D. V. Isangulova, Analogs of Korn's inequality on Heisenberg groups, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1085–1102

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.508>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.162.127.20

April 26, 2023, 16:32:55

УДК 517.5

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА КОРНА НА ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА Д. В. Исангулова

Аннотация. Строятся два аналога неравенства Корна на группах Гейзенберга. Во-первых, оценивается норма горизонтального дифференциала через его симметричную часть. Во-вторых, рассматривается неравенство Корна как коэрцитивная оценка для дифференциального оператора, ядро которого совпадает с алгеброй Ли группы изометрий. Для этого строится дифференциальный оператор, ядро которого совпадает с алгеброй Ли группы изометрий на группах Гейзенберга, и доказывается коэрцитивная оценка для него.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.508

Ключевые слова: группа Гейзенберга, неравенство Корна, интегральное представление, алгебра Ли группы изометрий, коэрцитивная оценка.

Юрию Григорьевичу Решетняку
к 90-летию юбилею

§ 1. Введение

Неравенства Корна играют основную роль при доказательстве корректности вариационных задач в теории упругости [1]. Классическое неравенство Корна [2, 3] оценивает норму дифференциала через норму его симметричной части:

$$\|DF\|_{L_2(\Omega)} \leq C\|\varepsilon\|_{L_2(\Omega)},$$

где F — W_2^1 -гладкая деформация в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\varepsilon = \frac{1}{2}(DF + (DF)^t)$ — тензор линейной деформации. Очевидным образом неравенство Корна выполняется не для всех соболевских функций, а только для функций с дополнительными условиями. Например, для функций с компактным носителем или функций на липшицевых областях, удовлетворяющих условию $(DF - (DF)^t)_\Omega = 0$.

Для произвольной соболевской функции F на ограниченной связной липшицевой области неравенство Корна имеет вид $\|DF - A\|_2 \leq C\|\varepsilon\|_2$ для некоторой кососимметрической матрицы A . Множество обобщений неравенств Корна с различными краевыми условиями, условиями роста и условиями на неограниченные области исследованы в литературе (см., например, [4–6] и ссылки в них).

На наш взгляд, самый общий подход к неравенству Корна — рассматривать его как коэрцитивную оценку для оператора $\mathbb{Q}$ [7, 8]:

$$\|D(F - \Pi F)\|_p \leq C\|\mathbb{Q}F\|_p, \quad F \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad p > 1,$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.3087.2017/4.6).

где $\mathbb{Q}F = \frac{DF + (DF)^t}{2}$ — дифференциальный оператор, Π — проекция на ядро оператора $\mathbb{Q}$, Ω — область Джона. Отметим, что ядро оператора $\mathbb{Q}$ совпадает с алгеброй Ли группы изометрий и состоит из функций вида $\text{span}\{a + Kx \mid a \in \mathbb{R}^n, K + K^t = 0\}$. Именно поэтому $D_h(\Pi F)$ — это постоянная кососимметрическая матрица. В [7] Ю. Г. Решетняк доказал данную коэрцитивную оценку на областях, являющихся конечным объединением областей, каждая из которых звездная относительно некоторого шара. В [8] Ю. Г. Решетняком доказаны интегральные представления для специальных дифференциальных операторов на областях Джона, из которых можно вывести коэрцитивную оценку на областях Джона.

В 1961 г. Джон [9] ввел понятие области, удовлетворяющей условию гибкого внутреннего конуса, сейчас известное как область Джона. Класс областей Джона намного шире, чем класс областей с внутренним конусом. Он включает в себя области с липшицевой границей и некоторые фрактальные области (например, область, ограниченную снежинкой Коха). В недавней работе [10] показано, что неравенство Корна выполняется только на областях Джона при дополнительном условии отделимости области.

Область Ω называется *областью Джона* $J(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \leq \beta$ [9], если существует выделенная точка $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ такая, что всякая точка $\mathbf{x} \in \Omega$ может быть соединена в Ω с $\mathbf{x}_0$ спрямляемой кривой γ , параметризованной длиной дуги, так, что

$$\gamma(0) = \mathbf{x}, \quad \gamma(l) = \mathbf{x}_0, \quad l \leq \beta, \quad \text{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l} \quad \text{для всех } s \in [0, l].$$

Цель данной работы — установить аналоги неравенства Корна на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ с субримановой метрикой. Одними из первых работ по квазиконформному анализу на группах Гейзенберга являются работы Кораньи и Райманна [11, 12]. Теория отображений с ограниченным искажением развита в работах С. К. Водопьянова [13], Л. Капоньи [14], Н. С. Даирбекова [15]. Введение в группы Гейзенберга можно найти в [16].

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ — это группа Ли, диффеоморфная $\mathbb{R}^{2n+1}$, со следующим групповым законом:

$$(x_1, \dots, x_{2n+1}) \cdot (y_1, \dots, y_{2n+1}) = \left(x_1 + y_1, \dots, x_{2n} + y_{2n}, x_{2n+1} + y_{2n+1} - 2 \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i) \right).$$

Левинвариантные векторные поля

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2x_{i+n} \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \quad X_{i+n} = \frac{\partial}{\partial x_{i+n}} - 2x_i \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}},$$

$$X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}} = -\frac{1}{4}[X_i, X_{i+n}], \quad i = 1, \dots, n,$$

образуют базис алгебры Ли. Подрасслоение $H\mathbb{H}^n$ касательного расслоения, образованное полями $X_1, \dots, X_{2n}$, называется *горизонтальным*. На $H\mathbb{H}^n$ вводится скалярное произведение, относительно которого поля $X_1, \dots, X_{2n}$ ортонормированы. *Метрика Карно — Каратеодори* d равна инфимуму длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (абсолютно непрерывная кривая γ *горизонтальна*, если $\dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{H}^n$ почти всюду). В дальнейшем будем

рассматривать группу Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ с метрикой d и стандартной мерой Лебега в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Последняя является биинвариантной мерой Хаара на $\mathbb{H}^n$. Обозначим через ν размерность по Хаусдорфу относительно метрики Карно — Каратеодори, $\nu = 2n + 2$.

Рассмотрим отображение $F = (f_1, \dots, f_{2n+1}) : U \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Концепция дифференцируемости на группах Гейзенберга и на более общих группах Карно (см. [17]) влечет, что F сохраняет горизонтальное подрасслоение: $X_i F(x) \in H_{F(x)} \mathbb{H}^n$, $i = 1, \dots, 2n$ (так называемое *условие контактности*). В частности, горизонтальный дифференциал $D_h F = (X_i f_j)_{i,j=1,\dots,2n}$ определяет полный дифференциал F . При этом вертикальная координатная функция f_{2n+1} может быть определена через горизонтальные координатные функции $f_1, \dots, f_{2n}$ с точностью до константы. Поэтому достаточно рассматривать отображения со значениями в $\mathbb{R}^{2n}$, а не в $\mathbb{H}^n$.

Мы рассматриваем отображение $w : U \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ класса Соболева $W_p^1(U; \mathbb{R}^{2n})$. Пространство Соболева $W_p^1(U; \mathbb{R}^{2n})$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из отображений $f = (f_1, \dots, f_{2n}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, имеющих слабые производные $X_i f_j$ для всех $i, j = 1, \dots, 2n$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^1(U; \mathbb{R}^{2n})} = \|f\|_{p,U} + \sum_{i=1}^{2n} \|X_i f\|_{p,U},$$

где $\|\cdot\|_{p,U}$ — L_p -норма измеримой векторнозначной функции на U .

Обозначим $D_h w = (X_i w_j)_{i,j=1,\dots,2n}$. Введем следующее обобщение линейного напряжения:

$$\mathcal{S}w = \frac{D_h w + (D_h w)^t}{2}.$$

Будем обобщать неравенство Корна в двух направлениях. Во-первых, оценим горизонтальный дифференциал через норму его симметричной части, т. е. докажем оценки вида $\|D_h w\| \leq C\|\mathcal{S}w\|$ или $\|D_h w\| \leq C(\|w\| + \|\mathcal{S}w\|)$. Во-вторых, будем искать дифференциальный оператор $\mathcal{Q}$, для которого выполняется коэрцитивное неравенство $\|D_h w - A\| \leq C\|\mathcal{Q}w\|$, где A — некоторая матрица.

В теореме 1 оценим норму дифференциала через его горизонтальную часть.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{H}^n$ и $w \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$.

(1) Если отображение w с компактным носителем в Ω , то

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq C_1 \|\mathcal{S}w\|_{p,\Omega}.$$

(2) Если Ω — область Джона, то

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq C_2 (\|w\|_{p,\Omega} + \|\mathcal{S}w\|_{p,\Omega}).$$

Здесь константы $C_1, C_2 > 0$ не зависят от отображения w .

Отметим, что в отличие от евклидова случая если $(D_h u - (D_h u)^t)_\Omega = 0$ и Ω — область Джона, то оценка

$$\|D_h u\|_{p,\Omega} \leq C \|\mathcal{S}u\|_{p,\Omega}$$

не обязательно выполняется (см. замечание 2 с контрпримером).

Чтобы найти дифференциальный оператор $\mathcal{Q}$, ядро которого связано с алгеброй Ли группы изометрий, линеаризуем условия ортогональности и контактности. Горизонтальный дифференциал контактного отображения имеет дополнительную структуру: с точностью до множителя $D_h F(x)$ — симплектическая матрица [12]. Поэтому оператор $\mathcal{Q}$ должен состоять из двух частей. Первая отвечает за ортогональность, а вторая — за симплектичность:

$$\mathcal{Q}w = \begin{pmatrix} \mathcal{S}w \\ \mathcal{T}w \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}w = \begin{cases} \frac{D_h w + J D_h w J}{2} & \text{для } n > 1, \\ \begin{pmatrix} X_2 X_1 u_2 - 2X_1 X_2 u_2 - X_1^2 u_1 \\ 2X_2 X_1 u_1 - X_1 X_2 u_1 + X_2^2 u_2 \end{pmatrix} & \text{для } n = 1. \end{cases}$$

Здесь $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Ядро построенного оператора $\mathcal{Q}$ действительно совпадает с горизонтальными координатными функциями отображений из алгебры Ли группы изометрий (см. предложение 3). При $n > 1$ оператор $\mathcal{Q}$ построен в [18] для доказательства устойчивости изометрий.

Оператор $\mathcal{T}$ линеаризует условие контактности. Отдельно рассматривается случай $n = 1$, так как в этом случае группа симплектических матриц $Sp(2, \mathbb{R})$ совпадает со специальной линейной группой $SL(2, \mathbb{R})$ и условие симплектичности не дает нужного результата. Действительно, условие

$$0 = D_h u + J D_h u J = \begin{pmatrix} X_1 u_1 - X_2 u_2 & X_2 u_1 + X_1 u_2 \\ X_1 u_2 + X_2 u_1 & X_2 u_2 - X_1 u_1 \end{pmatrix}$$

является условием Коши — Римана, если u не зависит от x_3 . Детальное построение оператора $\mathcal{T}$ на $\mathbb{H}^1$ приведено в п. 3.1.

Теорема 2. Пусть $n > 1$, $1 < p < \infty$, Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ на $\mathbb{H}^n$, $w \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$. Тогда существует кососимметрическая матрица A такая, что $A + JAJ = 0$ и

$$\|D_h w - A\|_{p, \Omega} \leq C \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\nu \|\mathcal{Q}w\|_{p, \Omega}.$$

Если дополнительно $(D_h w - (D_h w)^t)_\Omega = 0$, то

$$\|D_h w\|_{p, \Omega} \leq D \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\nu \|\mathcal{Q}w\|_{p, \Omega}.$$

Константы C и D не зависят от отображения w и области Ω .

На первой группе Гейзенберга оператор $\mathcal{Q}$ определен на функциях класса Соболева W_p^2 . Пространство Соболева $W_p^2(U, \mathbb{R}^{2n})$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из отображений $f = (f_1, \dots, f_{2n}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, имеющих слабые производные $X_i f_j$, $X_i X_j f_k$ для всех $i, j, k = 1, \dots, 2n$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^2(U, \mathbb{R}^{2n})} = \|f\|_{p, U} + \sum_{i=1}^{2n} \|X_i f\|_{p, U} + \sum_{i, j=1}^{2n} \|X_i X_j f\|_{p, U}.$$

Теорема 3. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ на $\mathbb{H}^1$, $w \in W_p^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\|D_h w - \lambda J\|_{p, \Omega} \leq C \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 [\|\mathcal{S}w\|_{p, \Omega} + \text{diam } \Omega \|\mathcal{T}w\|_{p, \Omega}].$$

Если дополнительно $(D_h w - (D_h w)^t)_\Omega = 0$, то

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq D \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 [\|\mathcal{S}w\|_{p,\Omega} + \text{diam } \Omega \|\mathcal{T}w\|_{p,\Omega}].$$

Константы C и D не зависят от отображения w и области Ω .

Для доказательства аналогов неравенства Корна применим результаты работы Н. Н. Романовского [19] про коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов на областях $\mathbb{H}^n$, удовлетворяющих условию конуса, и работы [20] на областях Джона групп Карно. Для этого оператор должен быть однородным с постоянными коэффициентами и конечномерным ядром. В случае теорем 1 и 2 операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}$ однородные первого порядка и с постоянными коэффициентами. Необходимо только доказать, что их ядра конечномерны. Этому посвящен § 2. В случае теоремы 3 невозможно действовать напрямую, будем доказывать интегральное представление типа Соболева и использовать аналогии оценок для потенциалов Рисса и Михлина. Полученную в результате локальную оценку слабого типа надо будет перенести на области Джона (см. п. 3.4).

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

Основа доказательств теорем 1 и 2 — теорема 1 из [20] про коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов на областях Джона групп Карно.

Теорема 4. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ в $\mathbb{H}^n$ и $\mathbf{Q}$ — однородный дифференциальный оператор порядка 1 с постоянными коэффициентами и конечномерным ядром, действующий на отображениях из Ω в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда существуют проектор Π на ядро оператора $\mathbf{Q}$ и число $l \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\|D_h(u - \Pi u)\|_{p,\Omega} \leq C \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu-1+l} \|\mathbf{Q}u\|_{p,\Omega}$$

для всех функций $u \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$. Здесь константа $C > 0$ не зависит от u , Ω , α и β .

В данном случае $\ker \mathbf{Q}$ — подпространство в пространстве полиномов и число l — максимальная однородная степень этих полиномов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если теорема 4 установлена хотя бы для одного проекционного оператора, то она будет выполняться и для любого другого проекционного оператора (см., например, [21, гл. 4, теорема 3.2], где это утверждение доказывается в евклидовом случае). Действительно, пусть Π_1 — другой проекционный оператор на ядро $\mathbf{Q}$. В силу того, что $u - \Pi_1 u = u - \Pi u - \Pi_1 u + \Pi u = u - \Pi u - \Pi_1(u - \Pi u)$, получаем

$$\|D_h(u - \Pi_1 u)\|_{p,\Omega} \leq \|(1 + C\|\Pi_1\|)D_h(u - \Pi u)\|_{p,\Omega} \leq C\|\mathbf{Q}u\|_{p,\Omega}.$$

Поскольку дифференциальные операторы $\mathcal{S}$ (для всех n) и $\mathcal{Q}$ (для $n > 1$) однородны степени 1 с постоянными коэффициентами, для применения теоремы 4 надо показать конечномерность их ядер.

Будем использовать следующее свойство любых базисных векторных полей:

$$0 = [X, [X, Y]] = X(XY - YX) - (YX - XY)X = X^2Y - 2XYX + YX^2. \quad (1)$$

Напомним, что $\mathcal{S}u = \frac{1}{2}(D_h u + (D_h u)^t)$ для $u \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{2n})$, $U \subset \mathbb{H}^n$.

Предложение 1. Ядро оператора $\mathcal{S}$ конечномерно на $\mathbb{H}^n$:

$$\ker \mathcal{S} = \{a + Ax + tc - 2\langle c, x \rangle Jx : \mathbf{x} = (x, t) \in \mathbb{H}^n, a, c \in \mathbb{R}^{2n}, A + A^t = 0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \ker \mathcal{S}$. Тогда

$$X_i u_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad X_i u_j = -X_j u_i, \quad i \neq j.$$

Покажем, что $Tu = X_{2n+1}u = \text{const}$. Для всех $i \leq 2n$ и $j \leq n$ таких, что $i \neq j, j+n$, имеем

$$\begin{aligned} Tu_i &= -\frac{1}{4}(X_j X_{j+n} u_i - X_{j+n} X_j u_i) = \frac{1}{4} X_i (X_j u_{j+n} - X_{j+n} u_j) = \frac{1}{2} X_i X_j u_{j+n} \\ &= -\frac{1}{2} X_j X_{j+n} u_i = \frac{1}{2} X_{j+n} X_j u_i. \end{aligned}$$

Для $j \leq n$ выполнено

$$\begin{aligned} Tu_j &= -\frac{1}{4}(X_j X_{j+n} u_j - X_{j+n} X_j u_j) = -\frac{1}{4} X_j X_{j+n} u_j = \frac{1}{4} X_j^2 u_{j+n}, \\ Tu_{j+n} &= -\frac{1}{4}(X_j X_{j+n} u_{j+n} - X_{j+n} X_j u_{j+n}) = \frac{1}{4} X_{j+n} X_j u_{j+n} = -\frac{1}{4} X_{j+n}^2 u_j. \end{aligned}$$

Очевидно, что $X_i T u_i = T X_i u_i = 0$ для всех i . Для $i \neq j, j+n$ имеем $X_j T u_i = X_{j+n} T u_i = 0$, поскольку

$$\begin{aligned} X_j T u_i &= \frac{1}{2} X_j X_{j+n} X_j u_i = -X_i T u_j = \frac{1}{4} X_i X_j X_{j+n} u_j = -\frac{1}{4} X_j X_{j+n} X_j u_i, \\ X_{j+n} T u_i &= -\frac{X_{j+n} X_j X_{j+n} u_i}{2} = -X_i T u_{j+n} \\ &= -\frac{X_i X_{j+n} X_j u_{j+n}}{4} = \frac{X_{j+n} X_j X_{j+n} u_i}{4}. \end{aligned}$$

Осталось показать, что $X_{j+n} T u_j = -X_j T u_{j+n} = 0$. Простые вычисления дают

$$X_{j+n} T u_j = -\frac{1}{4} X_{j+n} X_j X_{j+n} u_j = -X_j T u_{j+n} = \frac{1}{4} X_j X_{j+n}^2 u_j.$$

Из соотношения (1) следует, что

$$X_j X_{j+n}^2 u_j = 2X_{j+n} X_j X_{j+n} u_j - X_{j+n}^2 X_j u_j = 2X_{j+n} X_j X_{j+n} u_j,$$

откуда $X_{j+n} T u_j = -X_j T u_{j+n} = 0$. Таким образом, $Tu = c$, $c \in \mathbb{R}^{2n}$.

Далее покажем, что $v = tc - 2\langle c, x \rangle Jx \in \ker \mathcal{S}$. Действительно,

$$\begin{aligned} X_i v_j &= 2c_j (Jx)_i - 2X_i (\langle c, x \rangle) (Jx)_j - 2\langle c, x \rangle X_i (Jx)_j \\ &= 2c_j (Jx)_i - 2c_i (Jx)_j - 2\langle c, x \rangle X_i (Jx)_j = -X_j v_i \quad \text{для всех } i, j \leq 2n, \end{aligned}$$

$$\text{так как } X_i (Jx)_j = \begin{cases} -1, & j = i + n, \\ 1, & j = i - n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Окончательно $u - v \in \ker \mathcal{S}$ и отображение $u - v$ не зависит от t . Попадаем в евклидов случай, следовательно, $u - v = a + Ax$, $a \in \mathbb{R}^{2n}$, $A + A^t = 0$, A — кососимметричная матрица. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отображение $v = tc - 2\langle c, x \rangle Jx \in \ker \mathcal{S}$ является примером того, что неравенство

$$\|D_h v\|_{p,\Omega} \leq C \|\mathcal{S}v\|_{p,\Omega}$$

не выполняется при условии

$$\int_{\Omega} (D_h v(\mathbf{x}) - (D_h v(\mathbf{x}))^t) d\mathbf{x} = 0.$$

Последнее имеет место для всех областей Ω , симметричных относительно вертикальной оси: $(x, t) \in \Omega \Leftrightarrow (-x, t) \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. (1) Пусть $u \in W_{p,O}^1(\Omega, \mathbb{R}^{2n})$. Рассмотрим шар $B(a, R)$ настолько большой, что $\Omega \subset B(a, R) \setminus B(a, R/2)$. Пусть Π_1 — проектор на ядро $\mathcal{S}$, причем $\Pi_1 : W_p^1(B(a, R/2), \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \ker \mathcal{S}$. В силу замечания 1 теорема 4 будет верна и для проектора Π_1 . Однако $\Pi_1 u = 0$, поскольку $\Omega \cap B(a, R/2) = \emptyset$. Применяя теорему 4 для области Джона $B(a, R)$, получаем нужную нам оценку:

$$\|D_h u\|_{p,\Omega} = \|D_h(u - \Pi_1 u)\|_{p, \text{Box}(a,R)} \leq C \|\mathcal{S}u\|_{p, B(a,R)} = C \|\mathcal{S}u\|_{p,\Omega}.$$

(2) Пусть Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$, $u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^{2n})$. В силу теоремы 4 имеем

$$\|D_h u\|_{p,\Omega} \leq \|D_h(u - \Pi u)\|_{p,\Omega} + \|D_h \Pi u\|_{p,\Omega} \leq C_1 \|\mathcal{S}u\|_{p,\Omega} + C_2 \|u\|_{p,\Omega}.$$

Отметим, что здесь $C_1 = C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+1}$, поскольку в $\ker \mathcal{S}$ входят полиномы второго порядка и $l = 2$, а $C_2 = C\|\Pi\|$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассматриваем $n > 1$, область Джона $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ и отображение $u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^{2n})$, $p > 1$. В случае $n > 1$ ядро оператора $\mathcal{Q}$ конечномерно и совпадает с горизонтальными координатными функциями Ли алгебры группы изометрий на $\mathbb{H}^n$:

$$\ker \mathcal{Q} = \{a + Kz : \mathbf{x} = (z, t) \in \mathbb{H}^n, a \in \mathbb{C}^n, K + K^* = 0\}.$$

(Здесь использована комплексная форма записи: $z \in \mathbb{C}^n$, $z_k = x_k + ix_{k+n}$, $k = 1, \dots, n$.)

Доказательство данного факта приведено в лемме 4 из [18]. Также его нетрудно получить, зная явный вид ядра оператора $\mathcal{S}$ из предложения 1.

Применим теорему 4 к отображению w на области Ω . Тогда найдется проектор Π на $\ker \mathcal{Q}$, следовательно, $D_h \Pi w$ — постоянная кососимметричная матрица A , удовлетворяющая $A + JAJ = 0$. (Известно, что всякой кососимметрической $((2n) \times (2n))$ -матрице A соответствует $(n \times n)$ -косоэрмитова матрица тогда и только тогда, когда $A + JAJ = 0$.) Тем самым

$$\|D_h w - A\|_{p,\Omega} \leq C \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} \|\mathcal{Q}w\|_{p,\Omega}.$$

Отметим, что в данном случае $l = 1$, так как в $\ker \mathcal{Q}$ входят полиномы не выше первого порядка.

Пусть $w \in W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^{2n})$ такое, что $(D_h w - (D_h w)^t)_{\Omega} = 0$. Тогда

$$\|D_h w - (D_h w)_{\Omega}\| \leq \|D_h w - A\|_{p,\Omega} + \|(D_h w)_{\Omega} - A\|_{p,\Omega} \leq 2\|D_h w - A\|_{p,\Omega},$$

$$\begin{aligned} \|D_h w - (D_h w)^t\|_{p,\Omega} &= \|D_h w - (D_h w)^t - (D_h w - (D_h w)^t)_{\Omega}\|_{p,\Omega} \\ &\leq 2\|D_h w - (D_h w)_{\Omega}\|_{p,\Omega} \leq 4\|D_h w - A\|_{p,\Omega}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq \|\mathcal{S}w\|_{p,\Omega} + \frac{\|D_h w - (D_h w)^t\|_{p,\Omega}}{2} \leq \|\mathcal{Q}w\|_{p,\Omega} + 2C \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} \|\mathcal{Q}w\|_{p,\Omega}. \quad \square$$

§ 3. Доказательство теоремы 3

Прежде чем доказывать теорему 3, покажем, как строится оператор $\mathcal{Q}$ при $n = 1$, и найдем его ядро. Далее построим интегральное представление вида $u = Pu + \int K \mathcal{Q}u$, где Pu — полином второго порядка и ядро K имеет нужную нам гладкость. Затем покажем, что Pu можно представить в виде $\Pi u + \int K' \mathcal{Q}u$, где Πu — проектор на ядро $\mathcal{Q}$. Таким образом, получаем локальную версию коэрцитивной оценки. Остается перейти к областям Джона.

В данном параграфе будем использовать следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = (x, y, t) \in \mathbb{H}^1 = \mathbb{H}, \quad X = X_1, \quad Y = X_2, \quad T = X_3.$$

3.1. Построение оператора $\mathcal{Q}$ на $\mathbb{H}^1$. Однопараметрическая группа отображений — это семейство отображений $F_s : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $s > 0$, такое, что $F_0 = \text{id}$ и $F_s \circ F_t = F_{s+t}$ для всех $s, t > 0$.

Векторное поле $V \in C^1(\mathbb{H}, T\mathbb{H})$ называется *инфинитезимальным генератором однопараметрической группы* $F_s(\mathbf{x}) = F(s, \mathbf{x})$, если

$$\frac{d}{ds} F = V(F).$$

Предложение 2 [11, теорема 5]. C^1 -векторное поле вида

$$V = -\frac{1}{4}(Yp)X + \frac{1}{4}(Xp)Y + pT$$

(где p — произвольная функция) генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований. Обратно, всякое C^1 -гладкое векторное поле V , которое генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований, обязательно имеет такой вид с $p = \langle \omega, V \rangle$, где $\omega = -2y dx + 2x dy + dt$ — контактная форма.

Следствие. Пусть $C_{\mathbb{H}}^2$ -гладкое векторное поле $V = uX + vY + pT$ порождает контактный поток на односвязной области. Тогда

$$YXv - 2XYv - X^2u = 0, \quad 2YXu - XYu + Y^2v = 0. \quad (2)$$

Соотношения (2) дают выражения для $\mathcal{I}$.

Доказательство. В силу предложения 2 функции u и v определяют горизонтальные производные функции p : $Xp = 4v$, $Yp = -4u$. Из [22, теорема 2.9.8] (см. также [23]) вытекает, что функции u и v должны удовлетворять следующим условиям:

$$X^2(-4u) - 2XY(4v) + YX(4v) = 0, \quad Y^2(4v) - 2YX(-4u) + XY(-4u) = 0,$$

которые эквивалентны соотношениям (2). $\square$

Предложение 3. Ядро оператора $\mathcal{Q}$ конечномерно и совпадает с горизонтальными координатными функциями Ли алгебры группы изометрий на $\mathbb{H}^1$:

$$\ker \mathcal{Q} = \left\{ a + \alpha \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} : \mathbf{x} = (x, y, t) \in \mathbb{H}, a \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Доказательство. Напомним, что

$$\mathcal{Q}w = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(D_h w + (D_h w)^t) \\ YXv - 2XYv - X^2u \\ 2YXu - XYu + Y^2v \end{pmatrix}.$$

Отображение $w = (u, v) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит $\ker \mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$Xu = 0, \quad Yv = 0, \quad Yu + Xv = 0, \quad YXv = 0, \quad XYu = 0.$$

Положим $\varphi = Yu = -Xv$. Имеем

$$X\varphi = XYu = 0, \quad Y\varphi = -YXv = 0,$$

поэтому $\varphi = c_0 = \text{const}$. Осталось вычислить u и v . Система

$$\begin{cases} Xu = 0, \\ Yu = \varphi = c_0, \end{cases} \quad \begin{cases} Xv = -\varphi = -c_0, \\ Yv = 0 \end{cases}$$

влечет $u = c_1 + c_0y$, $v = c_2 - c_0x$. $\square$

3.2. Интегральное представление функции типа Соболева. Рассмотрим норму $d_\infty(\mathbf{x}) = \sup\{|x_1|, |x_2|, \sqrt{|x_3|}\}$ для произвольной точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$. Норма d_∞ определяет квазиметрику $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_\infty(\mathbf{x}^{-1} \cdot \mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$. Квазиметрика d_∞ однородна, левоинвариантна и эквивалентна метрике Карно — Каратеодори (см., например, [24]).

Обозначим через $\text{Box}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} : d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$ шар в квазиметрике d_∞ . Очевидно, что $|\text{Box}(\mathbf{a}, r)| = r^4 |\text{Box}(\mathbf{0}, 1)|$, где $|\cdot|$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^3$.

Теорема 5. Пусть $\varkappa = 2\sqrt{6} + \frac{3}{2}$. Существует проектор $\Pi : L_1(\text{Box}(\mathbf{0}, 1); \mathbb{R}^2) \rightarrow \ker \mathcal{Q}$ такой, что для всякой функции $w \in C^\infty(\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa); \mathbb{R}^2)$ выполняется интегральное представление

$$w(\mathbf{x}) = \Pi w(\mathbf{x}) + \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} K(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathcal{Q}w(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

для всех точек $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$, где

$$K(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathcal{Q}w(\mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathcal{Q}w(\mathbf{y}) + M(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) \mathcal{S}w(\mathbf{y}) + N(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) \mathcal{T}w(\mathbf{y})$$

с $L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$, $\text{supp } L(\cdot, \mathbf{x}) \subseteq \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)$ для $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$; $M, N \in C^\infty(\mathbb{H} \setminus \{\mathbf{0}\})$, $\text{supp } M, \text{supp } N \subseteq \overline{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)}$, и

$$|X_{i_1} \dots X_{i_k} M(\mathbf{x})| \leq Cd(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-k-3}, \quad |X_{i_1} \dots X_{i_k} N(\mathbf{x})| \leq Cd(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-k-2}$$

для всякого мультииндекса $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Основой доказательства теоремы 5 является интегральное представление функции из [19] (см. также [20]), в котором функция представляется в виде полинома первого порядка и интеграла от производных второго порядка. Для формулировки данного результата приведем необходимые определения. Пусть $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 2$ обозначают веса векторных полей X_1, X_2, X_3 . Мультииндексу $I = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2, 3\}^k$ соответствуют дифференциальный оператор $X^I = X_{i_1} \dots X_{i_k}$, полином $\mathbf{x}^I = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ и вес $d(I) = \sum_{j=1}^k \sigma_{i_j}$.

Дифференциальный оператор X^I и полином $\mathbf{x}^I$ однородны степени $d(I)$, т. е. $X^I(f(\delta_s \mathbf{x})) = s^{d(I)}(X^I f)(\delta_s \mathbf{x})$ и $(\delta_s \mathbf{x})^I = s^{d(I)} \mathbf{x}^I$, где $\delta_s \mathbf{x} = (sx, sy, s^2t)$ — растяжение.

Мультииндексом с индексом h всегда будем обозначать горизонтальный мультииндекс $I_h = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$. Очевидно, что длина горизонтального мультииндекса совпадает с его весом: $d(I_h) = k$.

Функция P называется *полиномом* на $\mathbb{H}$, если $P(\mathbf{x}) = \sum_I a_I \mathbf{x}^I$, где суммирование ведется по конечному числу мультииндексов. Для полинома P определим его (*однородную*) *степень* как $\max\{d(I) : a_I \neq 0\}$. Обозначим символом $\mathcal{P}_k$ линейное пространство полиномов на $\mathbb{H}$ однородной степени $\leq k$.

Определим проектор из пространства функций $L_1(\text{Box}(\mathbf{0}, 1))$ на полиномы первого порядка $\mathcal{P}_1$ (см. [20, с. 73]):

$$P_1 u(\mathbf{x}) = \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x}_0) \left(\varphi(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^2 X_{i, \mathbf{x}_0} ((\mathbf{x}_0^{-1} \mathbf{x})_i \varphi(\mathbf{x}_0)) \right) d\mathbf{x}_0, \quad (3)$$

где

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{H}), \quad \text{supp } \varphi \subseteq \overline{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \setminus \text{Box}(\mathbf{0}, 1/2),$$

$$\int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad 0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 2.$$

Для доказательства интегрального представления для оператора $\mathcal{Q}$ используем интегральное представление типа Соболева из [19, теорема 3], где оно сформулировано для звездных областей. В нужном нам виде на множествах Box эти представления можно найти в [20, теорема 3].

Теорема 6. Пусть даны число $\varkappa = 2\sqrt{6} + \frac{3}{2}$ и функция $u \in C^\infty(\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa))$. Тогда для всякой точки $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$ выполняется интегральное представление

$$u(\mathbf{x}) = P_1 u(\mathbf{x}) + \sum_{d(I_h)=2} \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} X^{I_h} u(\mathbf{y}) \Psi_{I_h}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{y},$$

где P_{l-1} — проектор (3), $\Psi_{I_h}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = K_{I_h}(\mathbf{y}^{-1} \mathbf{x}) + \Phi_{I_h}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ с $\Phi_{I_h} \in C^\infty(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$, $\text{supp } \Phi_{I_h}(\cdot, \mathbf{x}) \subseteq \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)$ для $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$; $K_{I_h} \in C^\infty(\mathbb{H} \setminus \{\mathbf{0}\})$, $\text{supp } K_{I_h} \subseteq \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$, и

$$|X^J K_{I_h}(\mathbf{x})| \leq C_{d(J)} d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-d(J)-2} \quad \text{для любого мультииндекса } J.$$

Здесь $C_{d(J)} > 0$ — константа, не зависящая от функции u и точки $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$.

Замечание 3. В исходной формулировке теоремы 3 из [20] $\varkappa = c + c^2 + 2c^3$, где c — константа в обобщенном неравенстве треугольника квазиметрики d_∞ . На группе Гейзенберга $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$, поэтому $\varkappa = 2\sqrt{6} + \frac{3}{2}$. Покажем, что $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq$

$c(d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_\infty(\mathbf{z}, \mathbf{y}))$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{H}$ с константой $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Действительно, иначе можно рассмотреть точки $\mathbf{x}' = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{z}^{-1} \mathbf{y}$, $\mathbf{z}' = \mathbf{0}$.

Очевидно, что

$$|(\mathbf{x}^{-1} \mathbf{y})_i| = |y_i - x_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq d_\infty(\mathbf{x}) + d_\infty(\mathbf{y}), \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{x}^{-1} \mathbf{y})_3|^{1/2} &= |y_3 - x_3 + 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1|^{1/2} \leq |x_1^2 + x_2^2 + |x_3| + y_1^2 + y_2^2 + |y_3||^{1/2} \\ &\leq \sqrt{3}(d_\infty(\mathbf{x})^2 + d_\infty(\mathbf{y})^2)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}(d_\infty(\mathbf{x}) + d_\infty(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Покажем, что константа $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$ точна. Для этого достаточно рассмотреть точки $\mathbf{x} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{y} = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{z} = (0, 0, 0)$. Тогда $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} = (2, 0, 6)$ и $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 = \sqrt{\frac{3}{2}}(d_\infty(\mathbf{x}) + d_\infty(\mathbf{y}))$.

Для доказательства теоремы 5 применим интегральное представление типа Соболева из теоремы 6. Для этого должны установить два факта. Во-первых, покажем, что производные второго порядка от w могут быть вычислены через $\mathcal{Q}w$ (лемма 1). Во-вторых, покажем, что P_1w есть сумма двух частей, одна из которых — проектор на ядро $\mathcal{Q}$, а вторая — интеграл от $\mathcal{Q}w$ (лемма 2).

Для всякого отображения $F = (f_1, \dots, f_s) : \Omega \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^s$ достаточной гладкости введем следующие обозначения: $\nabla_{\mathcal{L}} F = \{X_i f_j : i = 1, 2, j = 1, \dots, s\}$ — все производные первого порядка, $\nabla_{\mathcal{L}}^2 F = \{X_i X_k f_j : i, k = 1, 2, j = 1, \dots, s\}$ — все производные второго порядка.

Лемма 1. Пусть Ω — область в $\mathbb{H}$. Тогда $\nabla_{\mathcal{L}}^2 w$ — линейная комбинация $\mathcal{T}w$ и $\nabla_{\mathcal{L}} \mathcal{S}w$ для всякого $w = (u, v) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $p \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $w = (u, v) : \Omega \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса $W_p^2(\Omega)$. Обозначим

$$p_1 = Xu, \quad p_2 = \frac{1}{2}(Xv + Yu), \quad p_3 = Yv,$$

$$p_4 = YXv - 2XYv - X^2u, \quad p_5 = 2YXu - XYu + Y^2v.$$

Надо показать, что все производные второго порядка функций u и v могут быть вычислены через $p_1, \dots, p_5$ и их производные. Действительно,

$$X^2u = Xp_1, \quad XYu = 2YXu + Y^2v - p_5 = 2Yp_1 + Yp_3 - p_5,$$

$$YXu = Yp_1, \quad YXv = p_4 + 2XYv + X^2u = p_4 + 2Xp_3 + Xp_1,$$

$$XYv = Xp_3, \quad X^2v = X(2p_2 - Yu) = 2Xp_2 - 2Yp_1 - Yp_3 + p_5,$$

$$Y^2v = Yp_3, \quad Y^2u = Y(2p_2 - Xv) = 2Yp_2 - p_4 - 2Xp_3 - Xp_1. \quad \square$$

Лемма 2. Существует проектор Π из $L_1(\text{Box}(\mathbf{0}, 1); \mathbb{R}^2)$ на $\ker \mathcal{Q}$ такой, что

$$P_1w(\mathbf{x}) = \Pi w(\mathbf{x}) + \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{S}w(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1),$$

для всякого отображения $w \in C^\infty(\text{Box}(\mathbf{0}, 1); \mathbb{R}^2)$, где Θ C^∞ -гладкое и $\text{supp } \Theta(\mathbf{x}, \cdot) \subseteq \overline{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)}$ для всех $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (3) по частям, получаем

$$P_1w(\mathbf{x}) = \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} w(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} D_hw(\mathbf{y}) \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

где

$$D_hw = \begin{pmatrix} X_1u & X_2u \\ X_1v & X_2v \end{pmatrix} = \mathcal{S}w + \frac{D_hw - (D_hw)^t}{2}.$$

Положим

$$\Pi_0w(\mathbf{x}) = \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} w(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

$$\Pi_1 w(\mathbf{x}) = \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \frac{D_h w(\mathbf{y}) - (D_h w(\mathbf{y}))^t}{2} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

В силу того, что

$$\frac{D_h w - (D_h w)^t}{2} = \frac{Yu - Xv}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_1 w(\mathbf{x}) = \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \frac{(Yu(\mathbf{y}) - Xv(\mathbf{y}))\varphi(\mathbf{y})}{2} \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} d\mathbf{y}.$$

Обозначим $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \varphi(\mathbf{y})$ и $\mathbf{\Pi}w(\mathbf{x}) = \Pi_0 w(\mathbf{x}) + \Pi_1 w(\mathbf{x})$. При этом Θ C^∞ -гладкое и $\text{supp } \Theta(\mathbf{x}, \cdot) \subseteq \overline{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)}$ для всех $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$. Осталось показать, что $\mathbf{\Pi}$ действительно проектор на ядро $\mathcal{Q}$. Очевидно, что $\Pi_0 w = \text{const} \in \ker \mathcal{Q}$ и

$$\mathcal{Q}\Pi_1 w = \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \frac{(Yu(\mathbf{y}) - Xv(\mathbf{y}))\varphi(\mathbf{y})}{2} \mathcal{Q} \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} d\mathbf{y} = 0,$$

поскольку $\begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} \in \ker \mathcal{Q}$. Окончательно свойства функции φ доказывают равенство $\mathbf{\Pi}w = w$ для всех $w \in \ker \mathcal{Q}$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Рассмотрим $w \in C^\infty(\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa), \mathbb{R}^2)$. Теорема 6 и леммы 1, 2 влекут

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) - \mathbf{\Pi}w(\mathbf{x}) &= \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \mathcal{S}w(\mathbf{y})\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} \nabla_{\mathcal{L}}^2 w(\mathbf{y})\Psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} (\mathcal{Q}w(\mathbf{y})L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{S}w(\mathbf{y})M(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) + \mathcal{T}w(\mathbf{y})N(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x})) d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

где $L \in C^\infty(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$, $\text{supp } L(\cdot, \mathbf{x}) \subseteq \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)$ для $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$; $M, N \in C^\infty(\mathbb{H} \setminus \{\mathbf{0}\})$, $\text{supp } M_1, \text{supp } N_1 \subseteq \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$, и

$$|X^I M(\mathbf{x})| \leq Cd(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-d(I)-3}, \quad |X^I N(\mathbf{x})| \leq Cd(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-d(I)-2}$$

для всякого мультииндекса I . Здесь M — линейная комбинация слагаемых вида $X_s^R K_{I_h}$, $s = 1, 2$, $d(I_h) = 2$ ($X_1^R = -\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}$, $X_2^R = -\frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}$ — правоинвариантные векторные поля) и N — линейная комбинация слагаемых вида K_{I_h} , $d(I_h) = 2$. $\square$

3.3. Локальный вариант неравенства Корна. Для доказательства локального неравенства используем оценки для сингулярных интегралов. Определим следующий дробный интегральный оператор (аналог потенциала Рисса):

$$\mathcal{R}^\gamma v(x) = \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} v(y) d_\infty(x, y)^{\gamma-4} dy, \quad 0 \leq v \in L_p(\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)), \quad \gamma > 0.$$

Лемма 3. Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < \gamma < 4$. Тогда существует константа C такая, что для всякой неотрицательной функции $v \in L_p(\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa))$ выполняется следующее неравенство:

$$\|\mathcal{R}^\gamma v\|_{q, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} \leq C \|v\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)},$$

где

- 1) $p \leq q \leq \frac{4p}{4-\gamma p}$ для $\gamma p < 4$;
- 2) $p \leq q < \infty$ для $\gamma p = 4$;
- 3) $p \leq q \leq \infty$ для $\gamma p > 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\gamma p < 4$ лемма 3 доказана в [25, теорема 10]. В случае $\gamma p > 4$ используем неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}^\gamma v\|_{\infty, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} &\leq C \|v\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} \sup_{x \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \left(\int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} d_\infty(x, y)^{p'(\gamma-4)} dy \right)^{1/p'} \\ &\leq C \|v\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} \quad (p' = p/(p-1)). \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть случай $\gamma p = 4$. Пусть $q > \frac{4}{4-\gamma}$. Положим $p_1 = \frac{4q}{4+\gamma q}$. Тогда $1 < p_1 < p$, $\gamma p_1 < 4$, $\frac{4p_1}{4-\gamma p_1} = q$ и

$$\|\mathcal{R}^\gamma v\|_{q, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \leq C \|v\|_{p_1, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} \leq C \|v\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)}.$$

В случае $p \leq q \leq \frac{4}{4-\gamma}$ возьмем любой $q_1 > \frac{4}{4-\gamma}$. Тогда

$$\|\mathcal{R}^\gamma v\|_{q, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \leq C \|\mathcal{R}^\gamma v\|_{q_1, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \leq C \|v\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)}. \quad \square$$

В случае $\gamma = 0$ используем следующую лемму из [20]. Определим для функции φ оператор $E\varphi(\mathbf{x}) = 16\varphi(\delta_2 \mathbf{x})$.

Лемма 4 [20, лемма 3]. Пусть функция η удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $\eta \in C^\infty(\mathbb{H})$, $\text{supp } \eta \subseteq \overline{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \setminus \text{Box}(\mathbf{0}, 1/4)$;
- (ii) $\int_{\mathbb{H}} \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$.

Для $v \in L_p(\mathbb{H})$, $1 < p < \infty$, положим $K(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} E^k \eta(\mathbf{x})$ и

$$\mathcal{K}_\varepsilon v(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{H} \setminus \text{Box}(\mathbf{x}, \varepsilon)} K(\mathbf{y}^{-1} \mathbf{x}) v(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Тогда

$$\|\mathcal{K}_\varepsilon v\|_p \leq A_p \|v\|_p$$

где A_p не зависит от v и ε . Более того, для всякой функции $v \in L_p(\mathbb{H})$ существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\varepsilon v \stackrel{L_p}{=} \mathcal{K} v$ и $\|\mathcal{K} v\|_p \leq A_p \|v\|_p$.

Предложение 4. Пусть $1 < p < \infty$ и $w \in W_p^2(\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa); \mathbb{R}^2)$. Тогда

$$\|D_h(w - \Pi w)\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \leq C \|\mathcal{Q} w\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)}.$$

Поскольку $\Pi w \in \ker \mathcal{Q}$, то $D_h \Pi w = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha J$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать предложение 4 для гладких отображений. Далее, используя стандартную технику, можно перейти к соболевским отображениям (плотность гладких отображений в соболевских классах см., например, в [20, гл. 2.3]).

В силу теоремы 5 имеем

$$\begin{aligned} D_h(w(\mathbf{x}) - \Pi w(\mathbf{x})) &= \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} (\nabla_{\mathcal{L}, \mathbf{x}} L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathcal{Q}w(\mathbf{y}) + \nabla_{\mathcal{L}, \mathbf{x}} M(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) \mathcal{S}w(\mathbf{y}) \\ &\quad + \nabla_{\mathcal{L}, \mathbf{x}} N(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) \mathcal{T}w(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = J_1 w(\mathbf{x}) + J_2 w(\mathbf{x}) + J_3 w(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

для всех $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$, где $\nabla_{\mathcal{L}, \mathbf{x}} L$ — гладкое ядро, $|\nabla_{\mathcal{L}, \mathbf{x}} M(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x})| \leq Cd(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-4}$ и $|\nabla_{\mathcal{L}, \mathbf{x}} N_i(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x})| \leq Cd(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-3}$. В силу гладкости $\nabla_{\mathcal{L}, \mathbf{x}} L$ получаем

$$\|J_1 w\|_{\infty, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \leq C \|\mathcal{Q}w\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)}.$$

Лемма 3 с $\gamma = 1$ влечет

$$\|J_3 w\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \leq C \|\mathcal{T}w\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)}.$$

Остается оценить $\|J_2 w\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)}$.

В силу построения все элементы ядра M являются линейными комбинациями следующих элементов:

$$-X_j^R K_{I_h}, \quad j = 1, 2, \quad d(I_h) = 2,$$

где K_{I_h} — ядра из теоремы 6. Из [20, доказательство теоремы 2] известно, что

$$K_{I_h} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} E^k \zeta_{I_h^t}$$

с $\zeta_{I_h^t} \in C^\infty$ и $\text{supp } \zeta_{I_h^t} \subseteq \overline{\text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \setminus \text{Box}(\mathbf{0}, 1/4)$ (см. [20, лемма 1]). Здесь $I_h^t = (i_2, i_1)$ для мультииндекса $I_h = (i_1, i_2) \in \{1, 2\}^2$.

Поскольку $X_i E^k = 2^k E^k X_i$ и $X_i^R E^k = 2^k E^k X_i^R$, $i = 1, 2$, ядро $\nabla_{\mathcal{L}} M$ — линейная комбинация следующих элементов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E^k X_s X_j^{h, R} \zeta_{I_h^t}, \quad s = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad d(I_h) = 2.$$

Следовательно, оператор J_2 удовлетворяет всем условиям леммы 4 и

$$\|J_2 w\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, 1)} \leq C \|\mathcal{S}w\|_{p, \text{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)}. \quad \square$$

3.4. Неравенство Корна на областях Джона. Теорема 3 на областях Джона следует из локальной оценки слабого типа (предложение 4). Для получения глобального результата используем известную технику (см., например, [26–28]). Этот метод основан на хорошем покрытии области Джона шарами. В отличие от известных результатов у нас справа стоит не одна функция, а две: $\mathcal{S}w$ и $\mathcal{T}w$. Поэтому напрямую использовать известные результаты не получится. Также в наших доказательствах отслеживаем точную зависимость от коэффициентов Джона α и β .

Переход от локального результата к глобальному никак не использует групповую структуру $\mathbb{H}$, поэтому в этом пункте будем рассматривать метрическое

пространство $\mathbb{X}$ с метрикой d и борелевской мерой μ . Предполагаем также, что μ удовлетворяет *условию удвоения*, т. е. $\mu(2B) \leq C_d \mu(B)$ для всякого шара $B \subset \mathbb{X}$. Стандартное итерирование условия удвоения дает $\mu(B) \leq C_b \left(\frac{r}{r'}\right)^\nu \mu(B')$ для всякого шара B радиуса r и $B' = B(x', r')$, $x' \in B$, $r' \leq r$. Показатель ν зависит только от константы условия удвоения C_d . Если Ω — ограниченное множество $\mathbb{X}$, то $\mu(B(x, r)) \geq \frac{\mu(\Omega)}{(2 \operatorname{diam} \Omega)^\nu} r^\nu$ для всякого $x \in \Omega$ и $r \leq \operatorname{diam} \Omega$ [29, лемма 14.6].

Начнем с формулировки двух предварительных лемм. Первая лемма является вариантом известного результата (см., например, [20, 28, 30]).

Лемма 5 [20, лемма 5]. *Предположим, что $1 \leq p < \infty$, $h > 1$ и Ω — область в $\mathbb{X}$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство шаров в Ω , и пусть для каждого шара $B \in \mathcal{F}$ задано неотрицательное число a_B . Тогда*

$$\left\| \sum_{B \in \mathcal{F}} a_B \chi_{hB} \right\|_{p, \Omega} \leq C h^\nu p \left\| \sum_{B \in \mathcal{F}} a_B \chi_B \right\|_{p, \Omega},$$

где C не зависит от h , p и Ω .

Поскольку определение области Джона дается только в метрических терминах, не будем его приводить в случае метрических пространств. Следующая лемма — известный результат о том, что области Джона удовлетворяют так называемому цепному условию Бомана (см., например, [20, 31]). Здесь и далее будем обозначать $d_\Omega(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ для точки x области Ω .

Лемма 6 [20, лемма 6]. *Пусть $\varkappa \geq 1$ и Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ с выделенной точкой $x_0 \in \Omega$, $B_0 = B(x_0, \frac{d_\Omega(x_0)}{\varkappa})$. Тогда существует счетное семейство шаров $\mathcal{F}$ такое, что*

1) $B_0 \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} \frac{1}{2}B = \Omega$, $\varkappa B \subset \Omega$ для всех $B \in \mathcal{F}$, $\{\frac{1}{10}B\}_{B \in \mathcal{F}}$ — набор попарно не пересекающихся шаров;

2) для всякого шара $B \in \mathcal{F}$ существует натуральное число $m = m(B)$ и цепь $\{B_0, \dots, B_m = B\} \subset \mathcal{F}$ удовлетворяет следующим свойствам для $i = 0, \dots, m-1$:

(i) $\frac{2\varkappa-1}{2\varkappa+1}r(B_i) \leq r(B_{i+1}) \leq \frac{2\varkappa+1}{2\varkappa-1}r(B_i)$;

(ii) $B_j \cap B_{j+1}$ содержит шар G_j радиуса $\frac{1}{2} \min\{r(B_j), r(B_{j+1})\}$;

(iii) $B \subset h_1 G_j$ и $B \subset h_2 B_j$ с $h_1 = \frac{\beta}{\alpha}(2\varkappa+21)$, $h_2 = \frac{\beta}{\alpha}(\varkappa+10)$;

3) $\{B_0, \dots, B_j\}$ — цепь шаров для шара B_j , удовлетворяющая свойствам (i)–(iii), $j = 0, \dots, m$.

Пусть $\mathcal{P}$ — векторное пространство $\mathbb{R}^s$ -значных функций на $\mathbb{X}$ со следующими свойствами:

$$\sup_{x \in sB} |P(x)| \leq C s^l \sup_{x \in B} |P(x)|, \quad \sup_{x \in B} |P(x)| \leq \frac{C}{\mu(B)} \int_B |P(x)| d\mu(x) \quad (4)$$

для любых шара $B \in \mathbb{X}$, числа $s \geq 1$ и функции $P \in \mathcal{P}$, где число $l \geq 0$ и константа C не зависят от функции P и шара B .

ПРИМЕРЫ. 1. Очевидно, что семейство постоянных функций удовлетворяет условиям (4).

2. В случае групп Карно множество полиномов однородной степени $< k$ удовлетворяет (4) с $l = k-1$ (см., например, [26, лемма 2.1]).

Следующая теорема является главным результатом данного пункта.

Теорема 7. Пусть $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — метрическое пространство с условием удвоения, $\mathcal{P}$ — векторное пространство функций на $\mathbb{X}$, удовлетворяющее (4), Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ с выделенной точкой x_0 , $\varkappa \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $p \leq q < \infty$, $\lambda, \xi \geq 0$ и f, g, h — измеримые функции на Ω . Предположим, что для всякого шара B , $\varkappa B \subset \Omega$, существует функция $P(B) \in \mathcal{P}$ такая, что

$$\|f - P(B)\|_{q,B} \leq r(B)^\lambda \|g\|_{p,\varkappa B} + r(B)^\xi \|h\|_{p,\varkappa B}.$$

Тогда

$$\|f - P(B_0)\|_{q,\Omega} \leq C \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{l+\nu} [(\text{diam } \Omega)^\lambda \|g\|_{p,\Omega} + (\text{diam } \Omega)^\xi \|h\|_{p,\Omega}],$$

где $B_0 = B(x_0, \frac{d_\Omega(x_0)}{\varkappa})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный шар B радиуса $r(B) = \frac{\text{dist}(x(B), \partial\Omega)}{\varkappa}$. Построим цепь шаров $\{B_0, \dots, B_{m(B)} = B\}$, удовлетворяющую свойствам (i)–(iii) леммы 6.

Положим

$$a_B = \frac{r(B)^\lambda}{\mu(B)^{1/q}} \|g\|_{p,\varkappa B} + \frac{r(B)^\xi}{\mu(B)^{1/q}} \|h\|_{p,\varkappa B}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|P(B_{i+1}) - P(B_i)\|_{q,B} &\leq \mu(B)^{1/q} \sup_{x \in h_1 G_i} |P(B_{i+1})(x) - P(B_i)(x)| \\ &\leq \mu(B)^{1/q} C h_1^l \frac{1}{\mu(G_i)^{1/q}} \|P(B_{i+1}) - P(B_i)\|_{q,G_i} \\ &\leq C \mu(B)^{1/q} h_1^l \left(\frac{\|f - P(B_{i+1})\|_{q,B_{i+1}}}{\mu(B_{i+1})^{1/q}} + \frac{\|f - P(B_i)\|_{q,B_i}}{\mu(B_i)^{1/q}} \right) \\ &\leq C \mu(B)^{1/q} h_1^l (a_{B_{i+1}} + a_{B_i}) \quad \text{для всех } i = 0, \dots, m(B) - 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f - P(B_0)\|_{q,B} &\leq \|f - P(B)\|_{q,B} + \sum_{i=0}^{m(B)-1} \|P(B_{i+1}) - P(B_i)\|_{q,B} \\ &\leq C \mu(B)^{1/q} h_1^l \sum_{i=0}^{m(B)} a_{B_i}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу леммы 6

$$\sum_{i=0}^{m(B)} a_{B_i} \leq \sum_{\tilde{B} \in \mathcal{F}} a_{\tilde{B}} \chi_{h_2 \tilde{B}}(x) \quad \text{для всех } x \in B,$$

имеем

$$\begin{aligned} \|f - P(B_0)\|_{q,\Omega}^q &\leq C h_1^{lq} \sum_{B \in \mathcal{F}} \int_{\frac{1}{10}B} \left(\sum_{\tilde{B} \in \mathcal{F}} a_{\tilde{B}} \chi_{h_2 \tilde{B}}(x) \right)^q d\mu(x) \\ &\leq C h_1^{lq} \int_{\Omega} \left(\sum_{\tilde{B} \in \mathcal{F}} a_{\tilde{B}} \chi_{h_2 \tilde{B}}(x) \right)^q d\mu(x) \leq C h_1^{lq} h_2^{\nu q} \int_{\Omega} \sum_{\tilde{B} \in \mathcal{F}} a_{\tilde{B}}^q \chi_{\frac{1}{10}\tilde{B}}(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Ch_1^{lq} h_2^{\nu q} \sum_{\tilde{B} \in \mathcal{F}} a_{\tilde{B}}^q \mu(\tilde{B}) \\
&\leq Ch_1^{lq} h_2^{\nu q} \left((\text{diam } \Omega)^{\lambda q} \sum_{\tilde{B} \in \mathcal{F}} \left(\int_{\kappa \tilde{B}} |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\kappa \tilde{B}} |h(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} \right) \\
&\leq Ch_1^{lq} h_2^{\nu q} \left((\text{diam } \Omega)^{\lambda q} \left(\int_{\Omega} \sum_{\tilde{B} \in \mathcal{F}} |g(x)|^p \chi_{\kappa B}(x) d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} |h(x)|^p \chi_{\kappa B}(x) d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq Ch_1^{lq} h_2^{\nu q} ((\text{diam } \Omega)^{\lambda q} \|g\|_{p, \Omega}^q + (\text{diam } \Omega)^{\xi q} \|h\|_{p, \Omega}^q). \quad \square
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Первая часть теоремы 3 — прямое следствие теоремы 7 и предложения 4. Вторая часть доказывается аналогично доказательству второй части теоремы 2. $\square$

Формулировки результатов этой работы и краткая схема доказательств приведены в коротком сообщении [32].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мосолов П. П., Мясников В. П. О корректности краевых задач в механике сплошных сред // *Мат. сб.* 1972. Т. 88, № 2. С. 256–267.
2. Korn A. Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface // *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math., Ser. 2.* 1908. V. 10. P. 165–269.
3. Korn A. Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen // *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie.* 1909. V. 9. P. 705–724.
4. Friedrichs K. O. On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // *Ann. Math.* 1948. V. 48. P. 441–471.
5. Hlaváček I., Nečas J. On inequalities of Korn's type. I. Boundary-value problems for elliptic system of partial differential equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1970. V. 36. P. 305–311.
6. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // *Успехи мат. наук.* 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.
7. Решетняк Ю. Г. Оценки для некоторых дифференциальных операторов с конечномерным ядром // *Сиб. мат. журн.* 1970. Т. 11, № 2. С. 414–428.
8. Решетняк Ю. Г. Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей // *Сиб. мат. журн.* 1980. Т. 21, № 6. С. 108–116.
9. John F. Rotation and strain // *Commun. Pure Appl. Math.* 1961. V. 14. P. 391–413.
10. Jiang R., Kauranen A. Korn's inequality and John domains // *Calculus Variations and PDE.* 2017. V. 56, N 4. Art. N 109.
11. Korányi A., Reimann H. M. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // *Invent. Math.* 1985. V. 80. P. 309–338.
12. Korányi A., Reimann H. M. Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // *Adv. Math.* 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
13. Водопьянов С. К. Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // *Сиб. мат. журн.* 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
14. Capogna L. Regularity of quasilinear equations in the Heisenberg group // *Commun. Pure Appl. Math.* 1997. V. 50. P. 867–889.
15. Даирбеков Н. С. Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // *Сиб. мат. журн.* 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.
16. Capogna L., Danielli D., Pauls S. D., Tyson J. T. An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem. Basel: Birkhäuser-Verl., 2007. (Prog. Math.; V. 259).
17. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // *Acta Math.* 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
18. Isangulova D. V., Vodopyanov S. K. Sharp geometric rigidity of isometries on Heisenberg groups // *Math. Ann.* 2013. V. 355, N 4. P. 1301–1329.

19. Романовский Н. Н. Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 2. С. 82–119.
20. Isangulova D. V., Vodopyanov S. K. Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Euras. Math. J. 2010. V. 1, N 2. P. 58–96.
21. Решетняк Ю. Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
22. Calin O., Chang D. C. Sub-Riemannian geometry, general theory and examples. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2009 (Encycl. Math. Appl.; V. 126).
23. Исангулова Д. В. Критерий потенциальности векторного поля в субримановой геометрии // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 6. С. 949–954.
24. Nagel A., Stein E. M., Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
25. Водопьянов С. К. Весовая L_p -теория потенциала на однородных группах // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 29–48.
26. Lu G. Polynomials, higher order Sobolev extension theorems and interpolation inequalities on weighted Folland–Stein spaces on stratified groups // Acta Math. Sin., Eng. Ser. 2000. V. 16, N 3. P. 405–444.
27. Плотникова Е. А. Интегральные представления и обобщенное неравенство Пуанкаре на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 420–436.
28. Garofalo N., Nhieu D.-M. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Commun. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, N 10. P. 1081–1144.
29. Hajlasz P., Koskela P. Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688.
30. Buckley S. M. Strong doubling condition // Math. Ineq. Appl. 1998. V. 1, N 4. P. 533–542.
31. Buckley S. M., Koskela P., Lu G. Boman equals John // Proc. XVIth Rolf Nevanlinna Colloq. (Joensuu, 1995). Berlin: de Gruyter, 1996. P. 91–99.
32. Исангулова Д. В. Аналоги неравенства Корна на группах Гейзенберга // Докл. АН. 2019. Т. 485, № 4. С. 405–409.

Поступила в редакцию 31 октября 2018 г.

После доработки 16 июня 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Исангулова Дарья Васильевна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
d.isangulova@g.nsu.ru