Yu. L. Ershov, On Brown polynomials. II, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1080–1084

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.507>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.197.8

April 26, 2023, 17:01:11

УДК 512.623.4

О МНОГОЧЛЕНАХ БРАУНА. II

Ю. Л. Ершов

Аннотация. Усилены результаты предыдущих работ автора, а также установлено, что любой неприводимый многочлен над гензелевым нормированным полем является многочленом Брауна.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.507

Ключевые слова: гензелевы нормированные поля, многочлены Брауна.

Все необходимые сведения о нормированных полях можно найти в [1, гл. 1]. Настоящая статья продолжает серию работ автора [2–4].

Пусть $\mathbb{F} = \langle F, R \rangle$ — нормированное поле, $\tilde{F}$ — алгебраическое замыкание F , $\tilde{R}$ — кольцо нормирования поля $\tilde{F}$ такое, что $\tilde{R} \cap F = R$ (т. е. $\mathbb{F} \leq \tilde{\mathbb{F}} = \langle \tilde{F}, \tilde{R} \rangle$).

Пусть $g \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что его образ $\bar{g}$ в $F_R[x]$ является неприводимым многочленом над полем вычетов F_R кольца нормирования R ; пусть $\lambda > 0$, $\lambda \in \Gamma_{\tilde{R}}$ и $e > 0$ целое. Многочлен $f \in R[x]$ назовем *многочленом Брауна* (типа (g, e, λ)), если выполнены следующие условия для g -разложения $f = \sum_{i < n} f_i g^i$ ($f_i \in R[x]$ — многочлен степени, меньшей, чем степень δg члена g):

- (1) $v_x f_e = 0$, $v_x f_0 = e\lambda$,
- (2) $v_x f_i \geq (e - i)\lambda$ для $i < 0 < e$.

Здесь v_x — гауссово нормирование поля $F(x)$, продолжающее нормирование v_R ($v_x h = \min\{v_R(a_i) \mid i \leq \delta h\}$ для $h = \sum a_i x^i \in F[x]$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если f — многочлен Брауна типа (g, e, λ) , то число e однозначно определяется следующими условиями:

$$\bar{g}^e \mid \bar{f} \text{ (}\bar{g} \text{ делит } \bar{f}\text{)} \quad \text{и} \quad \bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f} \text{ (}\bar{g}^{e+1} \text{ не делит } \bar{f}\text{)}.$$

Как и в [4], будет использоваться нормирование w поля F , продолжающее нормирование v_R поля F , которое определяется так:

$$wh = \min\{v_x h_i + i\lambda \mid i \leq \delta h\}$$

для любого многочлена $h \in F[x]$ и его g -разложения $h = \sum_{i < \delta h} h_i g^i$.

Предложение 1. Многочлен $f \in R[x]$ является многочленом Брауна типа (g, e, λ) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) $v_x f_0 = e\lambda$, $v_x f_e = 0$,

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1 (проект № 0314–2019–0003).

(2) $wf = e\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f является многочленом Брауна типа (g, e, λ) . Условие (1) предложения совпадает с условием (1) определения многочлена Брауна.

Если $0 < i < e$, то $v_x f_i \geq (e - i)\lambda$, $v_x f_i + i\lambda \geq e\lambda$; если $i > e$, то $v_x f_i + i\lambda \geq i\lambda > e\lambda$. Отсюда следует, что $e\lambda = \min\{v_x f_i + i\lambda \mid i < \delta f\} = wf$.

Обратно, если $wf = e\lambda$, то $e\lambda = \min\{v_x f_i + i\lambda \mid i < \delta f\}$ влечет, что $e\lambda \leq v_x f_i + i\lambda$, $v_x f_i \geq (e - i)\lambda$ для любого i .

Вместе с условием (1) получаем, что f является многочленом Брауна типа (g, e, λ) . $\square$

Предложение 2. Пусть $f, h \in R[x]$ являются многочленами Брауна типа (g, e_0, λ) и (g, e_1, λ) соответственно. Тогда многочлен $f \cdot h$ является многочленом Брауна типа $(g, e_0 + e_1, \lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f = \sum_{i < \delta f} f_i g^i, \quad h = \sum_{i < \delta h} h_i g^i,$$

$$fh = \sum_{i < \delta(fh)} F_i g^i \text{ — } g\text{-разложения многочленов } f, h \text{ и } fh.$$

Имеем $w(fh) = w(f) + w(h) = e_0\lambda + e_1\lambda = (e_0 + e_1)\lambda$.

Лемма 1. Пусть $f, h \in R[x]$, $r(f)$ — остаток от деления f на g , $r(h)$ — остаток от деления h на g и $r(fh)$ — остаток от деления fh на g . Тогда $v_x(r(fh)) = v_x r(f) + v_x r(h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $r(fh)$ является остатком от деления $r(f) \cdot r(h)$ на g , так что можно ограничиться рассмотрением случая, когда $f = r(f)$ и $h = r(h)$, т. е. когда степени многочленов f и h меньше степени многочлена g .

Итак, пусть степени многочленов f и h меньше степени многочлена g и $fh = d \cdot g + r$, $d, r \in R[x]$ — g -разложение многочлена fh . Заметим, что $r = r(f \cdot h)$. В доказательстве будет использоваться нормирование w , определенное выше.

Из предположений о степенях многочленов f и h следует, что $wf = v_x f$, $wh = v_x h$. Имеем

$$v_x f = \min\{v(a_i) \mid f = \sum a_i x^i\}, \quad v_x h = \min\{v(b_i) \mid h = \sum b_i x^i\}.$$

Пусть $a, b \in R$ таковы, что $v_x f = v(a)$, $v_x h = v(b)$. Полагаем $\tilde{f} = a^{-1}f$, $\tilde{h} = b^{-1}h$, тогда $\tilde{f}, \tilde{h} \in R[x]$, $v_x(\tilde{f}) = v_x(\tilde{h}) = 0$. Если $\tilde{f} = \tilde{d}g + \tilde{r}$, $\tilde{d}, \tilde{r} \in R[x]$ — g -разложение $\tilde{f}\tilde{h}$, то нетрудно видеть, что $\tilde{d} = (ab)^{-1}d$, $\tilde{r} = (ab)^{-1}r$.

Имеем

$$0 = v_x \tilde{f} + v_x \tilde{h} = w\tilde{f} + w\tilde{h} = w(\tilde{f}\tilde{h}) = \min\{v_x \tilde{d} + \lambda, v_x \tilde{r}\} = v_x \tilde{r},$$

так как $v_x \tilde{d} + \lambda \geq \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} 0 = v_x(\tilde{r}) &= v_x((ab)^{-1}r) = v_x(r) - v_x(ab) : v_x(r) \\ &= v_x(ab) = v_x(a) + v_x(b) = v_x f + v_x h. \end{aligned} \quad \square$$

Из леммы 1 получаем, что

$$v_x(F_0) = v_x(h_0) + v_x(h_1) = e_0\lambda + e_1\lambda = (e_0 + e_1)\lambda.$$

Установим лемму, достаточную для завершения доказательства.

Лемма 2. Пусть $g, f \in R[x]$, g унитарен, $\bar{g}$ неприводим над F_R , $\bar{g}^e \mid \bar{f}$, $\bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f}$. Если $f = \sum f_i g^i$ — g -разложение f , то $\bar{f}_e \neq 0$ ($v_x f_e = 0$), $\bar{f}_i = 0$ для $i < e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\sum \bar{f}_i \bar{g}^i$ — $\bar{g}$ -разложение $\bar{f}$. Отсюда сразу следует заключение леммы.

Для доказательства предложения достаточно заметить, что $\bar{g}^{e_0+e_1} \mid \overline{f \cdot h} (= \bar{f} \cdot \bar{h})$ и $\bar{g}^{e_0+e_1+1} \nmid \overline{f \cdot h}$. Тогда $\bar{F}_{e_0+e_1} \neq 0$ и $v_x(F_{e_0+e_1}) = 0$. $\square$

Для формулировки следующего предложения необходимо расширить класс многочленов Брауна на случай $e = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $g \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что $\bar{g} \in R[x]$ неприводим над F_D , $\lambda > 0 \in \Gamma_{\bar{R}}$. Многочлен $f \in R[x]$ назовем *многочленом Брауна типа* $(g, 0, \lambda)$, если $\bar{g} \nmid \bar{f}$.

Заметим, что f — многочлен Брауна типа $(g, 0, \lambda)$ тогда и только тогда, когда $v_x f_0 = 0$.

Нетрудно проверить, что предложение 2 остается справедливым и для случаев, когда $e_0 = 0$ и (или) $e_1 = 0$.

Предложение 3. Пусть $f \in R[x]$ — многочлен Брауна типа (g, e, λ) и $f = h_0 \cdot h_1$, $h_0, h_1 \in R[x]$. Тогда существуют натуральные e_0 и e_1 такие, что $e = e_0 + e_1$, h_i является многочленом Брауна типа (g, e_i, λ) , $i = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e_i — натуральное число такое, что $\bar{g}^{e_i} \mid \bar{h}_i$, $\bar{g}^{e_i+1} \nmid \bar{h}_i$, $i = 0, 1$. Ясно, что $e = e_0 + e_1$.

Лемма 3. Пусть $f \in R[x]$ и $\bar{g}^e \mid \bar{f}$, $\bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f}$. Тогда $wf \leq e\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $f = \sum f_i g^i$, g — разложение f . Если $\bar{g}^e \mid \bar{f}$, $\bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f}$, то $\bar{f}_e \neq 0$, $v_x f_e = 0$ и тогда $w(f) \leq e\lambda + v_x f_e = e\lambda$. $\square$

Из леммы следует, что $w(h_i) \leq e_i \lambda$, $i = 0, 1$. Тогда

$$e\lambda = (e_0 + e_1)\lambda = w(f) = w(h_0 h_1) = w(h_0) + w(h_1) \leq e_0 + e_1 \lambda = (e_0 + e_1)\lambda.$$

Отсюда вытекает, что $w(h_i) = e_i \lambda$, $i = 0, 1$.

Итак, установлено, что $wh_i = e_i \lambda$.

Для завершения доказательства будем применять предложение 1. Пусть

$$h_i = \sum h_{ij} g^j, \quad i = 0, 1, \quad - g\text{-разложения многочленов } h_0 \text{ и } h_1.$$

Достаточно установить, что $v_x h_{i0} = e_i \lambda$ и $v_x h_{ie_i} = 0$, $i = 0, 1$. Из доказанного равенства $wh_i = e_i \lambda$ получаем, что $v_x h_{i0} \geq e_0 \lambda$ (так как $wh_i = \min\{v_x h_{ij} + j\lambda\}$). Из леммы 1 следует, что

$$e\lambda = (e_0 + e_1)\lambda = v_x h_{00} + v_x h_{1,0} \geq e_0 + e_1 \lambda = (e_0 + e_1)\lambda,$$

отсюда $v_x h_{i0} = e_i \lambda$, $i = 0, 1$.

Из того, что $\bar{g}^{e_i} \mid \bar{h}_i$, $\bar{g}^{e_i+1} \nmid \bar{h}_i$, и леммы 2 вытекает, что $v_x h_{ie_i} = 0$. Тем самым установлено, что h_i является многочленом Брауна типа (g, e_i, λ) , $i = 0, 1$. $\square$

В заключение докажем теорему, которая показывает, что многочленов Брауна не так уж мало.

Теорема. Пусть $\mathbb{F} = \langle F, R \rangle$ — гензелево нормированное поле и $f \in R[x]$ — унитарный многочлен, неприводимый над F . Тогда f является многочленом Брауна типа (g, e, λ) , $e > 0$, для подходящих g, e и λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим образ $\bar{f}$ многочлена f в $F_R[x]$. Так как $\mathbb{F}$ гензелево, то $\bar{f}$ не может быть представлено в виде произведения взаимно простых многочленов. Но тогда существуют многочлен $\tilde{g} \in F_R[x]$, неприводимый над F_R , и натуральное $e > 0$ такие, что $\bar{f} = \tilde{g}^e$.

Пусть $g \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что $\bar{g} = \tilde{g}$ и $g \neq f$, если $e = 1$. Заметим, что неприводимость $\tilde{g}$ над F_R влечет неприводимость g над F .

Пусть $r \in R[x]$ — остаток от деления f на g и $\lambda \equiv \frac{1}{e}v_x(r)$. Докажем, что f является многочленом Брауна типа (g, e, λ) . Пусть

$$f = \sum f_i g^i \text{ — } g\text{-разложение } f.$$

Так как $r = f_0$, то $v_x(f_0) = e\lambda$. Пусть $\alpha, \theta \in F$ такие, что α — корень многочлена g , θ — корень многочлена f и

$$\tilde{v}(\alpha - \theta) = \max\{v(\alpha' - \theta') \mid g(\alpha') = 0, f(\theta') = 0\}.$$

Полагаем $\delta \equiv \tilde{v}(\alpha - \theta)$. Для дальнейшего будем пользоваться нормированием $w' = w_{\alpha, \delta}$ поля $\tilde{F}$, определенным по минимальной паре (α, δ) (см. [5]). Нормирование w' на $\tilde{F}[x]$ определяется так: если $h = \sum c_i(x - \alpha)^i$, $c_i \in \tilde{F}$, то $w'h = \min\{\tilde{v}(c_i) + i\delta\}$. Установим следующие соотношения:

1. $w'(g) = \tilde{v}g(\theta)$. Пусть

$$g = \prod (x - \alpha_i), \quad w'(x - \alpha_i) = w'((x - \alpha) + (\alpha - \alpha_i)) = \min\{\delta, \tilde{v}(\alpha - \alpha_i)\}.$$

Далее, $\tilde{v}(\theta - \alpha_i) = \tilde{v}((\theta - \alpha) + (\alpha - \alpha_i))$. Если $\tilde{v}(\alpha - \alpha_i) < \delta = v(\theta - \alpha)$, то $\tilde{v}(\theta - \alpha_i) = \tilde{v}(\alpha - \alpha_i) = w'(x - \alpha_i)$; если $\tilde{v}(\alpha - \alpha_i) \geq \delta$, то $\tilde{v}(\theta - \alpha) + (\alpha - \alpha_i) \geq \delta$ и $\tilde{v}((\theta - \alpha_i)) \leq \delta$, следовательно, $\tilde{v}(\theta - \alpha_i) = \delta = v(\alpha - \alpha_i) = w'(x - \alpha_i)$; если $\tilde{v}(\alpha - \alpha_i) > \delta$, то $\tilde{v}(\theta - \alpha_i) = \delta = w'(x - \alpha)$. Тем самым

$$w'g(x) = \sum w'(x - \alpha_i) = \sum \tilde{v}(\theta - \alpha_i) = \tilde{v}g(\theta).$$

2. $w'f = \tilde{v}f(\alpha)$. Пусть

$$f = \prod (x - \theta_i), \quad w'f = \sum w'(x - \theta_i).$$

Тогда

$$w'(x - \theta_i) = w'((x - \alpha) + (\alpha - \theta_i)) = \min\{\delta, \tilde{v}(\alpha - \theta_i)\} = \tilde{v}(\alpha - \theta_i),$$

так как $\tilde{v}(\alpha - \theta_i) \leq \tilde{v}(\alpha - \theta) = \delta$.

Итак,

$$w'f = \sum w(x - \theta_i) = \sum \tilde{v}(\alpha - \theta_i) = \tilde{v}f(\alpha).$$

3. $\tilde{v}f(\alpha) = v_x f_0$. Действительно,

$$f(\alpha) = \sum f_i(\alpha)g(\alpha)^i = f_0(\alpha), \quad \text{так как } g(\alpha) = 0.$$

Стало быть, $\tilde{v}f(\alpha) = \tilde{v}f_0(\alpha)$, но $\tilde{v}f_0(\alpha) = v_x f_0(x)$, поскольку нетрудно проверить, что для любого многочлена $h \in R[x]$, степень которого меньше степени g , справедливо равенство $\tilde{v}h(\alpha) = v_x h$.

4. $\tilde{v}f(\alpha) = e\tilde{v}g(\theta)$. Действительно, пусть

$$R(f, g) = \prod_{\substack{f(\theta')=0, \\ g(\alpha')=0}} (\theta' - \alpha') - \text{результант многочленов } f \text{ и } g.$$

Тогда

$$R(f, g) = \prod_{f(\theta')=0} g(\theta') = (-1)^{\delta_g} \prod_{g(\alpha')=0} f(\alpha').$$

Так как $\mathbb{F}$ гензелево, то $\tilde{v}g(\theta') = \tilde{v}(g(\theta))$ для любого θ' такого, что $f(\theta') = 0$, и $\tilde{v}f(\alpha') = \tilde{v}(f(\alpha))$ для любого α' такого, что $g(\alpha') = 0$; тогда

$$\tilde{v}R(f, g) = n\tilde{v}g(\theta) = k\tilde{v}f(\alpha),$$

где n — степень f , а k — степень g .

Заметим, что $n = k \cdot e$. Отсюда $e\tilde{v}g(\theta) = \tilde{v}f(\alpha)$.

Из пп. 1 и 3 следует, что

$$w'g = \tilde{v}g(\theta) = \frac{1}{e}\tilde{v}f(\alpha) = \frac{1}{e}v_x f_0 = \lambda.$$

Из равенства $w'g = \lambda$ и леммы 2.1 из [5] вытекает, что ограничение w' на $F[x]$ совпадает с w . Тогда $wf = w'f = v_x f_0 = e\lambda$.

Итак, $wf = e\lambda$, $v_x f_0 = e\lambda$. Для применения предложения 1 достаточно установить, что $v_x f_e = 0$, но из того, что f и g унитарные, следует, что $f_e = 1$ и $v_x f_e = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю. Л. Кратно нормированные поля. Новосибирск: Науч. книга, 2000.
2. Ершов Ю. Л. Об одной статье Р. Брауна // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 292–296.
3. Ершов Ю. Л. Сепаранты некоторых многочленов // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1053–1057.
4. Ершов Ю. Л. О многочленах Брауна // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 819–821.
5. Khanduja S. K., Khasa R. A generalization of Eisenstein Schönemann irreducibility criterion // Manuscr. Math. 2011. V. 134. P. 215–224.

Поступила в редакцию 28 февраля 2019 г.

После доработки 28 февраля 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru