G. V. Demidenko, I. I. Matveeva, M. A. Skvortsova, Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1063–1079

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.506>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 09:37:30

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО
ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева,
М. А. Скворцова

Аннотация. Рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах. Установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения. Указаны области притяжения нулевого решения. Получены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.506

Ключевые слова: дифференциальные уравнения нейтрального типа, периодические коэффициенты, экспоненциальная устойчивость, область притяжения, функционалы Ляпунова — Красовского.

Посвящается 90-летию
Юрия Григорьевича Решетняка

1. Введение

В работе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

где D — вещественная постоянная матрица размера $n \times n$, $A(t)$, $B(t)$ — вещественнозначные матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T -периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания и $F(t, u, v)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Предполагаем, что на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ вектор-функция $F(t, u, v)$ удовлетворяет условию Липшица по u и выполнена оценка

$$\|F(t, u, v)\| \leq q_1 \|u\|^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}, \quad t \geq 0, \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

где $q_1, q_2, \omega_1, \omega_2 > 0$ — константы. Наша цель — исследование устойчивости нулевого решения, получение оценок области притяжения и оценок решений

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

системы (1.1), характеризующих экспоненциальную скорость стабилизации решений на бесконечности.

В настоящее время имеется большое число работ по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, библиографию в [1–3], а также обзор [4]). При этом большая часть работ посвящена исследованию устойчивости решений автономных уравнений.

В данной работе мы продолжаем наши исследования устойчивости решений уравнений нейтрального типа. Первый наш результат в этом направлении был получен в [5] для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) = Ay(t) + By(t - \tau), \quad t > 0. \quad (1.3)$$

При выполнении условия, что спектральная норма $\|D\|$ меньше 1, была доказана следующая

Теорема 1. *Предположим, что существуют эрмитовы матрицы $H > 0$ и $K(s) \in C^1[0, \tau]$, при этом*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau],$$

и составная матрица

$$C = - \begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix}$$

положительно определена. Тогда нулевое решение системы (1.3) экспоненциально устойчиво.

Здесь и далее $S > 0$ ($S < 0$) означает, что S — эрмитова положительно (отрицательно) определенная матрица. Всюду использована спектральная норма матриц.

Затем в [6–9] были рассмотрены системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) = Ay(t) + By(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > 0, \quad (1.4)$$

с непрерывной вектор-функцией $F(t, u, v)$, удовлетворяющей локально условию Липшица по u и неравенству (1.2). При выполнении условия принадлежности спектра матрицы D единичному кругу доказаны теоремы об экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.4), в которых были получены оценки области притяжения нулевого решения и оценки решений, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Отметим, что во всех этих работах доказательство экспоненциальной устойчивости проводилось с использованием функционала Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$\langle H(y(t) + Dy(t - \tau)), (y(t) + Dy(t - \tau)) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds,$$

где матрицы H , $K(s)$ удовлетворяли условиям теоремы 1.

В отличие от автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом задача об устойчивости решений неавтономных уравнений является

менее изученной. Основные исследования проводились для линейных уравнений с периодическими коэффициентами с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau), \quad t > 0, \quad (1.5)$$

и для уравнений нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau), \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Основы теории устойчивости решений уравнений (1.5), (1.6) заложены в работах А. М. Зверкина, Стокса, Халаная, Хана, Хейла, С. Н. Шиманова и др. (см. обзор в [4]). Основным подходом в этих исследованиях являлось развитие теории Флоке. Помимо этого подхода в теории устойчивости развиваются также методы производящих функций [10], монотонных операторов [11], функционалов Ляпунова — Красовского (см. обзор в [4], а также [12]).

Отметим, что при решении конкретных задач зачастую бывает трудно проверять условия асимптотической устойчивости решений систем (1.5) и (1.6), а также определять скорость стабилизации решений на бесконечности. Для решения таких задач авторы [5, 13, 14] предложили использовать модифицированный функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$\langle H(t)(y(t) + Dy(t - \tau)), (y(t) + Dy(t - \tau)) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad (1.7)$$

где $H(t) = H^*(t) > 0$, $K(s) = K^*(s) > 0$. В [15] с использованием этого функционала удалось получить наиболее полные результаты об экспоненциальной устойчивости решений систем линейных уравнений нейтрального типа (1.6). Сформулируем один из результатов этой работы, обобщающий теорему 1 в случае систем с постоянными коэффициентами (1.3).

Теорема 2. *Предположим, что спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ и существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1[0, T], \quad K(s) = K^*(s) \in C^1[0, \tau],$$

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau],$$

такие, что матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{12}^*(t) & C_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где

$$C_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0),$$

$$C_{12}(t) = -\frac{d}{dt}H(t)D - H(t)B(t) - A^*(t)H(t)D,$$

$$C_{22}(t) = -D^*\frac{d}{dt}H(t)D - D^*H(t)B(t) - B^*(t)H(t)D + K(\tau),$$

положительно определена при $t \in [0, T]$. Тогда нулевое решение линейной системы (1.6) экспоненциально устойчиво.

В [15] получены также оценки решений системы (1.6), являющиеся аналогами неравенства Крейна [16] для решений систем линейных обыкновенных

дифференциальных уравнений. В настоящей работе будем развивать подход из [15] при изучении устойчивости решений системы нейтрального типа (1.1), в частности, будут указаны достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получены оценки области его притяжения и оценки решений системы, характеризующие экспоненциальную скорость стабилизации решений при $t \rightarrow \infty$. По существу, этот результат можно рассматривать как теорему об устойчивости по первому приближению в неавтономном случае.

Отметим, что можно определить аналогичные функционалы типа Ляпунова — Красовского для изучения устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями.

2. Основные результаты

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) &= A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) &= \varphi(0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\varphi(t) \in C^1[-\tau, 0]$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Как и в [15], решение задачи будем рассматривать в классе непрерывных кусочно гладких вектор-функций при $t \geq 0$, при этом производные могут иметь разрывы первого рода только в точках $k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Далее будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2. Рассмотрим матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные в этой теореме. Отметим, что из положительной определенности матрицы $C(t)$ вытекает, что $C_{11}(t) > 0$ на $[0, T]$. Поскольку $H(0) = H(T) > 0$, из [17] следует, что $H(t) > 0$ на $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T -периодическим образом на всю полуось $t \geq 0$ и сохраним обозначение. Используя эту матрицу и матрицу $K(s)$, рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (1.7). Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1), определенное при $t \in [0, t')$. Вводя обозначение

$$y_t : \theta \rightarrow y(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

функционал (1.7) можно записать в виде

$$V(y_t) = \langle H(t)(y_t(0) + Dy_t(-\tau)), (y_t(0) + Dy_t(-\tau)) \rangle + \int_{-\tau}^0 \langle K(-\theta)y_t(\theta), y_t(\theta) \rangle d\theta. \quad (2.2)$$

Введем некоторые обозначения. Рассмотрим матрицу

$$S(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^* & I \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{12}^*(t) & S_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где матрица $C(t)$ определена в (1.8). Из определения $C(t)$ вытекает, что

$$S_{11}(t) \equiv C_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0),$$

$$S_{12}(t) = H(t)A(t)D - H(t)B(t) + K(0)D, \quad S_{22} = K(\tau) - D^*K(0)D.$$

В силу положительной определенности $C(t)$ матрица $S(t)$ также положительно определена. Отсюда, очевидно, имеем $S_{22} > 0$. Тогда матрицу $S(t)$ можно представить в виде

$$S(t) = \begin{pmatrix} I & S_{12}(t)S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}(t) - S_{12}(t)S_{22}^{-1}S_{12}^*(t) & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ S_{22}^{-1}S_{12}^*(t) & I \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Из наших рассуждений вытекает, что условие положительной определенности матрицы (1.8) эквивалентно положительной определенности эрмитовых матриц

$$P(t) = S_{11}(t) - S_{12}(t)S_{22}^{-1}S_{12}^*(t), \quad S_{22}.$$

Обозначим через $h_{\min}(t)$, $p_{\min}(t)$, $s_{\min}$ минимальные собственные значения матриц $H(t)$, $P(t)$, S_{22} соответственно. Поскольку $H(t) > 0$, $P(t) > 0$, в силу T -периодичности этих матриц $h_{\min}(t) \geq h_{\min} > 0$, $p_{\min}(t) \geq p_{\min} > 0$. Имеем также $s_{\min} > 0$.

Справедлива

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ для решения задачи (2.1) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(y_t) &\leq 2\|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2}q_1(1+\varepsilon_1)^{\omega_1}V^{1+\omega_1/2}(y_t) \\ &\quad + (2\|H(t)\|(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\|y(t-\tau)\|) - p_{\min}(t))\|y(t) + Dy(t-\tau)\|^2 \\ &\quad + (2\|H(t)\|\varepsilon_2\delta(\|y(t-\tau)\|) - s_{\min})\|z(t)\|^2 - \kappa \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad t \in [0, t'], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$s_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \|S_{22}^{-1}S_{12}^*(t)\|,$$

$$\delta(s) = q_1(1 + (\varepsilon_1)^{-1})^{\omega_1}\|D\|^{1+\omega_1}s^{\omega_1} + q_2s^{\omega_2}, \quad s \geq 0, \quad (2.6)$$

$$z(t) = S_{22}^{-1}S_{12}^*(t)(y(t) + Dy(t-\tau)) + y(t-\tau) \quad (2.7)$$

и $\kappa > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + \kappa K(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau]. \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование величины $\kappa > 0$, удовлетворяющей (2.8), вытекает из условий $K(s) > 0$, $\frac{d}{ds}K(s) < 0$, $s \in [0, \tau]$.

Введем обозначения:

$$Q = \max_{t \in [0, T]} (\|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2}q_1(1+\varepsilon_1)^{\omega_1}), \quad (2.9)$$

$$p = \min_{t \in [0, T]} \frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, \quad h = \min_{t \in [0, T]} \frac{1}{\|H(t)\|}.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\varepsilon_2 = \frac{s_{\min}}{2p_{\min}} \left(s_{\max} + \sqrt{s_{\max}^2 + \frac{p_{\min}}{s_{\min}}} \right); \quad (2.10)$$

$\rho > 0$ такое, что

$$\delta(\rho) < \frac{s_{\min}h}{2\varepsilon_2}. \quad (2.11)$$

Обозначим

$$\gamma(t) = \min \left\{ \left(\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - 2(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\rho) \right), \kappa \right\}. \quad (2.12)$$

$$r^{-\omega_1/2} = Q\omega_1 \left(\int_0^T \exp \left(-\frac{\omega_1}{2} \int_0^\eta \gamma(\xi) d\xi \right) d\eta \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{\omega_1}{2} \int_0^T \gamma(\xi) d\xi \right) \right)^{-1}, \quad (2.13)$$

$$\beta(t) = \frac{\gamma(t)}{2}, \quad \beta^+ = \max_{t \in [0, T]} \beta(t), \quad \beta^- = \min_{t \in [0, T]} \beta(t), \quad (2.14)$$

$$\Phi_1 = \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\|, \quad \Phi_2 = \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(\varphi)}}{(1 - (r^{-1} V(\varphi))^{\omega_1/2})^{1/\omega_1}}. \quad (2.15)$$

Поскольку $\varepsilon_2 > 0$ определяется в (2.10) и $\rho > 0$ определяется условием (2.11), нетрудно показать, что $\gamma(t) \geq \gamma_{\min} > 0$. Поэтому $\beta^- > 0$.

Перейдем к формулировке утверждений.

Напомним, что спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, поэтому $\|D^j\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Пусть l — минимальное натуральное число такое, что $\|D^l\| < 1$. По аналогии с [5, 15] выделяем три случая. А именно, в зависимости от величины $\|D^l\|$ ниже в теоремах 4–6 устанавливаем оценки решений в случаях

$$\|D^l\| < e^{-l\beta^+\tau}, \quad e^{-l\beta^+\tau} \leq \|D^l\| \leq e^{-l\beta^-\tau}, \quad e^{-l\beta^-\tau} < \|D^l\| < 1,$$

где β^+ и β^- определены в (2.14).

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и

$$\|D^l\| < e^{-l\beta^+\tau}. \quad (2.16)$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(t)$ задачи (2.1) принадлежит множеству $\mathcal{E}_1$, где

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \varphi(s) \in C^1[-\tau, 0] : \Phi_1 < \rho, \quad V(\varphi) < r, \right. \\ \left. \Phi_2(1 - \|D^l\|e^{l\beta^+\tau})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^+\tau} + \max\{\|D\|, \dots, \|D^l\|\}\Phi_1 < \rho \right\}.$$

Тогда решение задачи (2.1) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и для него имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \left(\Phi_2(1 - \|D^l\|e^{l\beta^+\tau})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{j\beta^+\tau} \right. \\ \left. + \max\{\|D\|e^{\beta^+\tau}, \dots, \|D^l\|e^{l\beta^+\tau}\}\Phi_1 \right) \exp \left(-\int_0^t \beta(\xi) d\xi \right), \quad t > 0. \quad (2.17)$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2 и

$$e^{-l\beta^+\tau} \leq \|D^l\| \leq e^{-l\beta^-\tau}.$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(t)$ задачи (2.1) принадлежит множеству $\mathcal{E}_2$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = & \left\{ \varphi(s) \in C^1[-\tau, 0] : \Phi_1 < \rho, V(\varphi) < r, \right. \\ & \left. \Phi_2 B_l \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^+\tau} + \max\{\|D\|, \dots, \|D^l\|\} \Phi_1 < \rho \right\}, \\ B_l = & \max_{t \geq 0} \left(1 + \frac{t}{l\tau} \right) \exp \left(- \int_0^t \hat{\beta}(\xi) d\xi \right), \\ \hat{\beta}(t) = & \min \left\{ \beta(t), -\frac{1}{l\tau} \ln \|D^l\| \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда решение задачи (2.1) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и для него имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq & \left(\Phi_2 \left(1 + \frac{t}{l\tau} \right) \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^+\tau} \right. \\ & \left. + \max\{1, \|D\| e^{\beta^+\tau}, \dots, \|D^{l-1}\| e^{(l-1)\beta^+\tau}\} \Phi_1 \right) \exp \left(- \int_0^t \hat{\beta}(\xi) d\xi \right), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2 и

$$e^{-l\beta^-\tau} < \|D^l\| < 1. \quad (2.20)$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(t)$ задачи (2.1) принадлежит множеству $\mathcal{E}_3$, где

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \varphi(s) \in C^1[-\tau, 0] : \Phi_1 < \rho, V(\varphi) < r, \right. \\ \left. \Phi_2 (1 - (\|D^l\| e^{l\beta^-\tau})^{-1})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau} + \max\{\|D\|, \dots, \|D^l\|\} \Phi_1 < \rho \right\}.$$

Тогда решение задачи (2.1) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и для него имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq & \left(\Phi_2 (1 - (\|D^l\| e^{l\beta^-\tau})^{-1})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau} \right. \\ & \left. + \|D^l\|^{-1} \|D\| \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\} \Phi_1 \right) \exp \left(\frac{t}{l\tau} \ln \|D^l\| \right), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.

3. Доказательство теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Будем следовать схеме из [15]. Дифференцируя (2.2) и используя матрицу $C(t)$ из (1.8), при $t \in [0, t']$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(y_t) \equiv & - \left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ & + 2 \langle H(t) F(t, y(t), y(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \rangle \\ & + \int_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{ds} K(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим первое слагаемое $I_1(t)$ из правой части. Очевидно, его можно записать в виде

$$I_1(t) = - \left\langle S(t) \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где матрица $S(t)$ определена в (2.3). Поскольку ее можно представить в виде (2.4), для $I_1(t)$ получаем оценку

$$I_1(t) \leq -p_{\min}(t) \|y(t) + Dy(t-\tau)\|^2 - s_{\min} \|z(t)\|^2, \quad (3.2)$$

где вектор-функция $z(t)$ определена в (2.7).

Рассмотрим второе слагаемое $I_2(t)$ из правой части тождества (3.1). Используя неравенство

$$(a+b)^{1+\omega} \leq (1+\varepsilon)^\omega a^{1+\omega} + (1+\varepsilon^{-1})^\omega b^{1+\omega}, \quad a, b \geq 0, \quad \omega, \varepsilon > 0,$$

и повторяя рассуждения из [9] при выводе оценки (2.12), нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} I_2(t) \leq & 2 \|H(t)\| q_1 (1+\varepsilon_1)^{\omega_1} \|y(t) + Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1} \\ & + 2 \|H(t)\| [q_1 (1+(\varepsilon_1)^{-1})^{\omega_1} \|D\|^{1+\omega_1} \|y(t-\tau)\|^{\omega_1} + q_2 \|y(t-\tau)\|^{\omega_2}] \\ & \times (s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1}) \|y(t) + Dy(t-\tau)\|^2 \\ & + 2 \|H(t)\| [q_1 (1+(\varepsilon_1)^{-1})^{\omega_1} \|D\|^{1+\omega_1} \|y(t-\tau)\|^{\omega_1} + q_2 \|y(t-\tau)\|^{\omega_2}] \varepsilon_2 \|z(t)\|^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Применяя очевидную оценку

$$\|y(t) + Dy(t-\tau)\|^2 \leq \|H^{-1}(t)\| \langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \rangle$$

и определение $V(y_t)$, из неравенства (3.3) получаем

$$\begin{aligned} I_2(t) \leq & 2 \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2} q_1 (1+\varepsilon_1)^{\omega_1} V^{1+\omega_1/2}(y_t) \\ & + 2 \|H(t)\| (s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1}) \delta(\|y(t-\tau)\|) \|y(t) + Dy(t-\tau)\|^2 \\ & + 2 \|H(t)\| \varepsilon_2 \delta(\|y(t-\tau)\|) \|z(t)\|^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\delta(s)$ определено в (2.6).

Следовательно, учитывая (2.8), из (3.1), (3.2), (3.4) имеем неравенство (2.5). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Вначале покажем, что решение начальной задачи (2.1) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \left(\sum_{j=0}^k \|D^j\| \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^{t-j\tau} \gamma(\xi) d\xi \right) \right) + \|D^{k+1}\| \Phi_1, \quad (3.5)$$

где Φ_1, Φ_2 определены в (2.15).

Пусть $t \in [0, \tau]$. Поскольку $\Phi_1 < \rho$, то

$$\begin{aligned} p_{\min}(t) &> 2\|H(t)\|(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\|\varphi(t - \tau)\|), \\ s_{\min} &> 2\|H(t)\|\varepsilon_2\delta(\|\varphi(t - \tau)\|). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая определение функционала $V(y_t)$, обозначения (2.9) и (2.12), из неравенства (2.5) имеем

$$\frac{d}{dt}V(y_t) + \gamma(t)V(y_t) \leq 2QV^{1+\omega_1/2}(y_t). \quad (3.6)$$

Поскольку $V(\varphi) < r$, где $r > 0$ определено в (2.13), в силу неравенства Гронуолла [18] получим оценку

$$V(y_t) \leq \frac{V(\varphi)}{(1 - (r^{-1}V(\varphi))^{\omega_1/2})^{2/\omega_1}} \exp \left(-\int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right),$$

откуда

$$\|y(t) + Dy(t - \tau)\| \leq \Phi_2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right). \quad (3.7)$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) + \|D\|\Phi_1. \quad (3.8)$$

Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.1) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, т. е. $t' > \tau$, и при $k = 0$ неравенство (3.5) доказано.

Отметим, что для справедливости неравенства (3.8) при $t \in [0, \tau]$ было достаточно, чтобы $\Phi_1 < \rho$ и $V(\varphi) < r$, и оно выполняется независимо от величины $\|D^l\|$.

Из (3.5) вытекает, что если начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_1$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, \tau]$. Тогда при $t \in [\tau, 2\tau]$

$$p_{\min}(t) > 2\|H(t)\|(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\|y(t - \tau)\|), \quad (3.9)$$

$$s_{\min} > 2\|H(t)\|\varepsilon_2\delta(\|y(t - \tau)\|). \quad (3.10)$$

Отсюда вытекает оценка (3.6) при $t \in [\tau, t_2]$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Следовательно, как и выше, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(y_t)$, получим неравенство (3.7). Тогда

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi_2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) + \|D(y(t - \tau))\| \\ &\leq \Phi_2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) + \|D(y(t - \tau) + Dy(t - 2\tau))\| + \|D^2y(t - 2\tau)\|, \end{aligned}$$

и, учитывая неравенство (3.7), будем иметь

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \left(\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) + \|D\| \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^{t-\tau} \gamma(\xi) d\xi \right) \right) + \|D^2\| \Phi_1. \quad (3.11)$$

Из полученной оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.1) определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$, и при $k = 1$ неравенство (3.5) также доказано. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 2\tau]$.

Повторяя аналогичные рассуждения, получим, что решение задачи (2.1) определено при всех $t > 0$ и на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет оценке (3.5).

Из этой оценки на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$ вытекает неравенство

$$\|y(t)\| \leq \left(\Phi_2 \sum_{j=0}^k \|D^j\| e^{j\beta^+\tau} + \|D^{k+1}\| e^{(k+1)\beta^+\tau} \Phi_1 \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right),$$

где β^+ определено в (2.14). Отсюда, учитывая условие (2.16) на $\|D^l\|$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq & \left(\Phi_2 \sum_{j=0}^{\infty} \|D^j\| e^{j\beta^+\tau} + \max\{\|D\| e^{\beta^+\tau}, \dots, \|D^l\| e^{l\beta^+\tau}\} \Phi_1 \right) \\ & \times \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|D^j\| e^{j\beta^+\tau} \leq (1 - \|D^l\| e^{l\beta^+\tau})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^+\tau},$$

отсюда непосредственно вытекает неравенство (2.17).

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Рассмотрим подробно случай $l = 1$.

Покажем, что решение задачи (2.1) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \exp \left(-\int_0^t \hat{\beta}(\xi) d\xi \right) + \|D^{k+1}\| \Phi_1. \quad (3.12)$$

По условию $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, тогда в силу рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4, $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, \tau]$. Поэтому если $t \in [\tau, 2\tau]$, то выполнены оценки (3.9), (3.10). Следовательно, учитывая неравенство (2.5), получаем оценку (3.6) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Отсюда, как и ранее, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(y_t)$, выводим неравенство (3.11).

Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq & \Phi_2 \left(\exp \left(-\int_0^t \beta(\xi) d\xi \right) \right. \\ & \left. + \exp \left(\int_{t-\tau}^t \frac{1}{\tau} \ln \|D\| d\xi - \int_0^{t-\tau} \beta(\xi) d\xi \right) \right) + \|D^2\| \Phi_1. \end{aligned}$$

Учитывая обозначение (2.18), в случае $l = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq \Phi_2 2 \exp \left(- \int_0^t \hat{\beta}(\xi) d\xi \right) + \|D^2\| \Phi_1 \\ &\leq \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \exp \left(- \int_0^t \hat{\beta}(\xi) d\xi \right) + \|D^2\| \Phi_1.\end{aligned}$$

Из полученной оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.1) определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$, и при $k = 1$ неравенство (3.12) доказано. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 2\tau]$. Поэтому если $t \in [2\tau, 3\tau]$, то выполнены оценки (3.9), (3.10). Учитывая неравенство (2.5), получаем оценку (3.6) при $t \in [2\tau, t_3]$, где $t_3 = \min\{3\tau, t'\}$. Отсюда, как и ранее, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(y_t)$, выводим неравенство

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq \Phi_2 \left(\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) + \|D\| \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^{t-\tau} \gamma(\xi) d\xi \right) \right. \\ &\quad \left. + \|D^2\| \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^{t-2\tau} \gamma(\xi) d\xi \right) \right) + \|D^3\| \Phi_1.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Учитывая, что

$$\|D^j\| \leq \exp \left(\int_{t-j\tau}^t \frac{1}{\tau} \ln \|D\| d\xi \right),$$

и определение (2.18), имеем

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq \Phi_2 \left(\exp \left(- \int_0^t \beta(\xi) d\xi \right) + \exp \left(\int_{t-\tau}^t \frac{1}{\tau} \ln \|D\| d\xi - \int_0^{t-\tau} \beta(\xi) d\xi \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left(\int_{t-2\tau}^t \frac{1}{\tau} \ln \|D\| d\xi - \int_0^{t-2\tau} \beta(\xi) d\xi \right) \right) + \|D^3\| \Phi_1 \\ &\leq \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \exp \left(- \int_0^t \hat{\beta}(\xi) d\xi \right) + \|D^3\| \Phi_1.\end{aligned}$$

Из полученной оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.1) определено на всем отрезке $[0, 3\tau]$, т. е. $t' > 3\tau$, и при $k = 2$ неравенство (3.12) доказано. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 3\tau]$.

Проводя аналогичные рассуждения, при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ можно получить оценку (3.12) на любом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k \geq 3$. Следовательно, решение задачи (2.1) определено на всей правой полуоси $\{t \geq 0\}$.

Покажем, что выполнено неравенство (2.19). Действительно, для второго слагаемого в правой части (3.12) при $l = 1$, очевидно, имеем

$$\|D^{k+1}\| \Phi_1 \leq \exp \left(\frac{t}{\tau} \ln \|D\| \right) \Phi_1 \leq \exp \left(- \int_0^t \hat{\beta}(\xi) d\xi \right) \Phi_1.$$

Отсюда и из (3.12) непосредственно вытекает (2.19).

Аналогичным образом, учитывая условия на $\|D^l\|$, как в [15] можно установить разрешимость задачи (2.1) в целом и оценку (2.19) в случае $l \geq 2$.

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Покажем, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ решение начальной задачи (2.1) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$.

Как уже отмечалось, если $\Phi_1 < \rho$ и $V(\varphi) < r$, то независимо от величины $\|D^l\|$ решение задачи (2.1) определено на всем отрезке $[0, \tau]$ и на нем выполнено неравенство (3.8). Поэтому

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 e^{-\beta^- t} + \|D\| \Phi_1, \quad t \in [0, \tau].$$

Отсюда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ имеем $\|y(t)\| < \rho$, $t \in [0, \tau]$. Следовательно, как при доказательстве теоремы 4, получаем оценку (3.11) при $t \in [\tau, t_2]$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Из этой оценки вытекает, что решение определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$. В силу условия (2.20) получаем

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 (e^{-\beta^- t} + \|D\| e^{-\beta^- (t-\tau)}) + \|D^2\| \Phi_1, \quad t \in [\tau, 2\tau]. \quad (3.14)$$

Из неравенства (3.14) в случае $l = 1$ на отрезке $[\tau, 2\tau]$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi_2 \|D\| e^{-\beta^- (t-\tau)} (1 + (\|D\| e^{\beta^- \tau})^{-1}) + \|D^2\| \Phi_1 \\ &\leq \Phi_2 \|D\|^{\frac{1}{\tau}} (1 - (\|D\| e^{\beta^- \tau})^{-1})^{-1} + \|D\|^{\frac{1}{\tau}} \Phi_1. \end{aligned}$$

При $l \geq 2$, учитывая условие (2.20), очевидно, получим

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi_2 e^{-\beta^- t} (1 + \|D\| e^{\beta^- \tau}) + \|D^2\| \Phi_1 \\ &\leq \Phi_2 \|D^l\|^{\frac{1}{l\tau}} (1 - (\|D^l\| e^{l\beta^- \tau})^{-1})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^- \tau} + \|D^2\| \Phi_1. \end{aligned}$$

Поэтому если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, то $\|y(t)\| < \rho$, $t \in [0, 2\tau]$. Следовательно, как и при доказательстве теоремы 5, на промежутке $t \in [2\tau, t_3]$, где $t_3 = \min\{3\tau, t'\}$, можно получить оценку (3.13), а из нее будет вытекать существование решения задачи (2.1) на всем отрезке $[0, 3\tau]$, т. е. $t' > 3\tau$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается разрешимость начальной задачи (2.1) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, при этом на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau]$, $k \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \sum_{j=0}^k \|D^j\| e^{-\beta^- (t-j\tau)} + \|D^{k+1}\| \Phi_1. \quad (3.15)$$

Из этой оценки вытекает неравенство (2.21). Действительно, будем рассматривать неравенство (3.15) на промежутках $[k\tau, (k+1)\tau]$, при этом $ml \leq k \leq (m+1)l - 1$, $m \in \mathbb{N}$. По условию (2.20) $\|D^l\| e^{l\beta^- \tau} > 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \|D^j\| e^{j\beta^- \tau} &\leq (1 + \|D^l\| e^{l\beta^- \tau} + \dots + \|D^l\|^m e^{ml\beta^- \tau}) \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^- \tau} \\ &\leq \|D^l\|^m e^{ml\beta^- \tau} (1 - (\|D^l\| e^{l\beta^- \tau})^{-1})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^- \tau}. \end{aligned}$$

Поскольку $ml\tau \leq t < (m+1)l\tau$, для первого слагаемого в правой части (3.15) получаем

$$\Phi_2 \sum_{j=0}^k \|D^j\| e^{-\beta^-(t-j\tau)} \leq \Phi_2 \|D^l\|^{\frac{t}{l\tau}} (1 - (\|D^l\| e^{l\beta^-\tau})^{-1})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{j\beta^-\tau}. \quad (3.16)$$

Аналогичным образом, учитывая, что $\|D^l\| < 1$, имеем

$$\|D^{k+1}\| \leq \|D^l\|^m \|D\| \|D\|^{k-ml} \leq \|D^l\|^m \|D\| \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\}.$$

Поэтому для второго слагаемого в правой части (3.15) получим

$$\|D^{k+1}\| \Phi_1 \leq \|D^l\|^{\frac{t}{l\tau}-1} \|D\| \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\} \Phi_1. \quad (3.17)$$

В силу (3.16), (3.17) из неравенства (3.15) вытекает (2.21).

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7 следует непосредственно из теорем 4–6.

4. О проверке условия устойчивости

Рассмотрим вопрос о выборе матриц $H(t)$ и $K(s)$ из теоремы 2, при использовании которых несложно проверить достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1). Приведем один из вариантов построения таких матриц.

Вначале рассмотрим случай, когда $\|D\| < 1$. Будем предполагать, что T -периодическая матрица $A(t)$ такова, что нулевое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t > 0,$$

асимптотически устойчиво. Тогда согласно критерию из работы [17] существует единственное решение $H(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -I, & t \in [0, T], \\ H(0) = H(T) > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

при этом $H(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Будем использовать это решение. В качестве $K(s)$ возьмем матрицу

$$K(s) = \mu e^{-\kappa s} I, \quad \mu > 0, \kappa > 0. \quad (4.2)$$

Используя введенные матрицы, можно получить следующий результат об экспоненциальной устойчивости.

Теорема 8. *Предположим, что $\|D\| < 1$ и $H(t) = H^*(t)$ — решение краевой задачи (4.1), причем при $t \in [0, T]$ выполнено матричное неравенство*

$$\begin{aligned} (1 - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ > 2 \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|} I. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. По теореме 7 для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1) достаточно выполнения условий теоремы 2. В силу выбора матриц $H(t)$, $K(s)$ нужно проверить положительную

определенность матрицы (1.8), что эквивалентно положительной определенности матрицы (2.3). Это в силу (2.4) эквивалентно условиям

$$S_{22} > 0, \quad S_{11}(t) - S_{12}(t)S_{22}^{-1}S_{12}^*(t) > 0. \quad (4.4)$$

В нашем случае это записывается в виде

$$e^{-\kappa\tau}I - D^*D > 0,$$

$$\begin{aligned} & I - \mu I - \mu^{-1}(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu D) \\ & \times (e^{-\kappa\tau}I - D^*D)^{-1}((B(t) - A(t)D)^*H(t) - \mu D^*) > 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для справедливости этих неравенств достаточно показать выполнение следующих оценок:

$$e^{-\kappa\tau} - \|D\|^2 > 0,$$

$$\begin{aligned} & (e^{-\kappa\tau} - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ & > (\mu^{-1}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\| + \mu e^{-\kappa\tau})I. \end{aligned}$$

В силу условия $\|D\| < 1$ при достаточно малом $\kappa > 0$ первое неравенство выполнено. Для проверки справедливости второго неравенства достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} & (e^{-\kappa\tau} - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ & > (\mu^{-1} \max_{t \in [0, T]} \|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\| + \mu e^{-\kappa\tau})I. \end{aligned}$$

Если $B(t) \equiv A(t)D$, то это неравенство будет выполнено при

$$0 < \mu < 1 - \|D\|^2 e^{\kappa\tau}.$$

Если $B(t) \not\equiv A(t)D$, то, полагая

$$\mu = \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|} e^{\kappa\tau/2},$$

получим

$$\begin{aligned} & (e^{-\kappa\tau} - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ & > 2 \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|} e^{-\kappa\tau/2}I. \end{aligned}$$

При $\kappa = 0$ это неравенство совпадает с (4.3). Значит, при κ , достаточно близком к 0, оно также будет выполнено. Таким образом, условия теоремы 2 выполнены. Следовательно, по теореме 7 нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда спектр матрицы D содержится в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Пусть $\tilde{H} = \tilde{H}^* > 0$ — решение дискретного уравнения Ляпунова

$$\tilde{H} - D^*\tilde{H}D = I. \quad (4.5)$$

Возьмем в качестве $K(s)$ матрицу

$$K(s) = \mu e^{-\kappa s} \tilde{H}, \quad \mu > 0, \quad \kappa > 0. \quad (4.6)$$

Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$ из (4.1) и (4.6), так же, как в случае $\|D\| < 1$, нетрудно получить результат об экспоненциальной устойчивости.

Теорема 9. Пусть $H(t) = H^*(t)$ — решение краевой задачи (4.1) и $\tilde{H} = \tilde{H}^* > 0$ — решение дискретного уравнения Ляпунова (4.5), причем при $t \in [0, T]$ выполнено матричное неравенство

$$\begin{aligned} I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\tilde{H} + \tilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ > 2\sqrt{\max_{t \in [0, T]} \|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|} \sqrt{\|\tilde{H} + \tilde{H}DD^*\tilde{H}\|} I. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. По теореме 7 для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1) достаточно выполнения условий теоремы 2. Как при доказательстве предыдущей теоремы, это эквивалентно условиям (4.4), которые в нашем случае имеют вид

$$I - (1 - e^{-\kappa\tau})\tilde{H} > 0,$$

$$\begin{aligned} I - \mu\tilde{H} - \mu^{-1}(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu\tilde{H}D) \\ \times (I - (1 - e^{-\kappa\tau})\tilde{H})^{-1}((B(t) - A(t)D)^*H(t) - \mu D^*\tilde{H}) > 0. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что для проверки справедливости этих неравенств достаточно установить, что имеют место следующие оценки:

$$\xi = 1 - (1 - e^{-\kappa\tau})\|\tilde{H}\| > 0,$$

$$\begin{aligned} \xi I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\tilde{H} + \tilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ > (\mu^{-1}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\| + \mu\|\xi\tilde{H} + \tilde{H}DD^*\tilde{H}\|)I. \end{aligned}$$

При достаточно малом $\kappa > 0$ первое неравенство выполнено. Для справедливости второго достаточно получить неравенство

$$\begin{aligned} \xi I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\tilde{H} + \tilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ > (\mu^{-1}\max_{t \in [0, T]} \|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\| + \mu\|\xi\tilde{H} + \tilde{H}DD^*\tilde{H}\|)I. \end{aligned}$$

Если $B(t) \equiv A(t)D$, то это неравенство выполнено при

$$0 < \mu < \frac{\xi}{\|\xi\tilde{H} + \tilde{H}DD^*\tilde{H}\|}.$$

Если $B(t) \not\equiv A(t)D$, то, полагая

$$\mu = \sqrt{\frac{\max_{t \in [0, T]} \|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|}{\|\xi\tilde{H} + \tilde{H}DD^*\tilde{H}\|}},$$

получим

$$\begin{aligned} \xi I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\tilde{H} + \tilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ > 2\sqrt{\max_{t \in [0, T]} \|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|} \sqrt{\|\xi\tilde{H} + \tilde{H}DD^*\tilde{H}\|} I. \end{aligned}$$

При $\xi = 1$, т. е. $\kappa = 0$, это неравенство совпадает с (4.7). Значит, при ξ , достаточно близком к 1, оно также будет выполнено. Таким образом, условия теоремы 2 выполнены. Следовательно, по теореме 7 нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что уравнения нейтрального типа возникают во многих практических задачах (см., например, [19–23]). Результаты настоящей работы могут быть использованы при изучении асимптотического поведения решений в таких моделях.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Math. Appl.; V. 463).
2. Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. New York: Birkhäuser; Springer-Verl., 2013.
3. Gil' M. I. Stability of neutral functional differential equations. Paris: Atlantis Press, 2014. (Atlantis Stud. Differ. Equ.; V. 3).
4. Демиденко Г. В. О втором методе Ляпунова для уравнений с запаздывающим аргументом. Новосибирск, 2014. 20 с. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 289).
5. Demidenko G. V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.
6. Демиденко Г. В., Котова Т. В., Скворцова М. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 3. С. 17–29.
7. Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С., Скворцова М. А. Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 53–60.
8. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об экспоненциальной устойчивости решений одного класса систем дифференциальных уравнений нейтрального типа // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 59–70.
9. Demidenko G. V., Matveeva I. I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Diff. Equ. 2016. V. 2016, N 19. P. 1–20.
10. Шильман С. В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.
11. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
12. Романовский Р. К., Бельгарт Л. В., Добровольский С. М., Рогозин А. В., Троценко Г. А. Метод функций Ляпунова для почти периодических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2015.
13. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
14. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
15. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
16. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
17. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.
18. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
19. Xiao B. Existence and uniqueness of almost periodic solutions for a class of Hopfield neural networks with neutral delays // Appl. Math. Lett. 2009. V. 22, N 4. P. 528–533.

20. Saldivar B., Mondie S., Loiseau J.-J., Rasvan V. Stick-slip oscillations in oilwell drillstrings: distributed parameter and neutral type retarded model approaches // Preprints of the 18th IFAC World Congress, Milano (Italy), August 28 – September 2, 2011. P. 284–289.
21. Delgado E., Diaz-Cacho M., Barreiro A. Stability of teleoperation systems for time-varying delays by neutral LMI techniques // Math. Probl. Eng. 2012. V. 2012, N 467629. P. 1–17.
22. Luo Z., Huang J., Dai B. A new existence theory for positive periodic solutions to a class of neutral delay model with feedback control and impulse // ISRN Math. Anal. 2013. V. 2013, N 695891. P. 1–18.
23. Niu B., Jiang W. Multiple bifurcation analysis in a NDDE arising from van der Pol's equation with extended delay feedback // Nonlinear Anal., Real World Appl. 2013. V. 14, N 1. P. 699–717.

Поступила в редакцию 3 июля 2019 г.

После доработки 3 июля 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Демиденко Геннадий Владимирович, Матвеева Инесса Изотовна,
Скворцова Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru, matveeva@math.nsc.ru, sm-18-nsu@yandex.ru