}}(U_k; W_n^1(\mathbb{M})) = 0.$$

Более того, последнее свойство не зависит от выбора множества F . В частности, из предложения 35 получаем оценку емкости шара $B(x, r) \subset D_F$:

$$\overline{\text{Cap}}(B(x, r); L_{n,F}^1(D)) = O\left(\left(\ln \frac{2}{r}\right)^{1-n}\right) = o(1)$$

при $r \rightarrow 0$.

В следующей лемме описано характеристическое свойство множеств нулевой емкости.

Лемма 39. Множество $\Sigma \subset D_F$ имеет нулевую внешнюю емкость тогда и только тогда, когда найдется полунепрерывная снизу функция $u \in L_{n,F}^1(D)$ такая, что $u = \infty$ на Σ . Норма функции u может быть выбрана сколь угодно малой.

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. ШАГ 1. Сначала рассмотрим специальное расположение множества Σ : $\Sigma \subset B_\Sigma \Subset W \subset D_F$, где W — координатная окрестность, а B_Σ — шар такой, что $\rho B_\Sigma \subset W$, где $\rho > 1$ — некоторое число. Переходя в координатную окрестность, можно считать, что $\rho B_\Sigma \subset W \subset \mathbb{R}^n$. Отсюда и из леммы 37 выводим

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}(\Sigma; L_{n,F}^1(D)) &= \overline{\text{cap}}(\Sigma; W_n^1(\mathbb{M})) = \overline{\text{cap}}(\Sigma; W_n^1(W)) \\ &= \text{cap}(\Sigma; W_n^1(\mathbb{R}^n)) = \text{cap}(\Sigma; S_n^1(\mathbb{R}^n)) = 0. \end{aligned}$$

Тогда найдется последовательность неотрицательных функций $f_k \in L_n(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\|f_k \mid L_n(\mathbb{R}^n)\| \leq 2^{-k}$ и

$$f_k * J_1(x) \geq 1 \quad \text{во всех точках } x \in \Sigma.$$

Функция

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \tag{11}$$

неотрицательна, принадлежит $L_n(\mathbb{R}^n)$, и $f * J_1(x) = \infty$ во всех точках $x \in \Sigma$. Так как ядро $J_1(z)$ неотрицательно на Σ и непрерывно всюду, кроме одной точки $z = 0$, свертка $f * J_1(x)$ полунепрерывна снизу (по лемме Фату).

Рассмотрим липшицеву функцию $\eta : W \rightarrow [0, 1]$ такую, что

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \rho B_\Sigma, \\ 1, & \text{если } x \in B_\Sigma. \end{cases}$$

Поскольку $W_n^1(\mathbb{R}^n) = S_n^1(\mathbb{R}^n)$, ограничение произведения $\eta(x) \cdot f * J_1(x)$ на W : $u(x) = \eta(x) \cdot (f * J_1)(x)|_W$, очевидно, принадлежит $L_{n,F}^1(D)$ и удовлетворяет всем утверждениям леммы.

Заметим еще, что норма функции $u(x)$ может быть сделана сколь угодно малой, так как свойство функции $f * J_1(x)$ быть равной ∞ в точках множества Σ не зависит от числа слагаемых в сумме (11). Поэтому, удаляя в случае необходимости конечное число слагаемых в ряде (11) и используя его абсолютную сходимость, можно сделать норму

$$\|f * J_1 \mid W_n^1(W)\| = \|f * J_1 \mid L_n(W)\| + \|f * J_1 \mid L_n^1(W)\| \leq \|f * J_1 \mid W_n^1(W)\|$$

сколь угодно малой. Поскольку

$$|\nabla(\eta \cdot f * J_1)(x)| \leq |\nabla\eta(x)| \cdot |f * J_1(x)| + |\eta(x)| \cdot |\nabla(f * J_1)(x)|,$$

сколь угодно малой можно сделать также и норму $\|u\|_{L^1_{n,F}(D)}$.

ШАГ 2. Пусть множество $\Sigma \subset D_F$ нулевой внешней емкости имеет произвольное расположение.

На основании [32, следствие 2] существуют локально конечное покрытие³⁾ $\{B_k\}_{k \geq 1}$ открытого множества $D \setminus F$ шарами $B_k \subset D \setminus F$ и разбиение единицы $\{\psi_k\}_{k \geq 1}$, подчиненное этому покрытию (можно считать, что каждый шар B_k содержится в некоторой координатной окрестности). Более того, существует убывающая к нулю последовательность $\{\rho_k\}$ положительных чисел такая, что последовательность шаров $\{(1 + \rho_k)B_k\}$ также образует локально конечное покрытие $D \setminus F$.

Пересечение $\Sigma \cap B_k$ имеет нулевую внешнюю емкость и удовлетворяет условиям первого шага доказательства. Следовательно, существует неотрицательная полунепрерывная снизу функция $u_k \in L^1_{n,F}(D)$ такая, что $u_k = \infty$ на $\Sigma \cap B_k$ и $\|u_k\|_{L^1_{n,F}(D)} \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$, где ε — произвольное наперед заданное число.

Функция $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ полунепрерывна снизу, принадлежит $L^1_{n,F}(D)$, $u = \infty$ на Σ и

$$\|u\|_{L^1_{n,F}(D)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L^1_{n,F}(D)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon.$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть существует полунепрерывная снизу функция $u \in L^1_{n,F}(D)$ такая, что $u = \infty$ на некотором множестве $\Sigma \subset D_F$. Возьмем произвольное $\lambda > 0$. Тогда множество $U_\lambda = \{x \in D_F : u(x) > \lambda\}$ открыто и содержит Σ , а уточненная функция $\frac{u(x)}{\lambda}$ входит в класс $A(U_\lambda)$ допустимых функций для оценки емкости

$$\overline{\text{Cap}}(\Sigma; L^1_{n,F}(D)) \leq \overline{\text{Cap}}(U_\lambda; L^1_{n,F}(D)) \leq \frac{\|u\|_{L^1_{n,F}(D)}^n}{\lambda^n}$$

(здесь в последнем переходе воспользовались леммой 19). Так как λ — произвольное число, $\overline{\text{Cap}}(\Sigma; L^1_{n,F}(D)) = 0$. $\square$

Теорема 40 [27, теорема 9]. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, $h(\rho)$ — неубывающая непрерывная функция, для которой $h(0) = 0$. Предположим, что

$$\int_0^1 h(\rho)^{\frac{1}{n-1}} \frac{d\rho}{\rho} < \infty.$$

Тогда существует постоянная A такая, что $H_h^\infty(K) \leq A \text{cap}(K; W_n^1(\mathbb{R}^n))$. Таким образом, $H_h^\infty(K) = 0$, если $\text{cap}(K; W_n^1(\mathbb{R}^n)) = 0$. (Здесь $H_h^\infty(K)$ — вместимость по Хаусдорфу.)

Следующее утверждение является аналогом леммы 7.19 из [5].

³⁾ Это означает, что для каждой точки $x \in D \setminus F$ найдется окрестность $U \subset D \setminus F$, которая пересекается только с конечным числом шаров из покрытия $\{B_k\}$.

Лемма 41. Пусть $W \subset D_F$ — координатная окрестность, а B_γ — шар такой, что $\lambda B_\gamma \subset W$, где $\lambda > 1$ — некоторое число. Пусть $\{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательность континуумов, содержащихся в замкнутом шаре $\bar{B}_\gamma \subset D_F$. Имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\text{Cap}}(\gamma_m; L_{n,F}^1(D)) = 0$$

тогда и только тогда, когда $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam } \gamma_m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\text{Cap}}(\gamma_m; L_{n,F}^1(D)) = 0$. Найдется последовательность непрерывных функций $f_m \in L_{n,F}^1(D)$ таких, что $f_m = 1$ на γ_m и $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{L_{n,F}^1(D)} = 0$.

Имеем $\text{dist}(B_\gamma, F) > 0$ и $\lambda B_\gamma \subset D_F$. Определим срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{M})$ такую, что $\eta = 1$ на B_γ и $\eta = 0$ на $\mathbb{M} \setminus \lambda B_\gamma$. Тогда $\eta \cdot f_m = u_m \in W_n^1(\mathbb{M})$ и в силу неравенства Пуанкаре (лемма 12) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{W_n^1(\mathbb{M})} = 0$. Отсюда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{cap}(\gamma_m; W_n^1(\mathbb{M})) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{cap}(\gamma_m; W_n^1(W)) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{cap}(\gamma_m; W_n^1(\mathbb{R}^n)) = 0.$$

Полагая в теореме 40 $h(\rho) = \rho$, выводим $\lim_{m \rightarrow \infty} H_1^\infty(\gamma_m) = 0$. Остается заметить, что $H_1^\infty(E) = \text{diam}(E)$.

Доказательство обратного утверждения очевидно. $\square$

3.3. Обобщенная емкость Тейхмюллера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. Обобщенной емкостью Тейхмюллера кольца $D_{r,R}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r < d(x_0, x) < R\}$ назовем величину

$$CT(r, R) = \inf_u \int_{D_{r,R}} |\nabla u|^n dx,$$

где инфимум берется по всем квазинепрерывным функциям $u \in W_n^1(D_{r,R}(x_0))$, удовлетворяющим условиям $\min u|_{S(0,t)(x_0)} \leq 0$ и $\max u|_{S(0,t)(x_0)} \geq 1$ для п. в. $t \in (r, R)$.

Квазинепрерывная функция непрерывна на почти всех сферах (см. ниже предложение 56), максимум и минимум в определении 42 относится именно к таким сферам.

Предложение 43 [33, предложение 7]. Обобщенная емкость Тейхмюллера $CT(r, R)$ строго положительна для любых $0 < r < R < \infty$.

Следствие 44 [33, следствие 4]. Для обобщенной емкости Тейхмюллера справедлива оценка снизу

$$CT(r, R) \geq \gamma_1 \ln \frac{R}{r}.$$

Предложение 45. Пусть U — область в $\mathbb{M}'$ и $\gamma_0, \gamma_1 \subset U$ — два связных множества, диаметр каждого из которых положительный. Если γ_0 и γ_1 имеют в U общую предельную точку, то не существует квазинепрерывной функции $v \in L_n^1(U)$ такой, что $v|_{\gamma_0} = 0$ и $v|_{\gamma_1} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что такая функция существует. Рассмотрим кольцо $D_{r,R} \subset U$ с центром в общей предельной точке $x \in U$ такое,

что $B(x, R)$ принадлежит некоторой координатной окрестности. Тогда из определения обобщенной емкости Тейхмюллера (см. определение 42) и следствия 44 получаем неравенства

$$\int_U |\nabla v|^n dx \geq \gamma_2 \int_{D_{r,R}} |\nabla v|^n dx \geq \gamma_2 CT(r, R) \geq \gamma_1 \gamma_2 \ln \frac{R}{r}, \quad (12)$$

где γ_2 — постоянная, зависящая от геометрии в окрестности W . Из (12) при $r \rightarrow 0$ получаем, что $\|v\|_{L_n^1(U)}^n = \infty$, а это противоречит принадлежности функции v пространству $L_n^1(U)$. $\square$

§ 4. Свойства отображения φ

Продолжим изучение отображений $\varphi : D \rightarrow D'$ класса IL_n^1 . Всякое такое отображение обладает свойствами, сформулированными в п. 1.3.

4.1. Построение квазинепрерывного представителя отображения φ .

В этом пункте построим квазинепрерывное отображение ψ , которое будет совпадать с отображением φ п. в. на D_F .

Лемма 46. Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, отображение φ непрерывно на E и $f \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L_{n,F}^1(D)$, то $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ квазिवсюду на $E \cap \tilde{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку отображение φ непрерывно на E , функция $f \circ \varphi$ полунепрерывна снизу на E . В силу свойств оператора φ^* (лемма 14) $g = f \circ \varphi$ п. в. на D и, в частности, $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ для п. в. точек $x \in E$. По лемме 30 $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ для квазивсех $x \in E \cap \tilde{E}$. $\square$

Из леммы 46 получаем

Следствие 47. Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящее из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно на E и $f \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L_{n,F}^1(D)$, то $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ квазिवсюду на E .

Лемма 48. Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящее из точек положительной плотности, и отображение φ непрерывно на E . Если $\Sigma \subset D'_F$ — множество нулевой внешней емкости, то множество $\varphi^{-1}(\Sigma) \cap E$ имеет нулевую емкость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — полунепрерывная снизу функция, построенная в лемме 39. По следствию 47 уточненная функция $g = \varphi^* f$ не меньше функции $f \circ \varphi$ квазिवсюду на E . В частности, для квазивсех точек $x \in \varphi^{-1}(\Sigma) \cap E$ имеем $g(x) = \infty$. Из леммы 19 получаем $\overline{\text{Cap}}(\varphi^{-1}(\Sigma) \cap E; L_{n,F}^1(D)) = 0$. $\square$

Из леммы 48 следует

Лемма 49. Пусть $f_k \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — последовательность уточненных функций, сходящаяся квазिवсюду к функции $f \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$. Тогда последовательность $f_k \circ \varphi$ сходится к функции $f \circ \varphi \in L_{n,F}^1(D)$ п. в. на D и квазिवсюду на $T \cap D_F$, где T — множество из предложения 13.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $T = \bigcup_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности. На каждом T_k отображение φ непрерывно.

Пусть $S \subset D'_F$ — множество нулевой внешней емкости, на котором нет сходимости. Тогда в силу леммы 48 для каждого k множество $\varphi^{-1}(S) \cap T_k \cap D_F$ имеет нулевую емкость. Следовательно, по п. (5) леммы 16 множество $\varphi^{-1}(S) \cap T \cap D_F$ имеет нулевую емкость. Отсюда получаем сходимость последовательности $f_k \circ \varphi$ к функции $f \circ \varphi \in L^1_{n,F}(D)$ квазивсюду на $T \cap D_F$. Сходимость последовательности $f_k \circ \varphi$ к функции $f \circ \varphi \in L^1_{n,F}(D)$ п. в. на D очевидна: $|D \setminus T| = 0$. $\square$

Лемма 50. Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящее из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно на E и $f \in L^1_{n,\varphi(F)}(D')$ — уточненная функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная в $L^1_{n,F}(D)$ функция, то $g|_E$ совпадает квазивсюду с функцией $f \circ \varphi|_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_k \in L^1_{n,\varphi(F)}(D')$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к функции f всюду, за исключением множества Σ нулевой внешней емкости. С учетом замечания 18 можно считать, что последовательность уточненных функций $g_k = \varphi^* f_k$ сходится квазивсюду к функции $\varphi^* f$. Функции $g_k = \varphi^* f_k$ согласно следствию 33 совпадают квазивсюду на E с функциями $f_k \circ \varphi|_E$. Таким образом, функция g совпадает квазивсюду на E с функцией $f \circ \varphi$. $\square$

Следствие 51. Пусть T — множество из предложения 13 и $f \in L^1_{n,\varphi(F)}(D')$ — уточненная функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная в $L^1_{n,F}(D)$ функция, то $g|_{T \cap D_F}$ совпадает квазивсюду с функцией $f \circ \varphi|_{T \cap D_F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $T = \bigcup_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности. На каждом из T_k отображение φ непрерывно. Положим в лемме 50 $E = T_k \cap D_F$. Тогда уточненная в $L^1_{n,F}(D)$ функция $g = \varphi^* f$ совпадает с функцией $f \circ \varphi$ квазивсюду на $T_k \cap D_F$. Отсюда получаем утверждение следствия, так как здесь k — произвольное натуральное число. $\square$

Далее продолжается изучение свойств отображения φ .

Лемма 52. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ — римановы многообразия одинаковой топологической размерности $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{M}$ ($D' \subset \mathbb{M}'$) — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}'$), причем $\mathbb{M}'$ — параболическое многообразие. Пусть еще измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ принадлежит классу IL^1_n . Тогда существуют множество $S_\varphi \subset D$ нулевой емкости и квазинепрерывное отображение $\psi : D_F \setminus S_\varphi \rightarrow \overline{D'_F}$ такие, что $\psi(x) = \varphi(x)$ п. в. на D_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 31 достаточно для произвольного открытого шара $Q \Subset D_F$ построить квазинепрерывное отображение $\bar{\varphi} : Q \rightarrow \mathbb{M}'$, совпадающее с отображением φ п. в. на Q .

Пусть $f \in L^1_{n,F}(D)$ — непрерывная функция и $f \geq 1$ на Q . Существует уточненная функция $g \in L^1_{n,\varphi(F)}(D')$, для которой $f = \varphi^* g$. По следствию 51 функции $f|_{T \cap Q}$ и $g \circ \varphi|_{T \cap Q}$ совпадают квазивсюду. Пусть $S_Q \subset T \cap Q$ — множество нулевой емкости, на котором значения функций $f|_{T \cap Q}$ и $g \circ \varphi|_{T \cap Q}$ не

совпадают. Заметим, что для отображения $\varphi : T \cap Q \rightarrow \mathbb{M}'$ выполняются условия лемм 46, 48–50 и их следствий. Кроме того, для всех точек $y \in \varphi(T \cap Q \setminus S_Q)$ имеем $g(y) = g(\varphi(x)) = f(x) \geq 1$. Таким образом, емкость множества $\varphi(T \cap Q \setminus S_Q)$ конечная. Далее рассматриваем отображение φ лишь на множестве $T \cap Q \setminus S_Q$, считая его на $Q \setminus (T \cap Q \setminus S_Q)$ не определенным. Под образом множества $V \subset Q$ следует понимать $\varphi(V \cap (T \cap Q \setminus S_Q))$.

Положим $P_k = \varphi(Q) \cap B(0, k)$, $CP_k = \varphi(Q) \setminus P_k = \varphi(Q) \setminus B(y_0, k)$, где $y_0 \in \varphi(T \cap Q \setminus S_Q)$ — произвольная точка, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что

$$\overline{\text{Cap}}(CP_k; L_{n, \varphi(F)}^1(D')) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Действительно, фиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ и $0 < r < k_0 - 1$ так, что для $k > k_0$ выполнены включения $\varphi(F) \subset B(y_0, r)$ и $CP_k \subset D' \setminus B(y_0, k - 1) \subset \mathbb{M}' \setminus B(y_0, k - 1)$. Отсюда сразу вытекает, что

$$\overline{\text{Cap}}(CP_k; L_{n, \varphi(F)}^1(D')) \leq \text{Cap}(\mathbb{M}' \setminus B(y_0, k - 1); L_{n, \varphi(F)}^1(\mathbb{M}')).$$

Емкость справа стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Это свойство вытекает из параболитичности многообразия $\mathbb{M}'$, так как $\varphi(F)$ — компактное множество в D' , а носитель любой допустимой для емкости функции в определении 3 содержится в $\mathbb{M}' \cap B(y_0, k - 1)$ при некотором k . Отсюда получаем (13) при $k \rightarrow \infty$.

Пусть $g_k \in A(CP_k)$ — последовательность функций такая, что

$$\|g_k | L_{n, \varphi(F)}^1(D')\|^n = \overline{\text{Cap}}(CP_k; L_{n, \varphi(F)}^1(D')).$$

По следствию 51 уточненная функция $f_k = \varphi^* g_k$ совпадает квазизовсюду на множестве $T \cap D_F$ с функцией $g_k \circ \varphi$. Таким образом, $f_k \in A(\varphi^{-1}(CP_k))$.

Обозначим через CF_k подмножество шара Q , состоящее из точек множества $\varphi^{-1}(CP_k)$ и всех точек ненулевой плотности $\varphi^{-1}(CP_k)$. По следствию 32 имеем

$$\overline{\text{Cap}}(CF_k; L_{n, F}^1(D)) = \overline{\text{Cap}}(\varphi^{-1}(CP_k); L_{n, F}^1(D)). \quad (14)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}(\varphi^{-1}(CP_k); L_{n, F}^1(D)) &\leq \|f_k | L_{n, F}^1(D)\|^n \\ &\leq K^n \|g_k | L_{n, \varphi(F)}^1(D')\|^n = K^n \overline{\text{Cap}}(CP_k; L_{n, \varphi(F)}^1(D')), \end{aligned}$$

где K — норма оператора φ^* . Из (13) и (14) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\text{Cap}}(CF_k; L_{n, F}^1(D)) = 0. \quad (15)$$

Обозначим $F_k = Q \setminus CF_k$. Заметим, что $F_k \supset S_Q$ и $F_k \supset (D \setminus T) \cap Q$. Если $x \in F_k \cap T \setminus S_Q$, то $\varphi(x) \in P_k$ и для всех точек $x \in F_k$ выводим

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|F_k \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} = 1. \quad (16)$$

Действительно, для достаточно малых r (таких, что $B(x, r) \subset Q$) получаем $|B(x, r)| = |F_k \cap B(x, r)| + |CF_k \cap B(x, r)|$ или

$$1 = \frac{|F_k \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|} + \frac{|CF_k \cap B(x, r)|}{|B(x, r)|}. \quad (17)$$

По построению множества CF_k для $x \notin CF_k$ ($x \in F_k$) имеем

$$|CF_k \cap B(x, r)|/|B(x, r)| \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

т. е. из (17) следует (16).

Рассмотрим срезки $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{M}')$ такие, что $\eta_k(x) = 1$ в точках $x \in B(y_0, k)$ и $\eta_k(x) = 0$ для $x \notin B(y_0, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\psi_{i,k} \in L_{n,F}^1(D)$ — уточненная функция такая, что $\psi_{i,k} = \varphi^*(y_i \cdot \eta_k)$ (здесь $y_i(\cdot)$ — координатные функции⁴⁾). Из следствия 51 выводим, что $\psi_{i,k}(x) = (y_i \cdot \eta_k)(\varphi(x))$ для квазивсех точек $x \in F_k \cap T$. Поэтому

$$(\varphi^*(y_i \eta_k))(x) = (y_i \cdot \eta_k)(\varphi(x)) = y_i(\varphi(x)) = \varphi_i(x)$$

для квазивсех точек $x \in F_k \cap T$. Таким образом, почти всюду на F_k координатная функция φ_i совпадает с уточненной функцией $\psi_{i,k}$.

Положим

$$\bar{\varphi}_{i,k}(x) = \begin{cases} \psi_{i,k}(x), & \text{если } x \in F_k \setminus S_Q, \\ \varphi_i(x), & \text{если } x \in Q \setminus F_k. \end{cases}$$

Поскольку функция φ_i изменяется на множестве нулевой меры, для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\varphi_i(x) = \bar{\varphi}_{i,k}(x)$ п. в. на Q .

Пусть $k < m$. По построению множеств F_k имеем $F_k \subset F_m$, поэтому на $F_k \cap T$ функции $\varphi^*(y_i \eta_k)$ и $\varphi^*(y_i \eta_m)$ совпадают квазивсюду с функцией φ_i .

Так как по построению все точки множеств F_k имеют плотность, равную единице, уточненные функции $\psi_{i,m}$ и $\psi_{i,k}$ совпадают квазивсюду на F_k (следствие 31). Это позволяет корректно определить квазивсюду на Q функцию

$$\bar{\varphi}_{iQ}(x) = \begin{cases} \psi_{i,k}(x), & \text{если } x \in F_k \setminus S_Q, \\ \varphi_i(x), & \text{если } x \in Q \setminus \bigcup_k F_k. \end{cases}$$

Поскольку $Q \setminus \bigcup_k F_k = \bigcap_k C F_k$, в силу (15) функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ определена квазивсюду на шаре Q .

Покажем, что функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ квазинепрерывна на шаре Q . Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие открытые множества U_1, U_2, U_3 , что

1) существует номер k такой, что $C F_k \subset U_1$ и $\text{Cap}(U_1) < \varepsilon/3$ (в силу (15) и леммы 16);

2) на $D_F \setminus U_2$ функция $\psi_{i,k}$ непрерывна и $\overline{\text{Cap}}(U_2) < \varepsilon/3$ (поскольку функция $\psi_{i,k}$ квазинепрерывна);

3) U_3 содержит все точки множества $Q \setminus U_1$ нулевой емкости, где значения функций $\bar{\varphi}_{iQ}$ и $\psi_{i,k}$ не совпадают, $\overline{\text{Cap}}(U_3) < \varepsilon/3$ (так как $\bar{\varphi}_{iQ}$ и $\psi_{i,k}$ совпадают квазивсюду на F_k (вне $C F_k$)).

Множество $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ имеет емкость $\overline{\text{Cap}}(U) < \varepsilon$, а на дополнении $Q \setminus U$ функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ непрерывна. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ квазинепрерывна. Таким образом, построено квазинепрерывное отображение $\bar{\varphi}_Q : Q \setminus S_Q \rightarrow \bar{D}'_F$, где $S_Q \subset Q$ — некоторое множество нулевой емкости.

Покрывая область D_F счетным конечнократным набором открытых шаров Q_j и повторяя описанную выше процедуру на каждом из шаров Q_j , построим квазинепрерывное отображение

$$\psi(x) = \bar{\varphi}_{Q_j}(x), \quad \text{если } x \in Q_j.$$

⁴⁾Здесь рассматривается произвольное изометрическое вложение $i : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}^m$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ достаточно большой размерности. Координатные функции $y_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m$, — это координатные функции композиции $i \circ f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Известно (см., например, [34]), что $\varphi \in W_{p,\text{loc}}^1(D, \mathbb{M}')$ тогда и только тогда, когда $y_i \in W_{p,\text{loc}}^1(D, \mathbb{R})$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Корректность определения отображения $\psi(x)$ обеспечивается следующим свойством: для двух шаров Q_j и Q_i с непустым пересечением имеем $\varphi_{Q_j}(x) = \varphi_{Q_i}(x)$ для всех $x \in Q_i \cap Q_j$, за исключением некоторого множества $\Sigma_{ij} \subset Q_i \cap Q_j$ нулевой емкости (см. следствие 31). Удалим из D_F множество

$$S_\varphi = \bigcup_{i \neq j} \Sigma_{ij} \cup \bigcup_j S_{Q_j}, \quad (18)$$

имеющее нулевую емкость.

Тогда на $D_F \setminus S_\varphi$ отображение ψ определено корректно. При этом $\psi(x) = \varphi(x)$ для п. в. $x \in D_F$. $\square$

Будем считать, что образ $V \subset D_F$ — это множество $\psi(V \setminus S_\varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 53. Для построенного отображения ψ выполняется следующее свойство: $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in T \setminus Z$, где Z — множество нулевой емкости.

4.2. Построение отображения φ_0 . Все дальнейшие утверждения основаны на отображении $\psi : D_F \setminus S_\varphi \rightarrow \overline{D'_F}$, построенном в лемме 52 при условии, что риманово многообразие M' параболично. Поэтому всюду ниже предполагаем, что многообразие M' параболично. не оговаривая это специально во всех последующих утверждениях.

В этом пункте построим отображение φ_0 такое, что $\varphi_0 = \psi$ квазिवсюду и выполнены эквивалентные оценки на емкости образа и прообраза (см. ниже лемму 55).

В следующей лемме описаны свойства отображения ψ и усилены предыдущие леммы 46, 48, 50.

Лемма 54. 1. Пусть $f \in L^1_{n,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L^1_{n,F}(D)$, то $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

2. Пусть $\Sigma \subset D'_F$. Если $\overline{\text{Cap}}(\Sigma; L^1_{n,\varphi(F)}(D')) = 0$, то

$$\overline{\text{Cap}}(\psi^{-1}(\Sigma) \cap D_F; L^1_{n,F}(D)) = 0.$$

3. Если $f \in L^1_{n,\varphi(F)}(D') \cap C(D')$, то уточненная функция $\varphi^* f$ совпадает с функцией $f \circ \psi$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

4. Пусть квазिवсюду в D'_F выполнено

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y), \quad \text{где } f_k \in L^1_{n,\varphi(F)}(D') \cap C(D') \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^1_{n,\varphi(F)}(D')} < \infty.$$

Тогда уточненная функция $\varphi^* f$ совпадает с суммой $\sum_{k=1}^{\infty} (f \circ \psi)(x)$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

5. Для всякой уточненной функции $f \in L^1_{n,\varphi(F)}(D')$ уточненная функция $g = \varphi^* f$ совпадает с композицией $f \circ \psi$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

6. Для произвольных множеств $A \subset D_F$ и $B \subset D'_F$ таких, что $\psi(A) \subset D'_F$, имеют место оценки

$$\overline{\text{Cap}}(\psi^{-1}(B); L^1_{n,F}(D)) \leq K^n \overline{\text{Cap}}(B; L^1_{n,\varphi(F)}(D')), \quad (19)$$

$$\overline{\text{Cap}}(A \cap \psi^{-1}(D'_F); L^1_{n,F}(D)) \leq K^n \overline{\text{Cap}}(\psi(A) \cap D'_F; L^1_{n,\varphi(F)}(D')), \quad (20)$$

где $K = \max(\|\varphi^*\|, \|\varphi^{*-1}\|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что ψ непрерывно на $D_F \setminus U_\varepsilon$ и $\text{Cap}(U_\varepsilon; L_{n,F}^1(D)) < \varepsilon$. По лемме 30 имеем также $\overline{\text{Cap}}(\tilde{U}_\varepsilon; L_{n,F}^1(D)) < \varepsilon$. Заметим, что все точки дополнения $D_F \setminus \tilde{U}_\varepsilon$ являются точками положительной плотности, а вслед за ними таковыми будут и все точки множества $(D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \tilde{U}_\varepsilon$, так как $|D_F \setminus \psi^{-1}(D'_F)| = 0$.

Композиция $f \circ \psi(x)$ полунепрерывна снизу во всех точках множества $(D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus U_\varepsilon$. По лемме 46 получаем $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ квазिवсюду на $(D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \tilde{U}_\varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

2. Пусть $f \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — полунепрерывная снизу функция, построенная в лемме 39. По п. 1 уточненная функция $g = \varphi^* f$ не меньше функции $f \circ \varphi$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$. В частности, для квазिवсех точек $x \in \varphi^{-1}(\Sigma) \cap D_F \cap \psi^{-1}(D'_F) = \varphi^{-1}(\Sigma) \cap D_F$ имеем $g(x) = \infty$. Из леммы 19 получаем $\text{Cap}(\varphi^{-1}(\Sigma) \cap D_F; L_{n,F}^1(D)) = 0$.

3. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L_{n,F}^1(D)$, то в силу утверждения 1 одновременно имеем $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ и $-g(x) \geq -f \circ \psi(x)$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$. Отсюда получаем равенство $g(x) = f \circ \psi(x)$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

4. Пусть $f_k \in L_{n,\varphi(F)}^1(D') \cap C(D')$, $f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)$ квазिवсюду на D'_F и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\| < \infty.$$

В силу утверждения 2 ряд $f \circ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \circ \psi(x)$ сходится квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k \circ \psi \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\| \leq K \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\| < \infty. \quad (21)$$

Из (21) известным способом (см., например, [5]) выводим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \circ \psi(x)$ сходится равномерно на D_F вне некоторого открытого множества сколь угодно малой емкости. Таким образом, функция $f \circ \psi$ уточненная и, следовательно, $\varphi^* f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f \circ \psi)(x)$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

5. Пусть $f_k \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к функции f всюду, за исключением множества Σ нулевой внешней емкости. По утверждениям 2 и 4 леммы последовательность уточненных функций $g_k = \varphi^* f_k$ сходится квазिवсюду к уточненной функции $g = \varphi^* f$. Уточненные функции $g_k = \varphi^* f_k$ согласно утверждению 3 совпадают с функциями $f_k \circ \varphi \mid_{D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)}$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$. Таким образом, уточненная функция $g = \varphi^* f$ совпадает с функцией $f \circ \psi$ квазिवсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

6. Пусть $f_B \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — емкостная функция для множества B (см. предложение 13), т. е. $\text{Cap}(B; L_{n,\varphi(F)}^1(D')) = \|f_B \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\|^n$. По определению емкостной функции множество $\{y \in B \mid f_B(y) < 1\}$ имеет нулевую

емкость. Поэтому для уточненной функции $g = \varphi^* f_B$ выполнено следующее свойство: $g(x) \geq 1$ квазиглобально на $\psi^{-1}(B)$. Из соотношения

$$\|g \mid L_{n,F}^1(D)\| \leq K \|f_B \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\|$$

выводим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}(\psi^{-1}(B); L_{n,F}^1(D)) &\leq \|g \mid L_{n,F}^1(D)\|^n \\ &\leq K^n \|f_B \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\|^n = K^n \overline{\text{Cap}}(B; L_{n,\varphi(F)}^1(D')), \end{aligned}$$

откуда следует оценка (19).

Пусть $f_{\psi(A)} \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ — емкостная функция для множества $\psi(A) \cap D'_F$. Множество $\{y \in \psi(A) \mid f_{\psi(A)}(y) < 1\}$ имеет нулевую емкость. Поэтому для уточненной функции $g = \varphi^* f_{\psi(A)}$ выполнено свойство $g(x) \geq 1$ квазиглобально на $A \cap \psi^{-1}(D'_F)$. Из соотношения $\|g \mid L_{n,F}^1(D)\| \leq K \|f_{\psi(A)} \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\|$ выводим

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}(A \cap \psi^{-1}(D'_F); L_{n,F}^1(D)) &\leq \|g \mid L_{n,F}^1(D)\|^n \\ &\leq K^n \|f_{\psi(A)} \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\|^n = K^n \overline{\text{Cap}}(\psi(A) \cap D'_F; L_{n,\varphi(F)}^1(D')), \end{aligned}$$

что влечет (20). $\square$

Далее фиксируем счетную систему

$$\mathcal{B} = \{B_j\} \quad (22)$$

шаров в D_F , составляющую базу открытых множеств $U \subset D_F$. Будем считать, что шары, входящие в систему (22), обладают следующими свойствами:

- 1) $B_j \subset D_F$ для всех $j \in \mathbb{N}$;
- 2) вместе с каждым шаром $B_j = B_j(x_j, r_j)$ система $\mathcal{B}$ содержит также счетный набор шаров с центром в точке x_j и радиусами вида $2^{-k} \text{dist}(x_j, D_F)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 55. *Существуют некоторое множество $S_\psi \subset D_F$ нулевой емкости и отображение $\varphi_0 : D_F \setminus S_\psi \rightarrow \overline{D'_F}$ такие, что $\varphi_0(x)$ совпадает с $\psi(x)$ для квазиглобальных $x \in D_F$. Для отображения φ_0 справедливы все утверждения леммы 54, а также оценка*

$$\overline{\text{Cap}}(\varphi_0(B_j) \cap D'_F; L_{n,\varphi(F)}^1(D')) \leq K^{-n} \overline{\text{Cap}}(B_j; L_{n,F}^1(D)) \quad (23)$$

для любого шара B_j системы (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \mathcal{B}$ — произвольный шар счетной базы окрестностей (22), а $g_B \in A(B)$ — емкостная функция шара B (см. теорему 25). Поскольку φ^* — изоморфизм (см. лемму 14), существует уточненная функция $f_B \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$ такая, что $g_B(x) = f_B \circ \psi(x)$ для квазиглобальных $x \in D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$ по утверждению 3 леммы 54.

Рассмотрим множество $\Sigma_B = \{x \in B \cap \psi^{-1}(D'_F) : f_B(\psi(x)) < 1\}$. Тогда в силу того, что $f_B(\psi(x)) = g_B(x) \geq 1$ для квазиглобальных $x \in B \cap \psi^{-1}(D'_F)$, имеем $\overline{\text{Cap}}(\Sigma_B; L_{n,F}^1(D)) = 0$.

Так как $\psi((B \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \Sigma_B) = (\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(\Sigma_B) \subset D'_F$, функция f_B является допустимой для множества $(\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(\Sigma_B) \subset D'_F$, т. е. $f \in A((\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(\Sigma_B))$. Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}(\psi((B \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \Sigma_B); L_{n,\varphi(F)}^1(D')) &\leq \|f_B \mid L_{n,\varphi(F)}^1(D')\|^n \\ &\leq K^{-n} \|g_B \mid L_{n,F}^1(D)\|^n = K^{-n} \overline{\text{Cap}}(B; L_{n,F}^1(D)). \end{aligned}$$

Пусть отображение $\varphi_0(x)$ равно $\psi(x)$ на множестве $D_F \setminus \bigcup_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_{B_j}$ и не определено на $\bigcup_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_{B_j}$. По лемме 16 (п. (6)) имеем $\overline{\text{Cap}}\left(\bigcup_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_{B_j}; L_{n,F}^1(D)\right) = 0$, поэтому отображения φ_0 и ψ совпадают квазिवсюду в D_F .

Таким образом, отображение φ_0 определено теперь на $D_F \setminus S_\psi$, где

$$S_\psi = S_\varphi \cup \bigcup_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_{B_j},$$

а множество S_φ определено формулой (18). Справедливость всех утверждений леммы 54 для отображения φ_0 проверяется непосредственно. $\square$

Под образом $\varphi_0(V)$ произвольного множества $V \subset D_F$ будем понимать образ $\psi(V \setminus S_\psi)$.

4.3. Топологические свойства отображения φ_0 . Продолжим изучения свойств квазинепрерывного отображения φ_0 . Отметим, что шары $B(x, r)$ и сферы $S(x, r)$ рассматриваются в римановой метрике.

Предложение 56 [33, предложение 5]. 1. Отображение φ_0 определено и непрерывно во всех точках сферы $S(x, r)$ для почти всех $r \in (0, \text{dist}(x, \partial D_F))$.

2. Отображение φ_0 непрерывно на почти всех интегральных линиях базисных векторных полей: для каждого шара $B(x, r) \subset D_F$ и почти всех интегральных линий $\gamma \subset B(x, r)$ базисного векторного поля X_i , $i = 1, \dots, n$, отображение φ_0 определено и непрерывно во всех точках интегральной кривой γ .

Предложение 57. Существует множество нулевой меры $\Sigma \subset D_F$ такое, что в сколь угодно малых окрестностях точек $x_1, x_2 \in B \setminus \Sigma$, где $B \subset D_F$ — произвольный открытый шар, найдутся точки, которые можно соединить кривой $\gamma \subset B$, на которой отображение φ_0 непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Фиксируем счетную систему

$$\mathcal{B} = \{B_j\} \tag{24}$$

шаров в D_F , составляющую базу открытых множеств $U \subset D_F$. Будем считать, что шары, входящие в систему (24), обладают следующими свойствами:

- 1) $B_j \subseteq D_F$ для всех $j \in \mathbb{N}$;
- 2) вместе с каждым шаром $B_j = B_j(x_j, r_j)$ система $\mathcal{B}$ содержит также счетный набор шаров с центром в точке x_j и радиусами вида $2^{-k}r_j$;
- 3) всякий шар $B_j \in \mathcal{B}$ содержится в некоторой координатной окрестности.

Очевидно, что для доказательства предложения достаточно в каждом шаре B_j найти множество нулевой меры $\Sigma_{B_j} \subset B_j$ такое, что в сколь угодно малых окрестностях точек $x_1, x_2 \in B_j \setminus \Sigma_{B_j}$ найдутся точки, которые можно соединить кривой $\gamma \subset B_j$, на которой отображение φ_0 непрерывно.

Действительно, если это установлено, то в качестве $\Sigma \subset D_F$ возьмем объединение $\bigcup_j \Sigma_{B_j}$, имеющее нулевую меру. Две произвольные точки $x_1, x_2 \in B \setminus \Sigma$, где $B \subset D_F$ — некоторый открытый шар, можно соединить непрерывной кривой $\gamma \subset B$. На этой кривой можно фиксировать конечный набор точек $x_1 = y_1, y_2, \dots, y_{l+1} = x_2$ таким образом, что две соседние точки y_j, y_{j+1} принадлежат некоторому шару $\{B_j\}$ (при этом некоторые шары могут повторяться). Поскольку расстояние от кривой γ до границы ∂D_F положительно в сколь угодно малых окрестностях точек $y_j, y_{j+1} \in B_j \setminus \Sigma_{B_j}$, найдутся точки $y'_j, y'_{j+1} \in B_j \setminus \Sigma_{B_j}$,

которые можно соединить кривой $\gamma_j \subset B_j$, на которой отображение φ_0 непрерывно. Остается соединить точки y_j и y'_j кривой, на которой отображение φ_0 непрерывно. Точки y_j и y'_j можно взять из некоторого куба (см. ниже шаги 2 и 3 доказательства), что и обеспечивает существование нужной кривой.

ШАГ 2. Пусть $B_j \in \mathcal{B}$ — произвольный шар, содержащийся в некоторой координатной окрестности. Обозначим его символом $B = B_j$. Рассмотрим в координатной окрестности $W \supset B$ постоянные векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $Q \subset B$ — произвольный куб, стороны которого параллельны координатным осям. Любые две точки $x_1, x_2 \in Q$ можно соединить ломаной $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_k$, где $k \leq n$, состоящей из отрезков интегральных линий векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

ШАГ 3. В качестве множества нулевой меры $\Sigma_B \subset B$ возьмем совокупность всех точек в B , не принадлежащих объединению всех интегральных линий векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, на каждой из которых отображение φ_0 непрерывно (см. предложение 56).

ШАГ 4. Пусть $x_1, x_2 \in B \setminus \Sigma_B$. Рассмотрим непрерывную кривую $\Gamma \subset B$, соединяющую точки x_1 и x_2 . Обозначим

$$R_\Gamma = \frac{\text{dist}(\Gamma, \partial B)}{\Lambda},$$

где положительное число Λ выбирается так, что для любой точки $x \in \Gamma$ куб $Q(x, R_\Gamma)$ содержится в B (здесь стороны куба параллельны координатным осям, а длина его ребра равна $2R_\Gamma$).

Покроем кривую Γ конечным числом кубов $Q_j \subset B$ указанного выше вида со сторонами $2R_\Gamma$ и выберем точки $x_1 = y_1, y_2, \dots, y_{l+1} = x_2$ на этой кривой так, что две соседние точки y_j, y_{j+1} принадлежат кубу $\{Q_j\}$ (при этом некоторые кубы могут повторяться). В силу выбора подходящего куба $\{Q_j\}$ точки y_j, y_{j+1} можно соединить кривой $\gamma_j \subset Q_j$, построенной на шаге (1) доказательства. Составная кривая $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_l$ может не быть искомой, поскольку некоторые точки совокупности $y_2, \dots, y_l$ могут принадлежать Σ .

ШАГ 5. Для построения искомой кривой возьмем шар $B(y_1, \varepsilon)$ настолько малого радиуса, что трубчатая окрестность $\bigcup_t B(\gamma(t), \varepsilon)$ кривой γ содержится в B . Для любого $\varepsilon > 0$ в этой трубчатой окрестности найдется кривая, составленная из отрезков интегральных линий векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, на каждой из которых отображение φ_0 непрерывно. Начальная точка такой кривой принадлежит шару $B(x_1, \varepsilon)$, а конечная — шару $B(x_2, \varepsilon)$.

Так как ε может быть взято произвольно малым, доказательство предложения завершено. $\square$

Пусть $x \in T \cap D_F$. Введем обозначение

$$\widehat{B}(x, r) = \left\{ \bigcup_{\rho \in (0, r)} S(x, \rho) \mid \text{отображение } \varphi_0 : S(x, \rho) \rightarrow \mathbb{M}' \text{ непрерывно} \right\} \subset D_F.$$

Таким образом, множество $\widehat{B}(x, r)$ отличается от шара $B(x, r)$ лишь тем, что из шара $B(x, r)$ удалены все сферы $S(x, \rho)$, $\rho \in \sigma_{x, r} \subset (0, r)$, на которых отображение φ_0 разрывно, причем совокупность $\sigma_{x, r}$ таких радиусов имеет нулевую меру на интервале $(0, r)$.

Лемма 58. Пусть дана последовательность положительных чисел $\{r_k\}$, сходящаяся к 0 при $k \rightarrow \infty$. Пусть еще $x \in D_F$ и существует последовательность $u_k \in \widehat{B}(x, r_k) \cap D_F$, для которой $\varphi_0(u_k) \rightarrow y \in D'_F$ при $k \rightarrow \infty$, где y — некоторая точка.

Тогда образы $\varphi_0(\widehat{B}(x, r_k))$ стягиваются к точке $y \in D'_F$ при $k \rightarrow \infty$:

$$\{y\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\varphi_0(\widehat{B}(x, r_k))} \in D'_F. \quad (25)$$

Доказательство. Очевидно, равенство (25) эквивалентно следующему:

$$\sup_{z \in \widehat{B}(x, r_k) \cap D_F} d(\varphi_0(z), y) \rightarrow 0 \quad (26)$$

при $k \rightarrow \infty$. Пусть вопреки доказываемому (26) не выполняется. Тогда существуют число $\vartheta > 0$ и последовательность радиусов $\varkappa_k \in (0, r_k) \setminus \sigma_{x, r_k}$, для которой

$$\text{diam}(\{y\} \cup \varphi_0(S(x, \varkappa_k))) = \sup_{z \in S(x, \varkappa_k) \cap D_F} d(\varphi_0(z), y) \geq \vartheta, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Поскольку $u_k \in \widehat{B}(x, r_k) \cap D_F$, то $u_k \in S(x, \tau_k)$, где $\tau_k \in (0, r_k) \setminus \sigma_{x, r_k}$ и $\tau_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Понятно, что каждый шар $B(x, r_k)$ при достаточно большом k содержится в некотором шаре $B_k = B(x_{j_k}, \rho_{j_k})$ совокупности (24) таком, что $x_{j_k} \in B(x, r_k)$ и $\rho_{j_k} > 2r_k$ (последнее неравенство гарантирует включение $B(x, r_k) \subset B_k$), при этом $\rho_{j_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т. е. с уменьшением r_k до нуля ρ_{j_k} также уменьшается до нуля (см. выше описание совокупности (24)).

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим еще кривую $\gamma_k \subset B_k$ из предложения 57 с концевыми точками в шаре $B(x, \min(\tau_k, \varkappa_k))$ и дополнении $B_k \setminus B(x, r_k)$, в точках которой отображение φ_0 определено и непрерывно.

Обозначим символом K_k компактное множество $S(x, \tau_k) \cup S(x, \varkappa_k) \cup \gamma_k$. Имеем включение $K_k \subset B_k$. Компакт K_k связан, и отображение $\varphi_0 : K_k \rightarrow \overline{D'_F}$ непрерывно.

При вышеописанном выборе компакта K_k и шаров $B_k = B(x_{j_k}, \rho_{j_k})$ с учетом соотношения (23) имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}(\varphi_0(K_k) \cap D'_F; L^1_{n, \varphi(F)}(D')) &\leq \overline{\text{Cap}}(\varphi_0(\widehat{B}(x, r_k)) \cap D'_F; L^1_{n, \varphi(F)}(D')) \\ &\leq \overline{\text{Cap}}(\varphi_0(B_k) \cap D'_F; L^1_{n, \varphi(F)}(D')) \\ &\leq K^{-n} \overline{\text{Cap}}(B_k; L^1_{n, F}(D)) = O\left(\left(\ln \frac{2}{\rho_{j_k}}\right)^{1-n}\right) = o(1) \end{aligned} \quad (28)$$

при $k \rightarrow \infty$ (последняя строка в (28) получена из условия $u_k \rightarrow x \in D_F$ при $k \rightarrow \infty$ и замечания 38).

Из (28) выводим $\overline{\text{Cap}}(\varphi_0(K_k) \cap D'_F; L^1_{n, \varphi(F)}(D')) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Применяя теорему 40 к компактному множеству $\varphi_0(K_k)$, с учетом условия $\varphi_0(u_k) \rightarrow y \in D'_F$ при $k \rightarrow \infty$ получаем $\text{diam } \varphi_0(K_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\text{diam}(\{y\} \cap \varphi_0(K_k)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Последнее противоречит (27), поскольку $S(x, \varkappa_k) \subset K_k$. $\square$

В следующем утверждении будет показано, что образы концентрических сфер, на которых отображение φ_0 непрерывно, стягиваются в точку при стремлении радиуса к нулю.

Следствие 59. Пусть $x \in T \cap D_F$. Тогда

$$\sup_{y \in \varphi_0(\widehat{B}(x, r)) \cap D_F} d(y, \varphi_0(x)) \rightarrow 0 \quad (29)$$

при $r \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем k , для которого $x \in T_k \cap D_F$. Пусть вопреки доказываемому (29) не выполняется. Тогда существуют число $\vartheta > 0$ и последовательность $r_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ такие, что $\sup_{y \in \varphi_0(\widehat{B}(x, r_l)) \cap D_F} d(y, \varphi_0(x)) \geq 2\vartheta$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Отсюда извлекаем последовательность радиусов $\varkappa_l \in (0, r_l) \setminus \sigma_{x, r_l}$, для которой

$$\sup_{y \in \varphi_0(S(x, \varkappa_l)) \cap D_F} d(y, \varphi_0(x)) \geq \vartheta, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Поскольку x — точка положительной плотности, для всех r_l найдется $\tau_l \in (0, r_l) \setminus \sigma_{x, r_l}$ такое, что $S(x, \tau_l) \cap T_k \neq \emptyset$. В силу непрерывности отображения φ_0 на $T_k \cap D_F$ (см. предложение 56) для любого выбора точек $u_l \in S(x, \tau_l) \cap T_k \neq \emptyset$ имеем

$$u_l \rightarrow x \quad \text{и} \quad \varphi_0(u_l) \rightarrow y = \varphi_0(x) \in D'_F \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty.$$

Значит, для последовательности u_l выполнены все условия леммы 58, из заключения которой выводим (29). $\square$

Из предложения 56 и следствия 59 выводим следующие свойства отображения φ_0 .

Следствие 60. Пусть $x \in T \cap D_F$. Для любого достаточно малого $\rho > 0$ найдется число $\delta_{x, \rho} > 0$ такое, что

1) для сфер $S(x, r) \subset D_F$ радиуса $r \in (0, \delta_{x, \rho}) \setminus \sigma_{x, r}$ их образы $\varphi_0(S(x, r))$ содержатся в шаре $B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F$, т. е.

$$\varphi_0(\widehat{B}(x, \delta_{x, \rho})) \subset B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F; \quad (30)$$

2) для почти всех интегральных линий γ базисных векторных полей образы $\varphi_0(\gamma \cap B(x, \delta_{x, \rho}))$ содержатся в шаре $B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F$.

Следствие 61. Пусть $x \in T \cap D_F$. Для шаров, удовлетворяющих соотношению (30), справедливо следующее свойство: для любой точки $y \in B(x, \delta_{x, \rho})$ образы $\varphi_0(\widehat{B}(y, \tau))$ стягиваются к единственной точке $z \in \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F$ при $\tau \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную последовательность $\tau_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для $k \in \mathbb{N}$ можно найти точку $u_k \in B(x, \delta_{x, \rho}) \cap \widehat{B}(y, \tau)$. Имеем следующие свойства: $u_k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$, а $\varphi_0(u_k) \in \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\varphi_0(u_k) \rightarrow y \in D'_F$. Значит, для последовательности u_k выполнены все условия леммы 58, из заключения которой выводим утверждения следствия 61. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62. Пусть $x \in T \cap D_F$. Для достаточно малого $\rho > 0$ найдем по следствию 60 число $\delta_{x, \rho} > 0$, для которого будет выполняться следующее включение:

$$\varphi_0(\widehat{B}(x, \delta_{x, \rho})) \subset B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F.$$

Если точка $y \in B(x, \delta_{x, \rho})$ принадлежит пересечению $T \cap D_F$, то

$$\lim_{z \rightarrow y, z \in \widehat{B}(y, \delta_1)} \varphi_0(z) = \varphi_0(y),$$

где δ_1 — достаточно малое положительное число, если не принадлежит, то значение отображения φ_0 в точке y не задано, но по следствию 61 определен предел

$$\lim_{z \rightarrow y, z \in \widehat{B}(y, \delta_2)} \varphi_0(z) \in D'_F,$$

который возьмем в качестве $\varphi_0(y)$ (здесь δ_2 — достаточно малое положительное число).

Следовательно, во всех точках шара $B(x, \delta_{x,\rho})$ определено отображение, которое обозначим тем же символом φ_0 . Это отображение имеет следующее свойство:

$$\varphi_0(y) \in \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F \quad \text{для любой точки } y \in B(x, \delta_{x,\rho}), \quad (31)$$

более того, в этом случае

$$\{\varphi_0(y)\} = \bigcap_{r \rightarrow 0} \overline{\varphi_0(\widehat{B}(y, r))} \in D'_F.$$

Предложение 63. Отображение $\varphi_0 : B(x, \delta_{x,\rho}) \rightarrow \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F$, где $x \in T \cap D_F$, непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. СЛУЧАЙ 1: $y \in B(x, \delta_{x,\rho}) \cap T \cap D_F$. В силу определения 62 для достаточно малого $\tau > 0$ существует число $\delta_{y,\tau} > 0$, для которого по (31) будут выполняться следующие включения: $\varphi_0(\widehat{B}(y, \delta_{y,\tau})) \subset B(\varphi_0(y), \tau) \subset \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F$, что и доказывает непрерывность отображения φ_0 в точке $y \in B(x, \delta_{x,\rho}) \cap T \cap D_F$.

СЛУЧАЙ 2: $y \in B(x, \delta_{x,\rho}) \setminus (T \cap D_F)$. В силу определения 62 для достаточно малого $\tau > 0$ существует число $\delta_{y,\tau} > 0$, для которого будут выполняться следующие включения: $\varphi_0(\widehat{B}(y, \delta_{y,\tau})) \subset B(\varphi_0(y), \tau) \subset \overline{B(\varphi_0(y), \tau)} \subset D'_F$.

Так же, как и случае 1, для любой точки $z \in B(y, \delta_{y,\tau})$ имеем

$$\varphi_0(z) \in \overline{B(\varphi_0(y), \tau)} \subset D'_F.$$

Отсюда аналогично предыдущему получаем непрерывность отображения φ_0 в точке $y \in B(x, \delta_{x,\rho}) \setminus (T \cap D_F)$. $\square$

Предложение 64. Отображения

$$\varphi_0 : B(x, \delta_{x,\rho}) \rightarrow \overline{B(\varphi_0(x), \rho)}, \quad \varphi_0 : B(y, \delta_{y,\rho}) \rightarrow \overline{B(\varphi_0(y), \rho)},$$

где $x, y \in T \cap D_F$, совпадают на пересечении $B(x, \delta_{x,\rho}) \cap B(y, \delta_{y,\rho})$, если оно непустое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с определением 62 значение отображения φ_0 в точке $z \in B(x, \delta_{x,\rho}) \cap B(y, \delta_{y,\rho})$ можно определить, исходя либо из отображения $\varphi_0 : B(x, \delta_{x,\rho}) \rightarrow \overline{B(\varphi_0(x), \rho)}$, либо из отображения $\varphi_0 : B(y, \delta_{y,\rho}) \rightarrow \overline{B(\varphi_0(y), \rho)}$. Найдется шар $B(z, r_z) \subset B(x, \delta_{x,\rho}) \cap B(y, \delta_{y,\rho})$, на котором оба способа определения значения отображения φ_0 в точке z будут совпадать. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65. Для точек $x \in T \cap D_F$ рассмотрим семейство шаров $B(x, \delta_{x,\rho}) \subset D_F$ из определения 62. На открытом множестве

$$U = \bigcup_{x \in T \cap D_F} B(x, \delta_{x,\rho})$$

в силу предложения 64 корректно определено непрерывное отображение, которое будем обозначать символом $\tilde{\varphi}_0$. При этом $U \subset D_F$ и $|D_F \setminus U| = 0$.

Очевидно, отображение $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow D'_F$ — продолжение отображения $\varphi_0 : T \cap D_F \rightarrow D'_F$ до непрерывного отображения на открытом множестве U . Так как $T \cap D_F$ всюду плотно в U , такое продолжение единственное.

Предложение 66. *Отображение $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow \tilde{\varphi}_0(U)$ — гомеоморфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 13

- 1) отображение $\varphi : T \cap D_F \rightarrow D'_F$ инъективно,
- 2) образ $\varphi(T \cap D_F)$ всюду плотен в D'_F и $|D'_F \setminus \varphi(T \cap D_F)| = 0$,
- 3) отображение $\varphi : T \cap D_F \rightarrow D'_F$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством

Лузина.

Следовательно, по лемме 14 обратное отображение $\varphi^{-1} : T' \rightarrow D_F$, где $T' = \varphi_0(T)$, порождает оператор композиции $\varphi^{*-1} : L_p^1(D) \cap C^\infty(D) \rightarrow L_p^1(D')$.

Применяя вышедоказанные результаты к отображению $\varphi^{-1} : T' \rightarrow D_F$, получаем непрерывное отображение $\tilde{\varphi}_0^{-1} : V \rightarrow D_F$, определенное на некотором открытом множестве $V \subset D'_F$ со значениями в D_F , при этом $|D'_F \setminus V| = 0$. Можно сделать так, что $\tilde{\varphi}_0(U) = V$.

Поскольку $\varphi_0(T \cap D_F)$ всюду плотно в V , из вышеустановленного выводим инъективность отображения $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow V \subset D'_F$ и его гомеоморфность. $\square$

4.4. Квазиконформность отображения $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow V$. В этом пункте $U \subset D_F$ — открытое множество из определения 65, а $V = \tilde{\varphi}_0(U)$. Основной результат настоящего пункта сформулирован в следующем утверждении.

Предложение 67. *Отображение $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow V$ квазиконформно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти, например, в [35]. Однако здесь приведем другие рассуждения, имеющие более широкую область применения.

Доказательство предложения 67, по существу, сводится к тому, чтобы установить абсолютную непрерывность отображения $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow V$ на почти всех интегральных линиях базисных векторных полей (коротко $\tilde{\varphi}_0 \in \text{ACL}(U)$) и точечное неравенство

$$|D\tilde{\varphi}_0(x)| \leq K|J(x, \tilde{\varphi}_0)|^{\frac{1}{n}} \quad \text{п. в. в } U. \quad (32)$$

Поскольку $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow V$ — аппроксимативно дифференцируемый гомеоморфизм [10, лемма 21], из формулы замены переменной (2) выводим, что якобиан $J(x, \tilde{\varphi}_0)$ локально интегрируем в U . Более того, в силу неравенства Гёльдера локально интегрируемой будет также и степень якобиана $J(x, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}}$.

Лемма 68 [10, лемма 20]. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ — римановы многообразия одинаковой размерности $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{M}$ ($D' \subset \mathbb{M}'$) — область в $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}'$), а измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ принадлежит классу IL_n^1 . Если $u \in \text{Lip}(D') \cap L_n^1(D')$ и $\|u\|_{L_n^1(D')} \leq 1$, то

$$|\nabla(u \circ \varphi)|(x) \leq K \cdot J(x, \varphi)^{\frac{1}{n}} \quad \text{п. в. на } D,$$

где K — некоторая постоянная.

Лемма 69. Если даны римановы многообразия $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ одинаковой размерности $n \geq 2$, области $D \subset \mathbb{M}$ и $D' \subset \mathbb{M}'$ и измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ класса IL_n^1 , то $\tilde{\varphi}_0 \in W_{n, \text{loc}}^1(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\tilde{\varphi}_0 \in \text{ACL}(U)$. Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в V . Зададим счетное семейство функций $d_{z_j}^r : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, $d_{z_j}^r(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, $(d_{z_j}(y) = d(z_j, y))$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d_{z_j}^r(x) = d_{z_j}^r \circ \tilde{\varphi}_0(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, для всех точек $x \in U$.

Кроме того, каждая такая функция удовлетворяет условиям леммы 68. Поэтому $|\nabla(d_{z_j}^r \circ \tilde{\varphi}_0)| (x) \leq C J(x, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}}$ для п. в. $x \in U$.

Рассмотрим слоение Γ_s открытого множества U , порожденное векторным полем X_s , и интегральную линию γ из этого слоения. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_s выполнены следующие условия:

- 1) $\tilde{\varphi}_0$ непрерывно на γ (предложение 56);
- 2) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций:

$$|\nabla(\tilde{\varphi}_0^* d_{z_j}^r)| (t) \leq K J(t, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}}, \quad r \in \mathbb{Q}^+, \quad j \in \mathbb{N},$$

п. в. на γ , и функция $J(t, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}}$ интегрируема на произвольной компактной части γ .

- 3) для п. в. $x_0 \in \gamma$ существует конечный предел отношения

$$\frac{1}{d(x_0, x)} \int_{[x_0, x]} J(t, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}} d\sigma$$

при $x \rightarrow x_0$ по кривой γ , равный $J(x_0, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}}$ (здесь $[x_0, x] \subset \gamma$ — отрезок интегральной линии);

- 4) функции $\varphi^* d_{z_j}^r$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_s$, на которой выполняются все четыре свойства.

Пусть $x_0 \in U \cap \gamma$ — точка положительной линейной плотности на кривой γ и точка, в которой выполняется условие 3. Положим $z = \tilde{\varphi}_0(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящуюся к $z = \tilde{\varphi}_0(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности через z_l). Так как отображение $\tilde{\varphi}_0$ непрерывно на γ в точке x_0 , можно подобрать числа δ , r и L такие, что $\tilde{\varphi}_0(B(x_0, \delta) \cap \gamma) \subset V$ (следствие 60) и $d_{z_l}^r \circ \tilde{\varphi}_0(x) \neq 0$ для всех $l \geq L$ и всех точек $x \in B(x_0, \delta) \cap \gamma$.

Интегрируя функцию $K J(x, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}}$ (где K не зависит от r, z) по части кривой γ от x_0 до x , где $x \in B(x_0, \delta) \cap \gamma$, выводим

$$\begin{aligned} K \int_{[x_0, x]} J(t, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}} dt &\geq \int_{[x_0, x]} |\nabla(\tilde{\varphi}_0^* d_{z_j}^r)| (t) dt \\ &\geq |d_{z_l}^r \circ \tilde{\varphi}_0(x_0) - d_{z_l}^r \circ \tilde{\varphi}_0(x)| = |r - d_{z_l}(\tilde{\varphi}_0(x_0)) - r + d_{z_l}(\tilde{\varphi}_0(x))| \\ &= |-d_{z_l}(\tilde{\varphi}_0(x_0)) + d_{z_l}(\tilde{\varphi}_0(x))| \rightarrow d_z(\tilde{\varphi}_0(x)) = d(\tilde{\varphi}_0(x_0), \tilde{\varphi}_0(x)) \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d(\tilde{\varphi}_0(x_0), \tilde{\varphi}_0(x)) \leq K \int_{[x_0, x]} J(t, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}} d\sigma \quad (33)$$

для всех $x \in B(x_0, \delta) \cap \gamma$. Из оценки (33) и абсолютной непрерывности интеграла вытекает, что отображение $\tilde{\varphi}_0$ абсолютно непрерывно на $B(x_0, \delta) \cap \gamma$.

В силу произвола в выборе базисного поля X_j , интегральной кривой $\gamma \in \Gamma_j$ и точки $z_0 \in \gamma$ отображение $\tilde{\varphi}_0$ абсолютно непрерывно вдоль почти всех интегральных кривых.

Из (33) имеем

$$\frac{d(\tilde{\varphi}_0(x_0), \tilde{\varphi}_0(x))}{d(x_0, x)} \leq \frac{K}{d(x_0, x)} \int_{[x_0, x]} J(t, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}} d\sigma.$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow x_0$, получаем оценку

$$|X_s \tilde{\varphi}_0(x_0)| \leq KJ(x_0, \tilde{\varphi}_0)^{\frac{1}{n}}. \quad (34)$$

Следовательно, $|X_s \tilde{\varphi}_0| \in L_{n,\text{loc}}(D_F)$ для всех s и $\tilde{\varphi}_0 \in W_{n,\text{loc}}^1(U)$. $\square$

Другие свойства отображений классов Соболева на римановом многообразии, в частности формулу замены переменной, можно найти, например, в [36].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 67. Принадлежность гомеоморфизма $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow V$ классу Соболева $W_{n,\text{loc}}^1(U)$ доказана в лемме 69. Поточечное неравенство (32) вытекает из (34).

4.5. Локальная связность U и V . Обозначим $S = D_F \setminus U$. Пусть $x \in S$. Возможны два случая:

- 1) найдется $r_0 > 0$ такое, что $\overline{\tilde{\varphi}_0(\hat{B}(x, r))} \subset D'_F$ для всех $r < r_0$,
- 2) $\tilde{\varphi}_0(S(x, r_k)) \cap \partial D'_F \neq \emptyset$ для некоторой последовательности $r_k \rightarrow 0$.

При выполнении случая 1 отображению $\tilde{\varphi}_0$ можно приписать значение в точке x : полагаем

$$\tilde{\varphi}_0(x) = \bigcap_{r \rightarrow 0} \overline{\tilde{\varphi}_0(\hat{B}(x, r))} \in D'_F.$$

При таком задании значения $\tilde{\varphi}_0(x)$ приходим к ситуации, аналогичной той, которая рассмотрена в определении 62. Следовательно, отображение $\tilde{\varphi}_0(x)$ можно задать не только в точке x , но и в точках некоторого шара $B(x, \delta_{x,\rho})$ способом, указанным в определении 62. Так же, как и в предложении 63, доказываем, что отображение $\tilde{\varphi}_0 : B(x, \delta_{x,\rho}) \rightarrow D'_F$ непрерывно во всех точках шара $B(x, \delta_{x,\rho})$. Стало быть, области U и V можно расширить, а множество S сузить.

Далее считаем, что для всех точек $x \in S$ выполнено свойство 2.

Пусть $x \in S$. Найдется последовательность $\{x_k \in U\}$, сходящаяся к x , такая, что $\tilde{\varphi}_0(x_k) \rightarrow \partial D'$ при $k \rightarrow \infty$. В этом случае справедлива

Лемма 70. Для любого шара $B(x, r) \subset D_F$ с центром $x \in S$ множество $B(x, r) \cap U$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так и $B(x, r) \cap U$ состоит из нескольких компонент связности. Тогда образ $\tilde{\varphi}_0(B(x, r))$ разделяется границей $\partial D'_F$ на несколько компонент связности: $\tilde{\varphi}_0(B(x, r)) = V_1 \cup V_2 \cup \dots$ или $D'_F \setminus \tilde{\varphi}_0(S(x, r)) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots$.

Рассмотрим в области D_F гладкую срезку

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{на } B(x, r/2), \\ 0 & \text{вне } B(x, r). \end{cases}$$

Пусть, например, $|\tilde{\varphi}_0^{-1}(V_1) \cap B(x, r/2)| > 0$. Построим функцию $g : D'_F \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что

$$g(y) = \begin{cases} \eta \circ \tilde{\varphi}_0^{-1}(y) & \text{на } V_1, \\ 0 & \text{на } V_0 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \end{cases}$$

Очевидно, что g — непрерывная функция на V . Покажем, что $g \in L_{n,\varphi(F)}^1(D')$. Так как отображение $\tilde{\varphi}_0 : B(x, r) \cap U \rightarrow \tilde{\varphi}_0(B(x, r)) \cap V$ квазиконформно, функция g принадлежит $L_n^1(\tilde{\varphi}_0(B(x, r)) \cap V)$. Следовательно, g локально интегрируема и имеет суммируемые в степени n обобщенные производные в $\tilde{\varphi}_0(B(x, r)) \cap V$. В частности, в некоторой координатной окрестности W' многообразия M' функция g абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях базисных векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_j}$ и существуют производные $v_j = \frac{\partial g}{\partial x_j}$ п. в. в $\tilde{\varphi}_0(B(x, r)) \cap V$,

$j = 1, 2, \dots, n$. Остается показать, что v_j — обобщенная производная функции g в W' , т. е. выполнено равенство

$$\int_{W'} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy = - \int_{W'} v_j(y) \cdot \eta(y) dy \quad (35)$$

для любой тестовой функции $\eta \in C_0^\infty(W')$. По теореме Фубини

$$\int_{W'} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy = \int_{\text{Pr}_j W'} dy_1 \dots \widehat{dy_j} \dots dy_N \int_{\text{Pr}_j^{-1}(y) \cap W'} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy_j,$$

где $\text{Pr}_j W'$ — проекция W' на гиперповерхность, трансверсальную векторному полю $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\text{Pr}_j^{-1}(y)$ — интегральная линия $\frac{\partial \eta}{\partial x_j}$, проходящая через точку $y \in \text{Pr}_j W'$. Поскольку $g = 0$ на $V_0 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Pr}_j^{-1}(y) \cap W'} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy_j \\ &= \int_{\text{Pr}_j^{-1}(y) \cap V_0 \cup V_1 \cap V_2 \cup \dots} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy_j = \int_{\text{Pr}_j^{-1}(y) \cap V_1} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy_j. \end{aligned}$$

Пересечение $\text{Pr}_j^{-1}(y) \cap V_1$ можно представить в виде счетного объединения интервалов: $\text{Pr}_j^{-1}(y) \cap V_1 = \bigcup_l \gamma_l$. Тогда

$$\int_{\text{Pr}_j^{-1}(y) \cap V_1} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy_j = \sum_l \int_{\gamma_l} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy_j.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, выводим

$$\int_{\gamma_l} g(y) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(y) dy_j = g(y) \psi(y) \Big|_{\gamma_l(t_0^l)}^{\gamma_l(t_1^l)} - \int_{\gamma_l} \frac{\partial g}{\partial x_j}(y) \cdot \psi(y) dy_j.$$

Заметим, что $\gamma_l(t_0^l) \in \partial V_1$ и возможны два случая:

- 1) $\gamma_l(t_0^l) \in D'_F$, тогда $g(\gamma_l(t_0^l)) = 0$,
- 2) $\gamma_l(t_0^l) \in \partial D'_F$, тогда $\psi(\gamma_l(t_0^l)) = 0$.

Аналогично для точки $\gamma_l(t_1^l)$. Таким образом, внеинтегральный член равен нулю:

$$g(y) \psi(y) \Big|_{\gamma_l(t_0^l)}^{\gamma_l(t_1^l)} = 0,$$

и равенство (35) доказано. Следовательно, $g \in L_{n,\varphi(F)}^1(W')$. Так как $W' \subset D'_F$ — произвольная координатная окрестность, имеем $g \in L_{n,\varphi(F)}^1(D'_F)$.

Далее, $\varphi^* g$ принадлежит $L_{n,F}^1(D)$ и п. в. на $B(x, r/2)$ принимает только два значения (0 и 1). Следовательно, $\nabla \varphi^* g = 0$ п. в. на $B(x, r/2)$, и, значит, $\varphi^* g = g \circ \tilde{\varphi}_0$ — постоянная функция на $B(x, r/2)$. Полученное противоречие приводит к выводу: пересечение $B(x, r) \cap U$ связно. $\square$

Аналогичное свойство выполняется и в образе.

Лемма 71. Для любого шара $B(y, r) \subset D'_F$ с центром $y \in \varphi_0(S)$ пересечение $B(y, r) \cap V$ связное.

4.6. Продолжение отображения $\tilde{\varphi}_0$ на S и его свойства. В этом пункте понадобится следующая

Лемма 72. Пусть даны кривые $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1) \rightarrow V$ такие, что расстояние между ними положительное. Тогда никакая точка из D_F не может предельной точкой для каждого из прообразов $\beta_1 = \tilde{\varphi}_0^{-1}(\gamma_1)$ и $\beta_2 = \tilde{\varphi}_0^{-1}(\gamma_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, найдется точка $y \in D_F$, предельная для прообразов $\tilde{\varphi}_0^{-1}(\gamma_1)$ и $\tilde{\varphi}_0^{-1}(\gamma_2)$: существует последовательность $t_k \in [0, 1)$, $t_k \rightarrow 1$ ($\tau_k \in [0, 1)$, $\tau_k \rightarrow 1$) при $k \rightarrow \infty$ такая, что $\beta_1(t_k) \rightarrow y$ ($\beta_2(\tau_k) \rightarrow y$) при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим непрерывную функцию $g \in L^1_n(D')$ такую, что $g = 0$ на γ_1 и $g = 1$ на γ_2 . Тогда композиция $f = g \circ \tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, принимающая значение 0 на β_1 и 1 на β_2 . Более того, $\varphi^*(g) \in L^1(D)$. Существование такой функции противоречит предложению 45. $\square$

Покажем, что отображение можно продолжить на часть множества S (исключая те точки, образы которых могут переходить в бесконечно удаленную точку). Пусть $x \in S$. Возможны два случая.

1. Для некоторой последовательности $\{x_n \in U\}$, сходящейся к x , последовательность образов $\tilde{\varphi}_0(x_n)$ сходится к некоторой точке $z \in \partial D'_F$.

2. Для любой последовательности $\{x_n \in U\}$, сходящейся к x , имеет место сходимости $d(\tilde{\varphi}_0(x_n), y_0) \rightarrow \infty$, где y_0 — фиксированная точка компакта $\varphi(F)$ (этот случай будет рассмотрен ниже).

Докажем, что в первом случае отображение $\tilde{\varphi}_0$ продолжается по непрерывности в точку $x \in S$.

Предложение 73. Отображение $\tilde{\varphi}_0 : U \rightarrow V$ продолжается по непрерывности во все точки $x \in S$, для каждой из которых существует последовательность $\{x_n \in U\}$, сходящаяся к x , такая, что последовательность образов $\tilde{\varphi}_0(x_n)$ сходится к некоторой точке $z \in \partial D'_F$.

Продолженное отображение инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что предел z не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Допустим, что $U \ni x'_n \rightarrow x$ — другая последовательность и $\tilde{\varphi}_0(x'_n) \rightarrow z' \in \partial D'_F$, причем $z \neq z'$. В силу локальной связности V можно построить две кривые $\gamma, \gamma' \subset V$, находящиеся на положительном расстоянии $\text{dist}(\gamma, \gamma') \geq \delta > 0$ и проходящие через образы $\tilde{\varphi}_0(x_n)$, $\tilde{\varphi}_0(x'_n)$ соответственно (начиная с некоторого $n > n_0$). Тогда прообразы $\tilde{\varphi}_0^{-1}(\gamma)$ и $\tilde{\varphi}_0^{-1}(\gamma')$ будут иметь предельную точку $x \in D_F$. По лемме 72 получаем противоречие.

Доопределим отображение $\tilde{\varphi}_0$ в точке x : $\tilde{\varphi}_0(x) = z$. Таким образом, построено непрерывное продолжение отображения $\tilde{\varphi}_0$ на множество S , за исключением тех точек, которые отображаются в бесконечно удаленную точку. Будем обозначать продолжение тем же символом.

Проверим инъективность отображения $\tilde{\varphi}_0$. Допустим, что нашла точка $z \in Z$ такая, что $z = \tilde{\varphi}_0(x_1) = \tilde{\varphi}_0(x_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in S$. Рассмотрим кривые γ_1, γ_2 , проходящие через точки x_1, x_2 соответственно и находящиеся на положительном расстоянии ($\delta = \text{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$). Рассмотрим произвольные последовательности $\{x_n^1 \in U\}$, $\{x_n^2 \in U\}$ такие, что $x_n^i \rightarrow x_i$ при $n \rightarrow \infty$ и $x_n^i \in \gamma_i$. Построим последовательность кривых σ_n , соединяющих точки $\tilde{\varphi}_0(x_n^1)$ и $\tilde{\varphi}_0(x_n^2)$

так, что $\text{diam } \sigma_n \rightarrow 0$. Тогда $\text{Cap}(\tilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n); L_n^1(U)) \rightarrow 0$ и $\text{diam } \tilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n) \rightarrow 0$. Приходим к противоречию, поскольку $\text{diam } \tilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n) \geq \delta$. $\square$

Таким образом, от множества S остаются лишь точки, удовлетворяющие второму из описанных перед предложением 73 случаев. В следующем утверждении докажем, что если множество S непусто, то оно состоит только из одной точки.

Лемма 74. *Может существовать самое большее одна точка $x_{\text{inv}} \in S$ такая, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset U$, сходящейся к x_{inv} , имеет место $d(\tilde{\varphi}_0(x_n), y_0) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (случай инверсии).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что множество S имеет нулевую емкость. Выберем шар $B(y_0, r_0)$ такой, что $\varphi(F) \subset B(y_0, r_0)$, и последовательность шаров $B(y_0, R_k)$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $R_k > r$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty$. Заметим, что $S \subset \bigcap_k \overline{\tilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{M}' \setminus B(y_0, R_k))}$.

Имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}(S; L_{n,F}^1(D)) &\leq \overline{\text{Cap}}(\tilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{M}' \setminus B(y_0, R_k)) \cap D_F; L_{n,F}^1(D)) \\ &\leq K^n \overline{\text{Cap}}((\mathbb{M}' \setminus B(y_0, R_k)) \cap D'_F; L_{n,\varphi(F)}^1(D')) \\ &\leq K^n \text{Cap}(\mathbb{M}' \setminus B(y_0, R_k); L_{n,\varphi(F)}^1(\mathbb{M}')). \end{aligned}$$

Из определения 3 получаем, что емкость $\text{Cap}(\mathbb{M}' \setminus B(y_0, R_k); L_{n,\varphi(F)}^1(\mathbb{M}'))$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, следовательно, $\overline{\text{Cap}}(S; L_{n,F}^1(D)) = 0$.

Покажем, что S не может состоять более чем из одной точки. Пусть, напротив, нашли две различные точки $x_1, x_2 \in S$, удовлетворяющие указанному свойству. Рассмотрим последовательности $\{x_n^1\}, \{x_n^2\} \subset U$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1 = x_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = x_2$. Выберем сферы $S(x_1, r_1), S(x_2, r_2) \subset U$, на которых отображение $\tilde{\varphi}_0$ непрерывно (см. предложение 56), так, что $\overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{B}(x_2, r_2) = \emptyset$. Поскольку $\tilde{\varphi}_0$ — непрерывное и инъективное отображение, образ $\tilde{\varphi}_0(S(x_1, r_1))$ разбивает D'_F на две компоненты связности (ограниченную и неограниченную), при этом $\tilde{\varphi}_0(B(x_1, r_1) \setminus S)$ принадлежит неограниченной компоненте, а $\tilde{\varphi}_0(U \setminus B(x_1, r_1))$ — ограниченной компоненте. С другой стороны, $B(x_2, r_2) \setminus S \subset U \setminus B(x_1, r_1)$ и, следовательно, $\tilde{\varphi}_0(B(x_2, r_2) \setminus S)$ принадлежит ограниченной компоненте $D'_F \setminus \tilde{\varphi}_0(S(x_1, r_1))$, что противоречит предположению $d(\tilde{\varphi}_0(x_n^2), x_0) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

В итоге получаем непрерывное инъективное отображение $\tilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \overline{D'_F}$.

Предложение 75. *Отображение $\tilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \tilde{\varphi}_0(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ гомеоморфно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что отображение

$$\tilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \tilde{\varphi}_0(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$$

открытое. Действительно, для любого шара $B(x, r) \subset D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\}$ имеем

$$\mu(\tilde{\varphi}_0, B(x, r), \varphi_0(x)) \neq 0.$$

Отсюда выводим, что $\tilde{\varphi}_0(x)$ — внутренняя точка образа.

Теперь можно доказать, что отображение $\tilde{\varphi}_0$ принадлежит классу Соболева $W_{n,\text{loc}}^1(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ (расширение леммы 69).

Лемма 76. Если даны римановы многообразия $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ одинаковой размерности $n \geq 2$, области $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ и измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ класса IL_n^1 , то $\tilde{\varphi}_0 \in W_{n,\text{loc}}^1(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма — прямое следствие леммы 69, в условии которой в качестве U следует взять $D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\}$. $\square$

Из вышеизложенного выводим

Предложение 77. Отображение $\tilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \mathbb{M}'$ квазиконформно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из последних утверждений вытекает, что гомеоморфизм $\tilde{\varphi}_0$ принадлежит классу $W_n^1(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ и п. в. в $D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\}$ выполняется поточечное неравенство $|D(x, \tilde{\varphi}_0)| \leq K|J(x, \varphi)|^{\frac{1}{n}}$, поскольку $|S| = 0$ (заметим, что $J(x, \varphi) = J(x, \tilde{\varphi}_0)$ п. в.). Следовательно, отображение $\tilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \mathbb{M}'$ квазиконформно. $\square$

Предложение 78. Отображение $\tilde{\varphi}_0 : D \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \mathbb{M}'$ квазиконформно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем другое замкнутое множество положительной меры $F_1 \subset T_{k_0}$ без изолированных точек, находящееся на положительном расстоянии от F . Повторяя вышеописанную процедуру, докажем квазиконформность отображения $\tilde{\varphi}_0$ на открытом множестве $D \setminus \{x_{\text{inv}}\}$. $\square$

4.7. Доказательство теоремы 2. Приведем доказательство основного результата данной работы.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Можно считать, что отображение $\varphi : D \rightarrow D'$ квазиконформное. По определению 4 квазиконформное отображение φ локально принадлежит классу Соболева ($\varphi \in W_{n,\text{loc}}^1$). Кроме того, отображение φ дифференцируемо и обладает $\mathcal{N}$ -свойством и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина [36].

Для произвольной функций $f \in L_n^1(D') \cap C^\infty(D')$ композиция $f \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях базисных векторных полей в силу того, что отображение f является таковым. Более того, $\nabla(f \circ \varphi) = D_h \varphi^T(x) \nabla f(\varphi(x))$ [17, с. 263], где $D\varphi(x) = \{X_i \varphi_j(x)\}$, $i, j = 1, \dots, n_1$, — дифференциал. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla(f \circ \varphi)|^n dx &= \int_D |D_h \varphi^T(x) \nabla f(\varphi(x))|^n dx \\ &\leq \int_D |D_h \varphi^T(x)|^n \cdot |\nabla f(\varphi(x))|^n dx = \int_D |\nabla f|^n(\varphi(x)) \cdot |D_h \varphi(x)|^n dx \\ &\leq K \int_D |\nabla f|^n(\varphi(x)) \cdot |J(x, \varphi)| dx = \int_{D'} |\nabla f|^n(y) dy. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались поточечным неравенством $|D_h \varphi(x)|^n \leq K|J(x, \varphi)|$ для п. в. $x \in D$ и формулой замены переменной (2).

В силу леммы 14 полученное неравенство выполняется для всех функций $f \in L_n^1(D')$, т. е.

$$\|\varphi^*(f) \mid L_n^1(D)\| \leq K^{\frac{1}{n}} \|f \mid L_n^1(D')\|.$$

Отображение φ^{-1} также квазиконформно. Тогда для $g \in L_n^1(D)$ имеем

$$\|\varphi^{-1*}(g) \mid L_n^1(D')\| \leq K_1^{\frac{1}{n}} \|g \mid L_n^1(D)\|, \quad (36)$$

где K_1 — коэффициент квазиконформности обратного отображения. Заметим, что для $f \in L_n^1(D') \cap C^\infty(D')$ верно $\varphi^{-1*}(f \circ \varphi) = f$. Следовательно, неравенство (36) принимает вид $K_1^{-\frac{1}{n}} \|f\|_{L_n^1(D')} \leq \|\varphi^*(f)\|_{L_n^1(D)}$. Таким образом,

$$K_1^{-\frac{1}{n}} \|f\|_{L_n^1(D')} \leq \|\varphi^*(f)\|_{L_n^1(D)} \leq K^{\frac{1}{n}} \|f\|_{L_n^1(D')}, \quad (37)$$

где постоянные K и K_1 зависят только от свойств отображения φ .

Покажем, что образ $\varphi^*(L_n^1(D') \cap C^\infty(D'))$ всюду плотен в $L_n^1(D)$. Пусть $g \in L_n^1(D)$. Найдется последовательность $g_n \in L_n^1(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $\|g - g_n\|_{L_n^1(D)} \rightarrow 0$. С другой стороны, в силу двусторонней оценки (37) получаем $g_n \circ \varphi^{-1} \in L_n^1(D')$. Значит, найдется последовательность $f_{nk} \in L_n^1(D') \cap C^\infty(D')$ такая, что $\|g_n \circ \varphi^{-1} - f_{nk}\|_{L_n^1(D')} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел l_n имеем $\varphi^* f_{nl_n} \in \varphi^*(L_n^1(D') \cap C^\infty(D'))$ и $\|g - \varphi^* f_{nl_n}\|_{L_n^1(D)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Существование квазиконформного отображения Φ доказано в лемме 76: $\Phi = \tilde{\varphi}_0 : D \setminus \{x_{\text{inv}}\} \rightarrow \mathbb{M}'$. На основании доказанного выше оператор композиции $\Phi^* : L_n^1(\Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\})) \rightarrow L_n^1(D \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ является изоморфизмом. Так как, очевидно, $L_n^1(D \setminus \{x_{\text{inv}}\}) = L_n^1(D)$, отсюда имеем изоморфизм $\varphi^{*-1} \circ \Phi^* : L_n^1(\Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\})) \rightarrow L_n^1(D')$ такой, что $\varphi^{*-1} \circ \Phi^*(f)(x) = f(x)$ для всех точек $x \in \Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\}) \cap D'$, где $f \in L_n^1(\Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\}))$ — произвольная функция.

Следовательно, пространство $L_n^1(\Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\}) \cup D')$ изоморфно через оператор ограничения как пространству $L_n^1(\Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\}))$, так и $L_n^1(D')$. Таким образом, $\Phi(D \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ и $D' = (1, n)$ -эквивалентные области.

Аналогично доказанному в [12, теорема 3.1; 13, предложение 6.10] можно получить следующие свойства:

- 1) $|\Phi(D) \Delta D'| = 0$;
- 2) для любого шара $B \subset D'$ множество $B \setminus \Phi(D) \Delta D'$ связное. $\square$

4.8. Следствие: устранимые множества для квазиконформных отображений. Напомним, что замкнутое множество $E \subset D$ называется *устрашимым* для квазиконформных отображений, если всякое квазиконформное отображение $\varphi : D \setminus E \rightarrow \mathbb{M}'$ продолжается до квазиконформного отображения области D .

Следствие 79. Пусть U и D $(1, n)$ -эквивалентны, $U \subset D$. Тогда множество $D \setminus U$ устранимо для квазиконформных отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{M}'$ — квазиконформное отображение. Для доказательства следствия требуется построить квазиконформное продолжение отображения φ_1 на область D .

По теореме 2 оператор композиции $\varphi_1^* : L_n^1(\varphi_1(U)) \rightarrow L_n^1(U)$ является изоморфизмом. Поскольку множества U и D $(1, n)$ -эквивалентны, оператор ограничения $r^* : L_n^1(D) \rightarrow L_n^1(U)$ также изоморфизм.

Рассмотрим измеримое отображение $\varphi : D \rightarrow \varphi_1(U)$ такое, что $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ для $x \in U$. Оператор композиции $\varphi^* : L_n^1(\varphi_1(U)) \cap C^\infty(\varphi_1(U)) \rightarrow L_n^1(D)$, определенный по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$, продолжается до изоморфизма пространств $L_n^1(\varphi_1(U))$ и $L_n^1(D)$, поскольку $\varphi^* f = r^{*-1} \circ \varphi_1^* f$ для $f \in L_n^1(\varphi_1(U)) \cap C^\infty(\varphi_1(U))$. В силу теоремы 2 найдется квазиконформное отображение $\Phi : D \rightarrow \mathbb{M}'$, совпадающее с φ п. в. При этом $\Phi(x) = \varphi(x)$, если $x \in U$. Таким образом, Φ — искомое продолжение. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
2. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.
3. Романов А. С. О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1985. С. 117–133.
4. Vodop'yanov S. K. Composition Operators on Sobolev Spaces // Complex analysis and dynamical systems II. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. P. 247–301. (Contemp. Math.; V. 382).
5. Водопьянов С. К. L_p -теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.
6. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.
7. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 131–135.
8. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 989–1029.
9. Водопьянов С. К. О допустимых заменах переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 6. С. 609–613.
10. Водопьянов С. К. Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 63–112.
11. Federer H. Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1969.
12. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Критерий устранимости множеств для пространств L_p^1 квазиконформных и квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 1. С. 48–68.
13. Chernikov V. M., Vodopyanov S. K. Sobolev spaces and hypoelliptic equations. I // Sib. Adv. Math. 1996. V. 6, N 3. P. 27–67.
14. Chernikov V. M., Vodopyanov S. K. Sobolev spaces and hypoelliptic equations. II // Sib. Adv. Math. 1996. V. 6, N 4. P. 64–96.
15. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
16. Vodopyanov S. K. $\mathcal{P}$ -differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. P. 603–670.
17. Vodop'yanov S. K. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemp. Math.; V. 424).
18. Hajlasz P. Change of variable formula under the minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
19. Isangulova D. V., Vodopyanov S. K. Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58–96.
20. Jerison D. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53. P. 503–523.
21. Lu G. The sharp Poincaré inequality for free vector fields: an endpoint result // Rev. Mat. Iberoamericana. 1994. V. 10, N 2. P. 453–466.
22. Hajlasz P., Koskela P. Sobolev met Poincaré. Ann Arbor: Amer Math. Soc., 2000. (Mem. of the AMS; N 688).
23. Franchi B., Lu G., Wheeden R. L. Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1992. V. 45, N 2. P. 577–604.
24. John F. Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.
25. Stein E. M. Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
26. Решетняк Ю. Г. О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5. С. 1109–1138.
27. Мазья В. Г., Хавин В. П. Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 6. С. 67–138.

28. Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford: Clarendon Press, 1993.
29. Choquet G. Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1959. V. 9. P. 83–89.
30. Bojarski B. Remarks on some geometric properties of Sobolev mappings // Analysis & Related Topics. Singapore: World Sci., 1991. P. 65–76.
31. Kinnunen J., Latvala V. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoamericana. 2002. V. 18. P. 685–700.
32. De Rham G. Variétés Différentiables. Paris: Hermann & Cie, 1955.
33. Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А. Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1016–1036.
34. Troyanov M., Vodopyanov S. K. Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Ann. Inst. Fourier. 2002. V. 52, N 6. P. 1753–1784.
35. Водопьянов С. К. Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
36. Водопьянов С. К. О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 857–877.

Поступила в редакцию 27 марта 2019

После доработки 27 марта 2019

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Водопьянов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru