X. Wei, A. Kh. Zhurтов, D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, Finite groups close to Frobenius groups, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1035–1040

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.504>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 12:58:25

УДК 512.44

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, БЛИЗКИЕ К ГРУППАМ ФРОБЕНИУСА

С. Б. Вэй, А. Х. Журтов,
Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Изучаются конечные неразрешимые обобщенные группы Фробениуса, т. е. группы G , содержащие собственную нетривиальную нормальную подгруппу F и такие, что каждый смежный класс Fx , являющийся элементом простого порядка p в фактор-группе G/F , состоит из p -элементов. Примерами таких групп служат группы Фробениуса, где в качестве F выступает ядро Фробениуса, а также группы Камины.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.504

Ключевые слова: группа Фробениуса, обобщенная группа Фробениуса, ядро, дополнение, группа Камины.

В работе изучаются конечные неразрешимые обобщенные группы Фробениуса, т. е. группы G , которые содержат собственную нетривиальную нормальную подгруппу F , называемую ядром G , такие, что каждый смежный класс Fx , являющийся элементом простого порядка p в фактор-группе G/F , состоит из p -элементов. Примерами таких групп служат группы Фробениуса, где в качестве F выступает ядро Фробениуса, а также группы Камины, введенные в научный оборот в [1] (см. по этому поводу обзор в [2]).

Степень простого числа называется *примарным числом*. Элемент группы называется *примарным*, если его порядок — примарное число. *Примарная группа* — это группа примарного порядка. Смежный класс Fx группы G по подгруппе F будем называть *примарным*, если все элементы из Fx являются p -элементами для одного и того же простого числа p .

Для простого числа p G -модуль V будем называть *p' -свободным* и действие G на V *p' -свободным*, если для любого нетривиального p' -элемента $x \in G$ (т. е. элемента x , порядок которого не делится на p) и любого ненулевого элемента $v \in V$ выполняется $vx \neq v$. Действие группы G на группе P будем называть *p' -свободным*, если любой p' -элемент из G централизует в P только единицу.

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. Пусть G — нетривиальная конечная группа, совпадающая со своим коммутантом, и F — ее собственная нетривиальная нормальная подгруппа.

Группа G является обобщенной группой Фробениуса с ядром F тогда и только тогда, когда F нильпотентна и для любого простого числа p группа G действует p' -свободно на каждом своем главном факторе внутри F .

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00507. Первый автор поддержан Национальным фондом естественных наук Китая (проект 11771409).

Если G — обобщенная группа Фробениуса, совпадающая со своим коммутантом, то ее ядро F нильпотентно и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) F — p -группа для некоторого простого p , которое делит $|G : F|$, и $G/O_p(G) \simeq SL_2(p^a)$, $p^a > 3$;
 - (2) F — 2-группа и $G/O_2(G)$ изоморфна $L_2(2^a)$, $a \geq 2$, $Sz(2^{2b+1})$ или $L_2(2^{2a+1}) \times Sz(2^{2b+1})$, $(2a+1, 2b+1) = 1$, $a, b \geq 1$;
 - (3) F — 3-группа и $G/O_3(G) \simeq SL_2(r)$, $r \in \mathfrak{R} \cup \{7, 17\}$;
 - (4) F — $\{3, r\}$ -группа и $G/F \simeq SL_2(r)$, $r \in \mathfrak{R} \cup \{7, 17\}$;
 - (5) $G/F \simeq SL_2(5)$.
- Здесь $\mathfrak{R}$ — это множество всех простых чисел r , для которых
- (а) $r = 2^a \cdot 3^b + 1$ для $a \geq 2$, $b \geq 0$;
 - (б) $(r+1)/2$ — простое число.

ПРИМЕЧАНИЕ. Некоторые дополнительные сведения о группе G можно почерпнуть из формулировки леммы 3.2, являющейся частью доказательства теоремы 1.

§ 1. Группы Фробениуса, пары Камины и p' -свободные модули

Группой Фробениуса называется полупрямое произведение $G = FH$ двух нетривиальных групп $F \trianglelefteq G$ и H , для которых H действует при сопряжении в G свободно на F , т. е. для любых неединичных элементов $f \in F$ и $h \in H$

$$f^h = h^{-1}fh \neq f.$$

При этом F называется ядром, а H — дополнением Фробениуса в G . Известно, что для конечной группы Фробениуса ее ядро нильпотентно, а любой неразрешимый композиционный фактор дополнения изоморфен $L_2(5)$ (см. [3, V.8.7; 4, XII.8.24]).

Парой Камины (G, F) называется группа G вместе со своей собственной нетривиальной нормальной подгруппой F , для которой все элементы из любого смежного класса Fx , где $x \in G \setminus F$, сопряжены между собой в G . Такие пары впервые рассматривал Камина [1].

Лемма 1.1. (1) Если G — конечная группа Фробениуса с ядром F , то (G, F) — пара Камины.

(2) Если (G, F) — пара Камины с периодической группой G , то G — обобщенная группа Фробениуса с ядром F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — конечная группа Фробениуса с ядром F и дополнением H и $1 \neq x \in H$. Если $f \in F$, то отображение $\varphi : F \rightarrow F$, определяемое формулой $\varphi(f) = x^{-1}fx f^{-1}$, инъективно (для $f, f_1 \in F$ равенство $x^{-1}fx f^{-1} = x^{-1}f_1x f_1^{-1}$ влечет $fx f^{-1} = f_1x f_1^{-1}$, т. е. $f_1^{-1}fx = x f_1^{-1}f$), откуда $(f_1^{-1}f)^x = f_1^{-1}f$ и по определению группы Фробениуса $f_1^{-1}f = 1$), поэтому $|\varphi(F)| = |F|$ и φ взаимно однозначно. В частности, для любого $y \in F$ найдется f , для которого $x^{-1}fx f^{-1} = y$ и элемент $xy = fx f^{-1}$ сопряжен с x .

Пусть (G, F) — пара Камины, $Fx \in G/F$ — элемент простого порядка p в G/F . Предположим, что fx не является p -элементом для некоторого $f \in F$. Так как fx сопряжен с x , то x не является p -элементом. С другой стороны, $x = yz$, где y — p' -элемент, z — p -элемент и оба элемента y, z являются степенями x .

При этом $y \in F$ и $z = y^{-1}x \in Fx$. По условию z сопряжен с x , откуда x — p -элемент; противоречие.

Конечные группы, совпадающие со своим коммутантом и обладающие неприводимым p' -свободным модулем, описаны в [5, теорема 4.1].

Лемма 1.2. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех простых чисел r , удовлетворяющих следующим условиям:

- (а) $r = 2^a 3^b + 1$ для $a \geq 2, b \geq 0$;
- (б) $(r + 1)/2$ — простое число.

Если p — простое число, G — нетривиальная конечная группа, совпадающая со своим коммутантом, p делит $|G|$, а G обладает неприводимым p' -свободным модулем V , то $O_p(G)$ действует тривиально на V и верно одно из следующих утверждений:

- (1) $G/O_p(G) \simeq SL_2(p^s)$ для некоторого $s \geq 1$ и $p^s > 3$;
- (2) $G/O_2(G) \simeq Sz(2^{2s+1})$ для некоторого $s \geq 1$ и $p = 2$;
- (3) $G/O_2(G) \simeq Sz(2^{2s+1}) \times SL_2(2^{2t+1})$ для некоторых $s, t \geq 1, (2s+1, 2t+1) = 1$ и $p = 2$;
- (4) $G/O_3(G) \simeq SL_2(r)$ для некоторого $r \in \mathfrak{R} \cup \{7, 17\}$ и $p = 3$.

Обратно, если (G, p) удовлетворяет одному из условий (1)–(4), то существует неприводимый p' -свободный G -модуль над полем характеристики p .

§ 2. Предварительные результаты

Лемма 2.1. Пусть G — обобщенная группа Фробениуса с ядром F .

- (1) Если $F_0 \trianglelefteq G$ и $F \neq F_0 \leq F$, то G/F_0 — обобщенная группа Фробениуса с ядром F/F_0 .
- (2) Если $H \leq G$, $FH = G$ и $F \cap H \neq 1$, то H — обобщенная группа Фробениуса с ядром $F \cap H$.
- (3) Если x — элемент простого порядка p из $G \setminus F$, то $C_F(x)$ — p -группа.
- (4) Если $(|G/F|, |F|) = 1$, то G — группа Фробениуса с ядром Фробениуса F .

Доказательство легко следует непосредственно из определения обобщенной группы Фробениуса.

Лемма 2.2. Пусть F — собственная нетривиальная нормальная подгруппа конечной группы G . Тогда в G существует подгруппа H , для которой $G = FH$ и $F \cap H$ — нетривиальная нильпотентная подгруппа.

Доказательство проведем индукцией по $|G|$. Если F нильпотентна, то $H = G$ удовлетворяет заключению леммы. Пусть F ненильпотентна и P — инвариантная силовская подгруппа F . Тогда $G = FN_G(P)$ и $N_G(P) \neq G$. Положим $G_0 = N_G(P)$ и $F_0 = G_0 \cap F$. По предположению индукции в G_0 найдется подгруппа H_0 , для которой $G_0 = F_0H_0$ и $F_0 \cap H_0$ — нетривиальная нильпотентная группа. Теперь $G = FG_0 = FF_0H_0 = F(G_0 \cap F)H_0 = FH_0$ и

$$\begin{aligned} H_0/(F \cap H_0) &= FH_0/F = G/F = FG_0/F = G_0/(F \cap G_0) = G_0/F_0 \\ &= F_0H_0/F_0 = H_0/(F_0 \cap H_0), \end{aligned}$$

откуда $|F \cap H_0| = |F_0 \cap H_0|$. Так как $F_0 \leq F$, то $F_0 \cap H_0 \leq F \cap H_0$ и окончательно $F_0 \cap H_0 = F \cap H_0$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть G — конечная группа, P — ее силовская p -подгруппа для нечетного простого числа p , $\mathcal{A}(P)$ — множество абелевых подгрупп из P , имеющих наибольший порядок, $J(P) = \langle \mathcal{A}(P) \rangle$ и Z — центр $J(P)$. Если $N_G(Z)$ обладает нормальным p -дополнением, то G обладает нормальным p -дополнением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это п. а) теоремы X.9.10 из [4].

§ 3. Доказательство теоремы

В этом параграфе G — конечная обобщенная группа Фробениуса, совпадающая со своим коммутантом, F — ее ядро, $\bar{G} = G/F$.

Лемма 3.1. Если F — p -группа для некоторого простого p , то $C_G(F)$ — p -группа и G действует p' -свободно при сопряжении на каждом главном факторе G внутри F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — p' -элемент из G . Покажем, что $C_F(x) = 1$. Для этого достаточно считать, что x — элемент простого порядка $q \neq p$. Пусть $y \in C_F(x)$. Тогда $yx \in Fx$ и Fx — элемент порядка q в G/F . По условию yx является q -элементом, поэтому $y = 1$.

Отсюда, в частности, следует, что $C_G(F)$ — p -группа. Кроме того, $C_V(x) = 1$ для любого главного фактора V группы G внутри F и любого неединичного элемента x из G . Таким образом, V является p' -свободным модулем группы G , и лемма доказана.

Лемма 3.2. Если F нильпотентна, то G действует p' -свободно на любом главном факторе G внутри F для любого простого числа p , делящего $|G|$, и верно одно из следующих утверждений:

- (1) $\bar{G} = G/F \simeq SL_2(5)$, $O(G)$ коммутативна и G содержит подгруппу H , являющуюся расширением 2-группы посредством $SL_2(5)$;
- (2) F является абелевой p -группой для некоторого нечетного простого числа p и $G/O_p(G) \simeq SL_2(p^a)$, где $p^a > 3$;
- (3) F является абелевой 3-группой и $G/O_3(G) \simeq SL_2(r)$, где $r \in \mathfrak{A} \cup \{7, 17\}$;
- (4) G — полупрямое произведение F на $SL_2(r)$, где $r \in \mathfrak{A} \cup \{7, 17\}$ и F является абелевой $\{3, r\}$ -группой;
- (5) F — 2-группа и $G/O_2(G)$ изоморфна $L_2(2^{2a+1}) \times Sz(2^{2b+1})$, $Sz(2^{2b+1})$ или $L_2(2^c)$, где $a, b \geq 1$, $(2a + 1, 2b + 1) = 1$, $c \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если F — примарная группа, то по лемме 3.1 G действует p' -свободно на каждом главном факторе G внутри F для любого простого числа p , делящего $|G|$. По лемме 2.1(1) то же самое верно и для произвольного нильпотентного ядра F . Таким образом, строение G/F определяется леммой 1.2, если порядки $|G|$ и $|F|$ не взаимно просты. Если $(|G/F|, |F|) = 1$, то G — группа Фробениуса с ядром Фробениуса F и выполнен п. (1) заключения леммы.

В дальнейшем считаем, что $|G/F|$ и $|F|$ не взаимно просты.

Если $d = (|F|, |G/F|)$ делится не менее чем на два различных простых числа, то по лемме 2.1 и уже доказанной части заключения леммы $\bar{G} \simeq SL_2(5)$. При этом $(G/O_2(F))/(F/O_2(F))$ обладает единственной инволюцией t , которая инвертирует $F/O_2(F)$, и $\bar{H} = C_{G/O_2(F)}(t) \simeq SL_2(5)$. Теперь полный прообраз H подгруппы $\bar{H}$ в G удовлетворяет условиям п. (1).

Рассмотрим до конца случай $\overline{G} \simeq SL_2(5)$. Если $d = 2$, то п. (1), очевидно, выполнен. Если d равно 3 или 5, то $G = O(G)C_G(t)$, где t — инволюция в G , t инвертирует $O(G)$ и п. (1) снова выполнен.

В дальнейшем будем предполагать, что $\overline{G}$ не изоморфна $SL_2(5)$. Если при этом F четного порядка, то F — 2-группа и выполнен п. (5).

Аналогично рассматриваются остальные случаи, а именно, когда F — группа нечетного порядка. Эти рассмотрения приводят к справедливости п. (3) или п. (4).

Лемма 3.3. F нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $|F|$. Предположим противное. Пусть M — подгруппа из G , для которой $F_0 = M \cap F$ — нетривиальная нильпотентная подгруппа и $M/F_0 \simeq G/F$, существующая по лемме 2.2. По лемме 2.1 M — обобщенная группа Фробениуса с ядром F_0 , поэтому пара (M, F_0) удовлетворяет заключению леммы 3.2 при замене пары (G, F) на (M, F_0) .

Если F обладает нормальным p -дополнением для любого нечетного простого числа p , делящего $|F|$, то пересечение T всех этих дополнений является 2-группой и F/T нильпотентна. По предположению $T \neq F$. Пусть P — силовская p -подгруппа в F для нечетного простого числа p , делящего $|F|$, и q — нечетное простое число, делящее $|G/F|$ и отличное от p . По леммам 2.2 и 3.2 в $G \setminus F$ содержится элемент x порядка q . При этом $C_T(x) = 1$ и $C_{(PT/T)}(x) = 1$, откуда $TP\langle x \rangle$ — группа Фробениуса с ядром TP , следовательно, P централизует T . Отсюда вытекает, что F нильпотентна; противоречие.

Стало быть, существует нечетное простое число p , для которого F не обладает нормальным p -дополнением. По лемме 2.3 $N_F(Z)$ не обладает нормальным p -дополнением, где Z — центр $J(P)$ для силовской p -подгруппы P из F . Так как $G = FN_G(Z)$, по индукционному предположению $F = N_F(Z)$ и F/Z — нильпотентная группа. Таким образом, $P \leq F$ и F/P — нильпотентная группа. Если силовская 2-подгруппа T из F нетривиальна и централизует P , то $T \leq F$, F/T нильпотентна и по теореме Ремака F вложена в $F/T \times F/P$, т. е. является нильпотентной группой.

В частности, $(G/P, F/P)$ удовлетворяет заключению леммы 3.2 с G/P вместо G и F/P вместо F .

Рассмотрим пять случаев, которые по лемме 3.2 возможны для G/P . В случае (1) полный прообраз H в G содержит элемент x порядка q , отличного от 2 и p , централизатор которого в F равен 1, поэтому PT нильпотентна; противоречие. Случаи (2)–(4) в данной ситуации очевидно невозможны. В случае (5) $G \setminus F$ содержит элемент x простого нечетного порядка, отличного от p , и PT , как и выше, нильпотентна; противоречие.

Итак, порядок F нечетен, следовательно, $G \setminus F$ содержит инволюцию t . Поскольку $C_F(t) = 1$, то F абелева, в частности, нильпотентна. Лемма доказана.

Теперь заключение теоремы вытекает из лемм 3.2 и 3.3.

Авторы благодарны А. С. Кондратьеву, обратившему их внимание на пары Камини, а также рецензенту, замечания которого способствовали улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Camina A. R. Some conditions which almost characterize Frobenius groups // Isr. J. Math. 1978. V. 31, N 2. P. 153–160.

2. Lewis M. L. Camina groups, Camina pairs, and generalization // Group theory and computation (N. S. N. Sastry, M. K. Yadav, eds.) Singapore: Springer Singapore, 2018. P. 141–174.
3. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1978.
4. Huppert B., Blackburn N. Finite groups III. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1982.
5. Fleischmann P., Lempken W., Tiep P. H. Finite p' -semiregular groups // J. Algebra. 1997. V. 188, N 2. P. 547–579.

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г.

После доработки 13 июня 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Вэй Сяньбяо

Университет Анхой Джианчжу,
факультет математики и физики,
Хэфей 230022, КНР
wxb1289@126.com

Журтов Арчил Хазешович

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик 360004
zhurtov.a@mail.ru

Лыткина Дарья Викторовна

Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru