M. B. Karmanova, On the class of Hölder surfaces in Carnot–Carathéodory spaces,
Sibirsk. Mat. Zh., 2019, Volume 60, Number 5, 1103–1132

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.509>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.207.124.84

April 26, 2023, 17:56:13

УДК 517.3+514.7

О КЛАССЕ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Для таких классов гёльдеровых отображений пространств Карно — Каратеодори, как отображения-графики и гладкие (в римановом смысле) отображения, выведены формулы площади поверхностей-образов. В частности, установлена структура полиномиального субриманова дифференциала для отображений-графиков.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.509

Ключевые слова: пространство Карно — Каратеодори, гёльдерово отображение, отображение-график, полиномиальная субриманова дифференцируемость, внутренняя мера, формула площади.

Юрию Григорьевичу Решетняку
к 90-летию юбилею

Статья посвящена выводу метрических свойств отображений пространств Карно — Каратеодори, в частности, отображений-графиков. Основные результаты являются естественным продолжением исследований классов гёльдеровых отображений неголономных структур, начатых в работах автора [1–3] и заметке [4]; отметим также важные частные случаи, рассмотренные ранее в [5–9].

В классическом случае пространство Карно — Каратеодори представляет собой многообразие $\mathbb{M}$ с подрасслоением $H\mathbb{M}$ в касательном расслоении $T\mathbb{M}$, порождающим все $T\mathbb{M}$ с помощью операции коммутирования:

$$H\mathbb{M} = H_1 \subsetneq H_2 = \text{span}\{H_1, [H_1, H_1]\} \subsetneq H_3 = \text{span}\{H_2, [H_1, H_2]\} \\ \subsetneq \cdots \subsetneq H_M = \text{span}\{H_{M-1}, [H_1, H_{M-1}]\} = T\mathbb{M}.$$

Число M определяет глубину пространства, а фильтрация подрасслоениями — согласованную с ней квазиметрику d_∞ . Нетрудно показать, что справедлива оценка сравнения $\rho \leq d_\infty \leq \rho^{1/M}$ субримановой квазиметрики d_∞ с римановой метрикой ρ . Отметим, что построение примеров отображений, липшицевых относительно d_∞ , представляет собой сложную задачу, требующую проведения отдельных глубоких исследований [10–13]. С другой стороны, известные классы отображений пространств Карно — Каратеодори, липшицевых в классическом смысле, не исследованы с точки зрения их субримановых свойств. В общем случае они гёльдеровы во внутреннем смысле, поэтому возникает вопрос, возможно ли получение каких-либо их метрических свойств и, если да, то какой вид они имеют. Частные случаи пространства Карно — Каратеодори — это группы Гейзенберга, группы Карно, а также нильпотентные градуированные

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16–31–60036-мол-а-дк).

группы. Классы отображений-графиков в рамках вопросов представимости поверхности в виде графика в пределах одной группы, а также приложения к теории минимальных поверхностей для этих случаев исследовались в других работах (см. обзоры в [5, 14] и др.).

Несмотря на то, что локально структура пространств Карно — Каратеодори близка к структурам нильпотентных градуированных групп, существующей аппроксимации недостаточно для прямого переноса методов работы с группами на пространства. Например, в [3, 4] установлено, что приближение гёльдерова отображения в точке y из окрестности точки x полиномиальным субримановым дифференциалом (вычисленным в точке x) должно быть с точностью $o(d_\infty(x, y)^{\widetilde{M}})$, где $\widetilde{M}$ — глубина образа (ср. с результатами из [1]). Кроме того, при рассмотрении таких важных частных случаев, как отображения-графики, отдельных исследований требует решение вопроса аппроксимации аналога параллельного переноса: если в случае групп Карно его полиномиальный hc -дифференциал легко вычисляется из явных формул, то на пространствах Карно — Каратеодори, где поля не образуют нильпотентной градуированной алгебры Ли, вывод аппроксимирующего отображения является более трудоемкой задачей, имеющей свою специфику. Помимо вышеперечисленных трудностей возникает еще одна, связанная с самим определением аналога параллельного переноса для отображений-графиков: так как поля не являются левоинвариантными, то для обеспечения сохранения свойства hc -дифференцируемости у «перенесенного» отображения это понятие будет зависеть от точки переноса. Отметим также, что дифференциал полиномиального субриманова дифференциала отображения-графика на пространствах Карно — Каратеодори, записанный в адаптированном к структуре образа базисе, отличается от такового, вычисленного для отображений нильпотентных градуированных групп, на некоторую блочно-верхнетреугольную матрицу.

В разд. 1 перечислены основные факты теории пространств Карно — Каратеодори, необходимые для вывода основных результатов. В разд. 2 сформулированы основные требования на образ и прообраз и выведены дифференциальные свойства аналога переноса. В разд. 3 сформулированы понятия внутренних базиса и меры, установлены метрические свойства поверхностей-графиков и доказана формула площади для классов гёльдеровых отображений пространств Карно — Каратеодори с невырожденным дифференциалом полиномиального hc -дифференциала.

1. Пространства Карно — Каратеодори

Напомним основные определения и результаты теории пространств Карно — Каратеодори.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 ([14], ср. [15–17]). Связное риманово C^∞ -многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N называется *пространством Карно — Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ существует фильтрация

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \cdots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \cdots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

подрасслоениями такая, что для каждой точки $p \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $U \subset \mathbb{M}$ с набором C^1 -гладких базисных полей $X_1, \dots, X_N$, обладающая следующими свойствами.

(1) Во всякой точке $v \in U$ подпространство

$$H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \text{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$$

имеет размерность $\dim H_i$ независимо от v , $i = 1, \dots, M$.

(2) Справедливы включения $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \dots, M-1$, $i+j \leq M$.

Кроме того, если дополнительно выполнено третье свойство, то пространство Карно — Каратеодори называется *многообразием Карно*:

(3) $H_{j+1} = \text{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $H_0 = \{0\}$, $j = 1, \dots, M-1$.

Подрасслоение $H\mathbb{M}$ называется *горизонтальным*, число M — *глубиной* многообразия $\mathbb{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Степень* поля $\deg X_k$ равна $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$, $k = 1, \dots, N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Из условия (2) определения 1.1 следует, что

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k: \deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v), \quad (1.1)$$

$v \in U$, $i, j = 1, \dots, N$.

Опишем локальную однородную группу и ее основные свойства.

Теорема 1.4 [16]. *Фиксируем $u \in \mathbb{M}$. Набор*

$$\bar{c}_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk}(u) \text{ из (1.1),} & \text{если } \deg X_i + \deg X_j = \deg X_k, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

определяет структуру нильпотентной градуированной алгебры Ли.

Построим алгебру Ли $\mathfrak{g}^u$ со структурными постоянными теоремы 1.4 как нильпотентную градуированную алгебру Ли векторных полей $\{(\hat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{R}^N$ такую, что экспоненциальное отображение

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\hat{X}_i^u)'\right)(0)$$

тождественно [18, 19]. В силу этого имеем (см., например, [16, 20])

$$(\hat{X}_i^u)'(0) = e_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть $u \in \mathbb{M}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in B_E(0, r)$, где $B_E(0, r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : B_E(0, r) \rightarrow \mathbb{M}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u является C^1 -гладким диффеоморфизмом, если $0 < r \leq r_u$ для некоторого $r_u > 0$. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами*, или *координатами первого рода*, (относительно $u \in \mathbb{M}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

По определению 1.5 имеем $(\theta_u)_* \langle e_i \rangle(u) = D\theta_u(0) \langle e_i \rangle = X_i(u)$. Отсюда и из соотношения (1.2) вытекает

$$(\theta_u)_* \langle (\hat{X}_i^u)' \rangle(u) = X_i(u). \quad (1.3)$$

По построению для векторных полей $\{(\hat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ справедливы соотношения

$$[(\hat{X}_i^u)', (\hat{X}_j^u)'] = \sum_{k: \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(u) (\hat{X}_k^u)',$$

$i, j = 1, \dots, N$, всюду на $\mathbb{R}^N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 (см., например, [20]). *Нильпотентной градуированной группой (Ли)* называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^M V_j, \quad [V_1, V_j] \subset V_{j+1}, \text{ для всех } j < M, \quad [V_j, V_M] = \{0\} \text{ для всех } j \leq M.$$

Если вместо условия $[V_1, V_j] \subset V_{j+1}$ выполняется $[V_1, V_j] = V_{j+1}$, то $\mathbb{G}$ называется *группой Карно*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Нильпотентная градуированная группа $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}^u$, называется *нильпотентным касательным конусом* $\mathbb{M}$ в точке $u \in \mathbb{M}$. Построим $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ в $\mathbb{R}^N$ как группалгебру [18], т. е. таким образом, чтобы экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}^u$ в нильпотентную градуированную группу $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ было тождественным:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\hat{X}_i^u)'\right)(0) = (x_1, \dots, x_N).$$

Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа [18].

Базисные векторные поля $(\hat{X}_i^u)' \in \mathfrak{g}^u$, $i = 1, \dots, N$, левинвариантны относительно этой групповой операции. Используя экспоненциальное отображение θ_u , перенесем $(\hat{X}_i^u)'$ на окрестность точки $u \in \mathbb{M}$ и получим поля $\hat{X}_i^u = (\theta_u)_*(\hat{X}_i^u)'$, $i = 1, \dots, N$. Напомним, что $\hat{X}_i^u(u) = X_i(u)$ (см. (1.3)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Группа, ассоциированная с алгеброй Ли $\{\hat{X}_i^u\}_{i=1}^N$ в точке $u \in \mathbb{M}$, называется *локальной однородной группой* $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$. Определим ее таким образом, чтобы отображение θ_u было *локальным групповым изоморфизмом* некоторых окрестностей единиц групп $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ и $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$.

Каноническая риманова структура на $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$ определяется внутренним произведением в единице $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$, совпадающим с произведением на $T_u \mathbb{M}$. Каноническая риманова структура на нильпотентном касательном конусе $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ определяется таким образом, что локальный групповой изоморфизм θ_u — изометрия. Групповая операция переносится с $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ на $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$ с помощью θ_u . Если $x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j \hat{X}_j^u\right)(u)$, $y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j \hat{X}_j^u\right)(u)$, то $x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j \hat{X}_j^u\right)(u)$, где

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu > 0, \beta > 0, \\ |\mu + \beta|_h = \deg X_j}} F_{\mu, \beta}^j(u) x^\mu y^\beta,$$

и для каждого N -мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h = \sum_{i=1}^N \lambda_i \deg X_i$. Здесь и далее будем полагать, что если условие на однородную норму вида $|\mu + \beta|_h = \deg X_j$ невыполнимо ни для каких мультииндексов, то соответствующая сумма равна нулю. Например, в данном случае, если $\deg X_j = 1$, то $z_j = x_j + y_j$. Функции $\{F_{\mu, \beta}^j\}_{j, \mu, \beta}$ будем называть *структурными функциями*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Если $\mathbb{M}$ — многообразие Карно, то его нильпотентная градуированная группа $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ является группой Карно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Заметим, что если базисные поля на $\mathbb{M}$ принадлежат классу $C^1 \setminus C^2$, то перенесенные поля $\widehat{X}_i^u$ непрерывны, $i = 1, \dots, N$. Поэтому здесь и далее запись вида $\exp\left(\sum_{j=1}^N w_j \widehat{X}_j^u\right)(v)$ понимается как значение

$$\theta_u\left(\exp\left(\sum_{j=1}^N w_j (\widehat{X}_j^u)'\right)(\theta_u^{-1}(v))\right).$$

Опишем функции расстояния, согласованные с неголономной структурой пространств Карно — Каратеодори и их локальных однородных групп. Следующая величина корректно определена локально на пространствах Карно — Каратеодори; кроме того, она является одной из наиболее часто используемых альтернатив метрики Карно — Каратеодори на многообразиях Карно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть $\mathbb{M}$ — пространство Карно — Каратеодори топологической размерности N и глубины M , и пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$. Определим величину $d_\infty(v, w)$ следующим образом:

$$d_\infty(v, w) = \max_{i=1, \dots, N} \{|w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Если $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ — локальная однородная группа, то величина $d_\infty^u(z, s)$, где $s = \exp\left(\sum_{i=1}^N s_i \widehat{X}_i^u\right)(z)$, определяется аналогично:

$$d_\infty^u(z, s) = \max_{i=1, \dots, N} \{|s_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Для работы с метрическими свойствами объектов на неголономных структурах удобнее использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную d_∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12 (ср. [22]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, $w, v \in \mathbb{M}$. Определим величину $d_2(v, w)$ следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j:\deg X_j=1} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j:\deg X_j=2} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2 \cdot 2}}, \dots, \left(\sum_{j:\deg X_j=M} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2 \cdot M}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{M} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\text{Box}_2(v, r)$.

Значение $d_2^u(z, s)$ для $s = \exp\left(\sum_{i=1}^N s_i \widehat{X}_i^u\right)(z)$, $s, z, u \in \mathbb{M}$, и множество $\text{Box}_2^u(z, r)$ определяются аналогично на $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$.

СВОЙСТВО 1.13. Величина $d_2(v, w)$ (как и $d_\infty(v, w)$) локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности и для всякой точки существуют

содержащая ее окрестность $D \in \mathbb{M}$ и константа $C_D < \infty$ такие, что обобщенное неравенство треугольника

$$d_2(v, w) \leq C_D(d_2(v, z) + d_2(z, w))$$

верно для всех $v, w, z \in D$.

Аналогичное утверждение справедливо и для d_2^u (и d_∞^u), $u \in \mathbb{M}$.

СВОЙСТВО 1.14. Хаусдорфова размерность $\mathbb{M}$ относительно d_2 (и d_∞) равна

$$\nu = \dim H_1 + \sum_{k=2}^M k(\dim H_k - \dim H_{k-1}).$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.15. Отображение, действующее следующим образом:

$$\mathbb{R}^N \supset B_E(0, r) \ni (w_1, \dots, w_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i \widehat{X}_i^u\right)(v) \in \mathcal{G}^u \mathbb{M},$$

обозначим символом $\hat{\theta}_v^u$.

СВОЙСТВО 1.16 [16]. Имеем $\theta_u = \hat{\theta}_u^u$, если оба отображения определены корректно.

СВОЙСТВО 1.17. Прообраз d_2 -шара $\text{Box}_2(v, r)$ при отображении θ_v равен

$$\begin{aligned} \text{Box}_2(0, r) &= B_2^{\dim \text{span}\{X_j(v): \deg X_j=1\}}(0, r) \\ &\times B_2^{\dim \text{span}\{X_j(v): \deg X_j=2\}}(0, r^2) \times \dots \times B_2^{\dim \text{span}\{X_j(v): \deg X_j=M\}}(0, r^M), \end{aligned}$$

где B_2^l — евклидов шар размерности l .

Аналогичное утверждение справедливо для $(\hat{\theta}_v^u)^{-1}(\text{Box}_2^u(v, r))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18 (ср. [1, 5]). Пусть $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ — пространства Карно — Каратеодори, $E \subset \mathbb{M}$, и $\psi: E \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{d}}: \psi(E) \times \tilde{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ равно нулю тогда и только тогда, когда оба аргумента совпадают, и симметрично. Будем говорить, что ψ *полиномиально субриманово дифференцируемо*, или *полиномиально h -дифференцируемо*, в точке $x \in E$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение $\mathcal{L}_x: \mathcal{G}^x \mathbb{M} \rightarrow \mathcal{G}^{\psi(x)} \tilde{\mathbb{M}}$ такое, что

- 1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\psi(w), \mathcal{L}_x(w)) = o(d_\infty(x, w))$, $E \ni w \rightarrow x$;
- 2) $\mathcal{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$, где L_x — полином относительно $w_1, \dots, w_N$,

а $\exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(x) = w$.

Отображение $\mathcal{L}_x$ называется *полиномиальным субримановым дифференциалом*, или *полиномиальным h -дифференциалом*, отображения ψ в точке x .

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.19. Здесь и далее полиномиальный субриманов дифференциал $\mathcal{L}_x$ отображения ψ будем обозначать символом $\widehat{D}_P \psi(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.20. В определении 1.18 в п. 1 использован тот факт, что $\tilde{\mathbb{M}}$ и $\mathcal{G}^{\psi(x)} \tilde{\mathbb{M}}$ в окрестности $\psi(x)$ совпадают как множества. В пп. 1, 2 принимаем во внимание свойство 1.16. Далее в статье при формулировках свойств о полиномиальной h -дифференцируемости о функции $\tilde{\mathfrak{d}}$ будет говориться отдельно (см. далее замечание 3.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.21 (см. также [1] и др.). Требуемые в определении 1.18 свойства не обеспечивают единственности в выборе полиномиального hc -дифференциала.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.22. Определение 1.18 обобщает понятие субриманова дифференциала, или hc -дифференциала, введенного в [23] (см. далее определение 2.8).

2. Отображения-графики и аналог переноса

В этом разделе сформулируем основные требования на прообраз $\mathbb{M}$, образ $\tilde{\mathbb{M}}$, отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, а также определим понятие отображения-графика и опишем аналог отображения-переноса. Для важных частных случаев будут установлены явные формулы вычисления его дифференциала. В отличие от групповых структур (см., например, [1] и др.) вывод таких формул нетривиален на пространствах Карно — Каратеодори, а вид дифференциала аналога параллельного переноса существенно отличается от известного на нильпотентных градуированных группах. Явный вид аналога переноса играет важную роль при исследовании отображений-графиков, а именно при описании аппроксимации φ_Γ в терминах (полиномиального) субриманова дифференциала исходного отображения φ (см. далее теорему 3.7).

Предположение 2.1 (ср. [3, 4]). Будем рассматривать $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, где

- (1) $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество;
- (2) $\mathbb{M}$ — пространство Карно — Каратеодори топологической размерности N с гладкими базисными полями $X_1, \dots, X_N$, глубины M и хаусдорфовой размерности ν ;
- (3) $n_i = \dim H_i - \dim H_{i-1}$, $i = 1, \dots, M$, $\dim H_0 = 0$;
- (4) $\tilde{\mathbb{M}}$ — пространство Карно — Каратеодори топологической размерности $\tilde{N}$ с гладкими базисными полями $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, глубины $\tilde{M}$ и хаусдорфовой размерности $\tilde{\nu}$;
- (5) $\tilde{n}_i = \dim \tilde{H}_i - \dim \tilde{H}_{i-1}$, $i = 1, \dots, \tilde{M}$, $\dim \tilde{H}_0 = 0$;
- (6) в случае рассмотрения отображений-графиков выполняются следующие условия: $\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — (эквирегулярное) пространство Карно — Каратеодори топологической размерности $N + \tilde{N}$ с базисными полями $X_1, \dots, X_N, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, имеющими те же степени, что и на $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ соответственно, причем распределение $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$ является интегрируемым; кроме того, $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ пересекаются в единственной точке $\mathbf{0} = \mathbb{M} \cap \tilde{\mathbb{M}}$;
- (7) рассматриваемая окрестность пространства Карно — Каратеодори $\mathbb{U}$ и значения $\varphi(x)$, $x \in \Omega$, таковы, что все необходимые понятия: расстояния d_∞ , локальных однородных групп $\mathcal{G}^u \mathbb{U}$ и соответствующих расстояний d_∞^u , а также значения φ_Γ , определены корректно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Обозначение $\mathbf{0}$ носит условный характер, его смысл — точка пересечения $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$. Случай $\mathbb{M} \times \tilde{\mathbb{M}}$ является частным для $\mathbb{U}$. В общем случае, когда $\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{U}$, коммутаторы полей из набора $\{X_i\}_{i=1}^N$ и набора $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ нетривиальны.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.3. Обозначим интегральное многообразие распределения $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$, проходящее через $z \in \mathbb{U}$, символом $\tilde{\mathbb{M}}_z$.

Введем определение отображения-графика на пространствах Карно — Каратеодори.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4 [3, 4]. Пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ и $\varphi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(\mathbf{0})$. Положим действие отображения-графика $\varphi_\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$ равным

$$\Omega \ni x \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(x) \in \mathbb{U}.$$

Так как метрические свойства поверхности-графика $\varphi_\Gamma(\Omega)$ в окрестности точки $\varphi_\Gamma(x)$ корректнее всего выводить в терминах (полиномиального) hc -дифференциала исходного отображения φ , потребуется аналог параллельного переноса $\varphi_\Gamma(x)$ вдоль кривой на Ω , соединяющей точки x и y , с $\tilde{\mathbb{M}}_x$ на $\tilde{\mathbb{M}}_y$ к элементу $\varphi_\Gamma(y)$, где y — точка из окрестности x . В отличие от нильпотентных градуированных групп на пространствах Карно — Каратеодори поля не обладают левоинвариантностью, поэтому при рассмотрении точки

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(y) \quad (2.1)$$

могут возникнуть сложности при аппроксимации элемента

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(y) \tilde{X}_j\right)(y)$$

в терминах (полиномиального) hc -дифференциала, вычисленного на $\tilde{\mathbb{M}}$ (иными словами, полученного для точек $\varphi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(\mathbf{0})$ и $\varphi(y) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(y) \tilde{X}_j\right)(\mathbf{0})$). Однако можно использовать следующее определение, совпадающее с приведенным выше (2.1) на нильпотентных градуированных группах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. В условиях предположения 2.1 пусть $x, y \in \Omega$ и

$$(\varphi_1^\Delta(y \rightarrow x), \dots, \varphi_{\tilde{N}}^\Delta(y \rightarrow x))$$

— набор координат такой, что

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) \tilde{X}_j\right)(\varphi(y)). \quad (2.2)$$

Параллельным переносом элемента $\varphi_\Gamma(x)$ вдоль элемента y из окрестности x назовем точку

$$\mathbb{U} \ni \varphi_y(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) \tilde{X}_j\right)(\varphi_\Gamma(y)).$$

СВОЙСТВО 2.6. Имеем $\varphi_j(x \rightarrow y) = -\varphi_j(y \rightarrow x)$, $x, y \in \Omega$, $j = 1, \dots, \tilde{N}$.

СВОЙСТВО 2.7. Так как распределение $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$ интегрируемо, $\varphi_y(x)$ принадлежит его интегральному многообразию $\tilde{\mathbb{M}}_y \subset \mathbb{U}$, проходящему через y .

Следующие понятия и теорема понадобятся для объяснения мотивировки определения элемента $\varphi_y(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8 [23]. Пусть $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ — пространства Карно — Каратеодори, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — измеримое множество и $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$. Отображение φ называют *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathcal{G}^x \mathbb{M} \rightarrow \mathcal{G}^{\varphi(x)} \tilde{\mathbb{M}}$ такой, что

$$d_\infty(\varphi(y), \mathcal{L}_x \langle y \rangle) = o(d_\infty(x, y)) \text{ при } y \rightarrow x, \quad y \in \Omega.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9 (см., например, [23]). Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, принадлежит классу C_H^1 , если его горизонтальные производные существуют, непрерывны и образ горизонтальных полей горизонтален.

Теорема 2.10 [23]. Отображение $\varphi \in C_H^1(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, где $\mathbb{M}$ — многообразие Карно, непрерывно hc-дифференцируемо всюду. Иными словами, горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathcal{G}^x \mathbb{M} \rightarrow \mathcal{G}^{\varphi(x)} \tilde{\mathbb{M}}$ непрерывно зависит от $x \in \Omega$. Кроме того, стремление $o(1)$ к нулю при $y \rightarrow x$ в соотношении $d_\infty(\varphi(y), \mathcal{L}_x \langle y \rangle) = o(d_\infty(x, y))$ равномерно на компактных подмножествах.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.11. hc-Дифференциал $\mathcal{L}_x$ обозначим символом $\hat{D}\varphi(x)$.

Приведенное ниже свойство обосновывает выбор определения 2.5 вместо (2.1).

Свойство 2.12. Если $\varphi \in C_H^1(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$, то

$$|\varphi_j^\Delta(x \rightarrow y) - (\hat{D}\varphi(x) \langle y \rangle)_j| = o(d_\infty(x, y)^{\deg \tilde{X}_j}), \quad j = 1, \dots, \tilde{N},$$

в силу hc-дифференцируемости φ всюду. Тогда для элемента

$$\hat{D}_y \varphi(x) \langle y \rangle = \exp \left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} (\hat{D}\varphi(x) \langle y \rangle)_j \tilde{X}_j \right) (\varphi_y(x))$$

в локальной однородной группе $\mathcal{G}^{\varphi_y(x)} \tilde{\mathbb{M}}_y$ имеем

$$d_{\infty}^{\varphi_y(x)}(\hat{D}_y \varphi(x) \langle y \rangle, \varphi_\Gamma(y)) = o(d_\infty(x, y)).$$

Кроме того, так как $d_\infty(\varphi_\Gamma(y), \varphi_y(x)) = O(d_\infty(x, y))$, по локальной аппроксимационной теореме [16, 24] справедливо $d_\infty(\hat{D}_y \varphi(x) \langle y \rangle, \varphi_\Gamma(y)) = o(d_\infty(x, y))$.

Как видно из доказанного, точка $\varphi_\Gamma(y)$ аппроксимируется в терминах hc-дифференциала φ , если $\varphi \in C_H^1(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$. Аналогичное утверждение верно и для полиномиального hc-дифференциала $\hat{D}_P \varphi(x)$, если отображение удовлетворяет условиям из [1] или [3, 4]. В этом случае сравнимое с римановым расстояние ρ (см. далее обозначение 2.13) в каждом из базисов будет $o(d_\infty(x, y)^{\tilde{M}})$, поэтому и для субримановых расстояний будет выполняться аналог утверждения свойства 2.12. В связи с этим далее цель раздела — найти выражение для координат $\varphi_y(x)$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$. Для этого используем методы и результаты исследования (глобальных) геометрий соседних локальных однородных групп, созданные в [16].

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.13. Пусть $\mathbb{L}$ — пространство Карно — Каратеодори топологической размерности L с базисными полями $Y_1, \dots, Y_L$. Положим

$$\rho(v, w) = \max_{l=1, \dots, L} \{|w_l|\} \quad \text{для } w = \exp \left(\sum_{l=1}^L w_l Y_l \right) (v).$$

Если $w = \exp\left(\sum_{l=1}^L w_l^u \widehat{Y}_l^u\right)(v)$, то $\rho^u(v, w) = \max_{l=1, \dots, L} \{|w_l^u|\}$.

Напомним следующее

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.14. На пространстве Карно — Каратеодори $\mathbb{L}$ топологической размерности L и базисными полями $Y_1, \dots, Y_L$ *однородная норма* $|\lambda|_h$ мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_L)$ равна сумме $\sum_{l=1}^L \lambda_l \deg Y_l$.

Теорема 2.15. В условиях предположения 2.1 пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \widetilde{\mathbb{M}}$ либо липшицево в классическом смысле отображение пространств Карно — Каратеодори, либо липшицево в субримановом смысле отображение класса C_H^1 многообразия Карно в пространство Карно — Каратеодори. Пусть еще базисные поля на $\widetilde{\mathbb{M}}$ принадлежат классу $C^{1,1}$. Фиксируем $x \in \Omega$. Покоординатное выражение для отображения

$$\Omega \ni y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x) \mapsto \varphi_y(x)$$

в координатах первого рода $\theta_{\varphi_\Gamma(x)}^{-1}$ — это набор $\{\tilde{\delta}_k^x\}_{k=1}^{N+\widetilde{N}}$, обладающий следующими свойствами.

(1) Если $\widetilde{\mathbb{M}}_y = \widetilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа, структурные константы которой не зависят от $y \in \Omega$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_l^x &= y_l + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg X_l, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\widehat{X}_l^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_l(x, y), \quad l = 1, \dots, N, \\ \tilde{\delta}_{N+m}^x &= \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg \widetilde{X}_m, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\widetilde{X}_m^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_{N+m}(x, y), \quad m = 1, \dots, \widetilde{N}, \end{aligned}$$

причем

$$\max\{|\chi_l(x, y)|, |\chi_{N+m}(x, y)|\} = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\},$$

$l = 1, \dots, N, m = 1, \dots, \widetilde{N}$.

(2) Если $\widetilde{\mathbb{M}}_y = \widetilde{\mathbb{G}}_y$ — нильпотентная градуированная группа со структурными константами, зависящими только от $y \in \Omega$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_l^x &= y_l + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg X_l, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\widehat{X}_l^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_l(x, y), \quad l = 1, \dots, N, \\ \tilde{\delta}_{N+m}^x &= \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg \widetilde{X}_m, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\widehat{X}_m^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_{N+m}(x, y), \quad m = 1, \dots, \widetilde{N}, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} |\chi_l(x, y)| &= O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right)^2, \\ |\chi_{N+m}(x, y)| &= O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)) + \rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \\ &\quad + O(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

если отображение φ липшицево в классическом смысле;

$$|\chi_l(x, y)| = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right),$$

$$|\chi_{N+m}(x, y)| = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)) + \rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}|\} \right),$$

если φ липшицево в субримановом смысле и принадлежит классу C_H^1 , $l = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, \tilde{N}$.

(3) В случае, когда $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ — произвольные пространства Карно — Кара-теодори, верны все оценки случая (2).

(4) Пусть базисные поля на $\mathbb{U}$ принадлежат классу C^∞ . Если существует такое конечное $p \in \mathbb{N}$, что

(а) коммутаторы полей $\sum_{i=1}^N a_i X_i$ и $\sum_{j=1}^{\tilde{N}} b_j \tilde{X}_j$, содержащие более чем p раз

поле $\sum_{j=1}^{\tilde{N}} b_j \tilde{X}_j$, равны нулю для любых наборов $\{a_i\}_{i=1}^N$ и $\{b_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$;

(б) коммутаторы полей $\sum_{j=1}^{\tilde{N}} c_j \tilde{X}_j$ и $\sum_{j=1}^{\tilde{N}} d_j \tilde{X}_j$ порядка более чем p зануляются для любых наборов $\{c_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ и $\{d_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$, а структурные функции $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ постоянны на каждом $\mathbb{M}_y$, $y \in \Omega$,

то

$$\tilde{\delta}_k^x = y_k + \sum_{l=1}^{N+\tilde{N}} \hat{Q}_l^k(\varphi_\Gamma(x)) + \eta_k(x, y) + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}),$$

$$\tilde{\delta}_{N+m}^x = \sum_{q=1}^{N+\tilde{N}} \bar{Q}_q^m(\varphi_\Gamma(x)) + \eta_{N+m}(x, y) + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}),$$

где

$$\eta_k(x, y) = O\left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}\right)^2,$$

$$\eta_{N+m}(x, y) = O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O\left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}\right)^2,$$

если φ липшицево в классическом смысле;

$$\eta_k(x, y) = o\left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}\right),$$

$$\eta_{N+m}(x, y) = O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o\left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}|\}\right),$$

если φ липшицево в субримановом смысле и принадлежит классу C_H^1 , а полиномы $\hat{Q}_l^k$ и $\bar{Q}_q^m$ зависят от $\{y_i\}_{i=1}^N$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$, причем каждое слагаемое этих полиномов содержит не менее двух множителей из набора $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ и одного из $\{y_i\}_{i=1}^N$, $k = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, \tilde{N}$, $l, q = 1, \dots, N + \tilde{N}$.

(5) Пусть базисные поля на $\mathbb{U}$ принадлежат классу C^∞ . Если выполнено условие (4)(а), а вместо условия (4)(б) верно, что для всех структурных функций $F_{\alpha, \beta}^j$ существует одна и та же константа Липшица $L < \infty$, они ограничены

равномерно по всем α и β и, кроме того, постоянны на каждом $\mathbb{M}_y$, $y \in \Omega$, то формулы п. (4) также выполняются.

Во всех случаях $o(1) \rightarrow 0$ при $\rho(x, y) \rightarrow 0$ равномерно на $\mathcal{U} \in \Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.16. Подчеркнем, что существенное упрощение постановки общей задачи, приведенное в п. 2 теоремы 2.15, не улучшает оценку остатков χ_p по сравнению с общим случаем п. 3, $p = 1, \dots, N + \tilde{N}$. Кроме того, в п. (4) выражения приведены с точностью до величины $o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}})$, так как такая аппроксимация отображения полиномиальным субримановым дифференциалом не ухудшится от произвольной замены базиса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.15. Пусть

$$\varphi_\Gamma(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(x), \quad y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x).$$

В качестве основы приведем часть рассуждений для общего случая, а затем рассмотрим частные. Имеем (см., например, [16])

$$x = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} (-\varphi_j(x)) \hat{\tilde{X}}_j^x\right)(\varphi_\Gamma(x)), \quad y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \hat{X}_i^x\right)(x). \quad (2.4)$$

Подчеркнем, что так как рассматриваем общий случай, то вместо $\tilde{X}_j$ (для задачи из п. 1) пишем $\hat{\tilde{X}}_j^x$, $j = 1, \dots, \tilde{N}$. Выразим координаты y относительно $\varphi_\Gamma(x)$ в локальной группе $\mathcal{G}^x \mathbb{U}$. Тогда

$$y = \exp\left(\sum_{k=1}^N w_k \hat{X}_k^x + \sum_{k=1}^{\tilde{N}} w_{N+k} \hat{\tilde{X}}_k^x\right)(\varphi_\Gamma(x)),$$

где $w_k = y_k$ и $w_{N+k} = -\varphi_k(x)$ для горизонтальных полей, а для координат при полях степени, большей единицы, справедливо (см. также [1])

$$\begin{aligned} w_k &= y_k + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_k, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^{\hat{X}_k^x} \cdot (-\varphi(x))^\alpha y^\beta \quad \text{для } 1 \leq k \leq N, \\ w_{N+l} &= -\varphi_l(x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_l, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^{\hat{\tilde{X}}_l^x} \cdot (-\varphi(x))^\alpha y^\beta \quad \text{для } 1 \leq l \leq \tilde{N}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В (2.5) и подобных вычислениях приняты следующие обозначения:

$$y^\beta = \prod_{i=1}^N y_i^{\beta_i}, \quad (-\varphi(x))^\alpha = \prod_{j=1}^{\tilde{N}} (-\varphi_j(x))^{\alpha_j}$$

для мультииндексов $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{N}})$, где $(y_1, \dots, y_N)$ и $(-\varphi_1(x), \dots, -\varphi_{\tilde{N}}(x))$ взяты из соотношений (2.4). Далее в статье выражения вида y^β , $(\varphi(x))^\alpha$ и т. п. понимаются, как приведенные выше произведения.

Рассмотрим вспомогательную точку

$$\hat{\Delta}^x(y) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \hat{\tilde{X}}_j^x\right)(y).$$

Из результатов работы [1] следует, что ее координаты $(\hat{\delta}_1^x, \dots, \hat{\delta}_{N+\tilde{N}}^x)$ в локальной однородной группе $\mathcal{G}^x \mathbb{U}$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$ равны

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_l^x &= y_l + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda| > 0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\hat{X}_l^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda, \quad l = 1, \dots, N, \\ \hat{\delta}_{N+m}^x &= \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \tilde{X}_m, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda| > 0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\hat{X}_m^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda, \quad m = 1, \dots, \tilde{N},\end{aligned}\quad (2.6)$$

где $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\hat{X}_l^x}$ и $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\hat{X}_m^x}$ — константы для всех $\kappa, \mu, \lambda, l = 1, \dots, N, m = 1, \dots, \tilde{N}$.

Перейдем к рассмотрению случаев, описанных в формулировке теоремы.

ЗАДАЧА 1. Заметим, что если для всех $y \in \Omega$ справедливо $\tilde{\mathbb{M}}_y = \tilde{\mathbb{G}}$ с одними и теми же полями и структурными константами, то $\tilde{\mathbb{G}} = \mathcal{G}^{\varphi_\Gamma(x)} \tilde{\mathbb{M}}_x = \mathcal{G}^x \tilde{\mathbb{M}}_x = \mathcal{G}^y \tilde{\mathbb{M}}_y$, поэтому

$$\varphi_y(x) = \hat{\Delta}^x(y) = \exp \left(\sum_{l=1}^N \hat{\delta}_l^x \hat{X}_l^x + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \hat{\delta}_{N+m}^x \tilde{X}_m \right) (\varphi_\Gamma(x)). \quad (2.7)$$

Применяя аргументы из [16] о сравнении «глобальных» геометрий локальных однородных групп, получаем, что в рассматриваемых точках

$$\hat{X}_l^x = \hat{X}_l^{\varphi_\Gamma(x)} + \sum_{k=1}^N a_k^l \hat{X}_k^{\varphi_\Gamma(x)} + \sum_{k=1}^{\tilde{N}} a_{N+k}^l \tilde{X}_k, \quad (2.8)$$

где

$$|a_k^l| = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) = O(\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))), \quad (2.9)$$

$l = 1, \dots, N, k = 1, \dots, N + \tilde{N}$. Действительно, так как поля $\hat{X}_l^z$ зависят гладко от $z \in \mathbb{U}$ [16], для каждого такого поля справедливо соотношение (2.8) с оценками (2.9), $l = 1, \dots, N$. Рассмотрим вспомогательную точку

$$\hat{\varphi}_y(x) = \exp \left(\sum_{l=1}^N \hat{\delta}_l^x \hat{X}_l^{\varphi_\Gamma(x)} + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \hat{\delta}_{N+m}^x \tilde{X}_m \right) (\varphi_\Gamma(x)).$$

Тогда $\rho(\varphi_y(x), \hat{\varphi}_y(x)) = O(\rho(x, y) \cdot \rho(x, \varphi_\Gamma(x)))$. Следовательно, если $\tilde{\mathbb{M}}_y = \tilde{\mathbb{G}}$, то [16]

$$\begin{aligned}\varphi_y(x) &= \exp \left(\sum_{l=1}^N \tilde{\delta}_l^x \hat{X}_l^{\varphi_\Gamma(x)} + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \tilde{\delta}_{N+m}^x \tilde{X}_m \right) (\varphi_\Gamma(x)) \\ &= \exp \left(\sum_{l=1}^N \tilde{\delta}_l^x X_l + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \tilde{\delta}_{N+m}^x \tilde{X}_m \right) (\varphi_\Gamma(x)),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_l^x &= y_l + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda| > 0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\hat{X}_l^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_l(x, y), \quad l = 1, \dots, N, \\ \tilde{\delta}_{N+m}^x &= \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \tilde{X}_m, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda| > 0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\tilde{X}_m^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_{N+m}(x, y), \quad m = 1, \dots, \tilde{N},\end{aligned}\quad (2.10)$$

причем (см. также (2.6))

$$\begin{aligned} \max\{|\chi_l(x, y)|, |\chi_{N+m}(x, y)|\} &= \max\{|\tilde{\delta}_l^x - \hat{\delta}_l^x|, |\tilde{\delta}_{N+m}^x - \hat{\delta}_{N+m}^x|\} \\ &= O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)) \cdot \rho(\varphi_\Gamma(x), \varphi_y(x))) = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$l = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, \tilde{N}$. Подчеркнем, что (2.10) — формула для аналога параллельного переноса в случае, когда $\tilde{\mathbb{M}}_y = \tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа, структурные константы которой не зависят от $y \in \Omega$. Далее, так как рассматриваемая окрестность и значения φ таковы, что все величины определены корректно, отображение

$$y \mapsto (\hat{\delta}_1^x, \dots, \hat{\delta}_{N+\tilde{N}}^x)$$

является биективным на свой образ (см. (2.6)). Кроме того, можно считать, что значения $\rho(x, \varphi_\Gamma(x))$ достаточно малы, чтобы дифференциал параллельного переноса был невырожден всюду на рассматриваемой окрестности, и отображение

$$y \mapsto (\tilde{\delta}_1^x, \dots, \tilde{\delta}_{N+\tilde{N}}^x)$$

было также биективным на свой образ.

ЗАДАЧА 2. Пусть $\tilde{\mathbb{M}}_y = \tilde{\mathbb{G}}_y$ — нильпотентная градуированная группа, структурные константы которой зависят от $y \in \Omega$. В этом случае $\varphi_y(x) \neq \hat{\Delta}^x(y)$. Рассмотрим вторую вспомогательную точку

$$\overline{\Delta}^x(y) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \hat{X}_j^y\right)(y) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(y)$$

и сравним ее с $\hat{\Delta}^x(y)$. Из [16] вытекает, что

$$\max\{\rho^x(\hat{\Delta}^x(y), \overline{\Delta}^x(y)), \rho^y(\hat{\Delta}^x(y), \overline{\Delta}^x(y))\} = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\},$$

кроме того, аналогичная оценка также в силу результатов из [16] справедлива и для $\rho^{\varphi_\Gamma(x)}(\hat{\Delta}^x(y), \overline{\Delta}^x(y))$:

$$\rho^{\varphi_\Gamma(x)}(\hat{\Delta}^x(y), \overline{\Delta}^x(y)) = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}. \quad (2.12)$$

Осталось оценить расстояние ρ между точками $\overline{\Delta}^x(y)$ и $\varphi_y(x)$. Для этого выразим их координаты относительно y . В силу (2.2) $\varphi_j(x) = \varphi_j(y) + \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x)$ для $\deg \tilde{X}_j = 1$ и

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(y) + \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0})(\varphi(y))^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta \quad (2.13)$$

для $\deg \tilde{X}_j > 1$. Здесь, как и в задаче 1,

$$(\varphi(y))^\alpha = \prod_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(y)^{\alpha_j}, \quad (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta = \prod_{j=1}^{\tilde{N}} (\varphi_j^\Delta(y \rightarrow x))^{\beta_j}$$

для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{N}})$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{\tilde{N}})$, где $\varphi_j(y)$ таковы, что $\varphi(y) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(y) \tilde{X}_j\right)(\mathbf{0})$, а набор $(\varphi_1^\Delta(y \rightarrow x), \dots, \varphi_{\tilde{N}}^\Delta(y \rightarrow x))$ взят из определения 2.5. В свою очередь,

$$\varphi_y(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^y(x) \tilde{X}_j\right)(y),$$

где $\varphi_j^y(x) = \varphi_j(y) + \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) = \varphi_j(x)$ для $\deg \tilde{X}_j = 1$, и

$$\varphi_j^y(x) = \varphi_j(y) + \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(y) (\varphi(y))^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta \quad (2.14)$$

для $\deg \tilde{X}_j > 1$. Тогда

$$\varphi_y(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \omega_j(x, y) \tilde{X}_j\right)(\overline{\Delta}^x(y)),$$

где $\omega_j(x, y) = 0$ для $\deg \tilde{X}_j = 1$, и

$$\begin{aligned} \omega_j(x, y) &= \varphi_j^y(x) - \varphi_j(x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(y) (-\varphi(x))^\alpha (\varphi^y(x))^\beta \\ &= \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} (F_{\alpha, \beta}^j(y) - F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0})) \varphi(y)^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta \\ &\quad + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(y) (-\varphi(x))^\alpha (\varphi^y(x))^\beta \end{aligned}$$

для $\deg \tilde{X}_j > 1$. Здесь $(\varphi^y(x))^\beta = \prod_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^y(x)^{\beta_j}$ для $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{\tilde{N}})$ и $\varphi_j^y(x)$ из (2.14), $j = 1, \dots, \tilde{N}$. Оценим координаты $\omega_j(x, y)$, $j = 1, \dots, \tilde{N}$. Если $\deg \tilde{X}_j = 2$, то $(\varphi^y(x))^\beta = (\varphi(x))^\beta$ в выражении

$$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(y) (-\varphi(x))^\alpha (\varphi^y(x))^\beta, \quad (2.15)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \omega_j(x, y) &= \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} (F_{\alpha, \beta}^j(y) - F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0})) \varphi(y)^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta \\ &= O(\rho(\mathbf{0}, x) \rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right)^2, \end{aligned}$$

если отображение φ липшицево в классическом смысле;

$$\omega_j(x, y) = O(\rho(\mathbf{0}, x) \rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg \tilde{X}_i}}|\} \right),$$

если φ липшицево в субримановом смысле класса C_H^1 , так как

$$|\varphi_j^\Delta(x, y) - (\widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_j| = o(d_\infty(x, y)^{\deg \tilde{X}_j}) \leq o(d_\infty(x, y)),$$

$j = 1, \dots, \tilde{N}$ (см. обозначение 2.11). Для степеней, превосходящих 2, достаточно применить соотношения (2.13) и (2.14), из которых следует, что аналогичная оценка справедлива для всех остальных коэффициентов:

$$|\omega_j(x, y)| = O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right)^2, \quad (2.16)$$

если отображение φ липшицево в классическом смысле;

$$|\omega_j(x, y)| = O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}|\} \right), \quad (2.17)$$

если φ липшицево в субримановом смысле класса C_H^1 . Действительно, в этом случае слагаемое (2.15) совпадает с

$$\sum_{\substack{|\alpha+\beta+e_p+e_q|_h=\deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0, \quad p < q}} G_{\alpha, \beta, e_p, e_q}^j(y) (-\varphi(x))^\alpha (\varphi^y(x))^\beta \times (\varphi_p(x)(\varphi_q(x) - \varphi_q^y(x)) - \varphi_q(x)(\varphi_p(x) - \varphi_p^y(x))).$$

Таким образом, для $\rho^{\varphi^y(x)}(\overline{\Delta}^x(y), \varphi_y(x)) = \rho^y(\overline{\Delta}^x(y), \varphi_y(x))$ верны оценки (2.16) или (2.17) в зависимости от свойств φ . Так как

$$\rho^{\varphi^y(x)}(\overline{\Delta}^x(y), \varphi_y(x)) = \rho^{\overline{\Delta}^x(y)}(\overline{\Delta}^x(y), \varphi_y(x)),$$

оценки (2.16) или (2.17) (в зависимости от свойств φ) верны также и для $\rho^{\overline{\Delta}^x(y)}(\overline{\Delta}^x(y), \varphi_y(x))$. Следовательно, с учетом (2.10), (2.12), соотношения

$$\rho(\varphi_\Gamma(x), \overline{\Delta}^x(y)) = O\left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}\right)$$

и того, что интегральные линии, соединяющие $\varphi_\Gamma(x)$ и $\overline{\Delta}^x(y)$ в локальных группах в $\varphi_\Gamma(x)$ и в $\overline{\Delta}^x(y)$, соответствуют векторным полям с одинаковыми коэффициентами при базисных полях, выводим

$$\varphi_y(x) = \exp\left(\sum_{l=1}^N \tilde{\delta}_l^x X_l + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \tilde{\delta}_{N+m}^x \tilde{X}_m\right)(\varphi_\Gamma(x)), \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_l^x &= y_l + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg X_l, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\widehat{X}_l^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_l(x, y), \quad l = 1, \dots, N, \\ \tilde{\delta}_{N+m}^x &= \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg \tilde{X}_m, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\widehat{X}_m^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_{N+m}(x, y), \quad m = 1, \dots, \tilde{N}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

причем

$$\begin{aligned} |\chi_l(x, y)| &= O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right)^2, \\ |\chi_{N+m}(x, y)| &= O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)) + \rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \\ &\quad + O(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

если отображение φ липшицево в классическом смысле;

$$\begin{aligned} |\chi_l(x, y)| &= O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right), \\ |\chi_{N+m}(x, y)| &= O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)) + \rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \\ &\quad + o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

если φ липшицево в субримановом смысле класса C_H^1 , $l = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, \tilde{N}$. Здесь первая строка в (2.21) следует из групповой операции с использованием оценки

$$O(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right) \cdot o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\} \right) \leq o(1) \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right).$$

ЗАДАЧА 3. Рассмотрим общий случай, когда $\tilde{\mathbb{M}}_y$, $y \in \Omega$, не является нильпотентной градуированной группой. Для такой постановки также верны соотношения (2.10) для

$$\hat{\Delta}^x(y) = \exp \left(\sum_{l=1}^N \tilde{\delta}_l^x \hat{X}_l^{\varphi_\Gamma(x)} + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \tilde{\delta}_{N+m}^x \hat{X}_m^{\varphi_\Gamma(x)} \right) (\varphi_\Gamma(x))$$

с $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\hat{X}_m^x}$ вместо $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\tilde{X}_m}$ и (2.12). Различие с решением задачи 2 начинается с оценки расстояния между точками $\bar{\Delta}^x(y)$ и $\varphi_y(x)$, где

$$\bar{\Delta}^x(y) = \exp \left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j \right) (y) = \exp \left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \hat{X}_j^y \right) (y).$$

Для этого посчитаем координаты $\varphi_y(x)$ относительно y в локальной однородной группе $\mathcal{G}^y \mathbb{U}$. Так как координаты $\varphi_\Gamma(y)$ в локальной группе $\mathcal{G}^y \mathbb{U}$ относительно y известны, достаточно оценить координаты $\varphi_y(x)$ относительно $\varphi_\Gamma(y)$ в этой группе. В силу того, что мы рассматриваем отображения $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, которые являются по крайней мере липшицевыми в субримановом смысле, для $\{\varphi_j^\Delta(y \rightarrow x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ имеем

$$|\varphi_j^\Delta(y \rightarrow x)| = O \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right) + o \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\} \right)^{\deg \tilde{X}_j}$$

(или $O \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} \right)$, если φ липшицево в классическом смысле), $j = 1, \dots, \tilde{N}$.

Тогда искомые координаты $\{\omega_j^y\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ элемента $\varphi_y(x)$ относительно $\varphi_\Gamma(y)$ в $\mathcal{G}^y \mathbb{U}$ отличаются от координат $\{\varphi_j^\Delta(y \rightarrow x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ (которые можно рассматривать как относящиеся к локальной однородной группе $\mathcal{G}^{\varphi_\Gamma(y)} \mathbb{U}$) на величину

$$O(\rho(y, \varphi_\Gamma(y))\rho(\varphi_\Gamma(y), \varphi_y(x))), \quad (2.22)$$

которая равна

$$O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o \left(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\} \right),$$

если φ липшицево в субримановом смысле;

$$O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\})^2,$$

если φ липшицево в классическом смысле. Заметим, что на эквивалентную величину отличаются координаты $\varphi(x) = \varphi_{\mathbf{0}}(x)$ относительно $\varphi(y) = \varphi_{\mathbf{0}}(y)$ в локальной группе в точке $\varphi(x)$ и в локальной группе в точке $\mathbf{0}$. Обозначим последние символом $\{\omega_j^{\mathbf{0}}\}_{j=1}^{\tilde{N}}$. Запишем выражения для координат $\{\varphi_j(x)\}$ и для $\{\varphi_j^y(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$, где $\varphi_y(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^y(x) \tilde{X}_j\right)(y)$:

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(y) + \omega_j^{\mathbf{0}} + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0})(\varphi(y))^\alpha (\omega^{\mathbf{0}})^\beta,$$

$$\varphi_j^y(x) = \varphi_j(y) + \omega_j^y + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(y)(\varphi(y))^\alpha (\omega^y)^\beta,$$

$j = 1, \dots, \tilde{N}$. Используя эти выражения, оценим координаты $\{\zeta_l\}_{l=1}^{\tilde{N}}$ точки $\varphi_y(x)$ относительно $\bar{\Delta}^x(y)$ в локальной группе $\mathcal{G}^y\mathbb{U}$. Тогда для $\deg \tilde{X}_j = 1$ имеем $\zeta_j = \varphi_j^y(x) - \varphi_j(x) = \omega_j^y - \omega_j^{\mathbf{0}}$. Эта разность равна

$$O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}^{\frac{1}{\deg \tilde{X}_i}}),$$

если φ липшицево в субримановом смысле;

$$O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\})^2,$$

если φ липшицево в классическом смысле. Если $\deg \tilde{X}_j = 2$, то

$$\begin{aligned} \zeta_j = \omega_j^y - \omega_j^{\mathbf{0}} + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h=2, \\ \alpha, \beta > 0}} (\varphi(y))^\alpha (F_{\alpha, \beta}^j(y)(\omega^y)^\beta - F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0})(\omega^{\mathbf{0}})^\beta) \\ + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h=2, \\ 0 < \alpha < \beta}} G_{\alpha, \beta}^j(y)(\varphi_\beta(x)\varphi_\alpha^y(x) - \varphi_\alpha(x)\varphi_\beta^y(x)), \end{aligned} \quad (2.23)$$

откуда

$$|\zeta_j| = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)) + \rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}^{\frac{1}{\deg \tilde{X}_i}}), \quad (2.24)$$

если φ липшицево в субримановом смысле;

$$|\zeta_j| = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)) + \rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\})^2, \quad (2.25)$$

если φ липшицево в классическом смысле. Если $\deg \tilde{X}_j > 2$, то для $|\zeta_j|$ справедливы те же оценки (2.24) и (2.25). Так как $\rho^y(y, \bar{\Delta}^x(y)) = \rho(x, \varphi_\Gamma(x))$, для $\rho^{\bar{\Delta}^x(y)}(\bar{\Delta}^x(y), \varphi_y(x))$ также выполняются (2.24) и (2.25) (см. [16]).

Заметим, что в локальной группе в $\varphi_\Gamma(x)$ для коэффициентов интегральной линии векторного поля (с постоянными коэффициентами), соединяющей $\varphi_\Gamma(x)$ и $\bar{\Delta}^x(y)$, справедлив аналог соотношений (2.10) и оценки (2.11): если

$$\bar{\Delta}^x(y) = \exp\left(\sum_{l=1}^N \bar{\delta}_l^x \hat{X}_l^{\varphi_\Gamma(x)} + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \bar{\delta}_{N+m}^x \hat{X}_m^{\varphi_\Gamma(x)}\right)(\varphi_\Gamma(x)),$$

то

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_l^x &= y_l + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg X_l, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa,\mu,\lambda}^{\hat{X}_l^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_l(x, y), \quad l = 1, \dots, N, \\ \bar{\delta}_{N+m}^x &= \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h=\deg \tilde{X}_m, \\ \kappa, |\mu|+|\lambda|>0}} K_{\kappa,\mu,\lambda}^{\hat{X}_m^x} \cdot y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda + \chi_{N+m}(x, y), \quad m = 1, \dots, \tilde{N}, \end{aligned}$$

где

$$\max\{|\chi_l(x, y)|, |\chi_{N+m}(x, y)|\} = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\},$$

$l = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, \tilde{N}$. Эти же соотношения и оценки верны и для интегральной линии векторного поля с постоянными коэффициентами в локальной группе $\mathcal{G}^{\bar{\Delta}^x(y)}\mathbb{U}$. Учитывая результаты (2.24) и (2.25), получаем, что для точки $\varphi_y(x)$ выполняются соотношения (2.18) и (2.19), а также (2.21) для случая, когда φ липшицево в субримановом смысле класса C_H^1 , и (2.20), когда φ липшицево в классическом смысле.

Задача 4. Рассмотрим одну специфическую постановку задачи, являющуюся частным случаем рассмотренной на предыдущем шаге, но не входящую в первые две задачи. Этот случай является более простым по сравнению с общей ситуацией; тем не менее он показывает, что характер оценок, полученных в общем случае, не улучшаем, т. е. они не содержат лишних слагаемых. Для более наглядной иллюстрации свойств координат аналога параллельного переноса не будем рассматривать, как в начале статьи, локальные однородные группы, а рассмотрим непосредственно пересчет координат в исходном базисе.

Пусть

$$x = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} -\varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(\varphi_\Gamma(x)), \quad y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x).$$

Так как для аппроксимации относительно d_∞ наибольшая необходимая точность — это $o(d_\infty(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}})$, при вычислении координат по формуле Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа достаточно рассмотреть коммутаторы до порядка $p + \max\{M, \tilde{M}\}$ включительно. Действительно, в этом случае остальные коммутаторы будут либо содержать поле $\sum_{j=1}^{\tilde{N}} -\varphi_j(x) \tilde{X}_j$ более чем p раз, либо содержать поле $\sum_{i=1}^N y_i X_i$ не менее чем $\max\{M, \tilde{M}\}$ раз. Тогда (см., например, [19, теорема 15.4.1]) имеем

$$y = \exp\left(\sum_{k=1}^N s_k X_k + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} s_{N+m} \tilde{X}_m\right)(\varphi_\Gamma(x)),$$

где

$$s_k = y_k + \sum_{l=1}^{N+\tilde{N}} P_l^k + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$s_{N+m} = -\varphi_m(x) + \sum_{q=1}^{N+\tilde{N}} \tilde{P}_q^m + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}), \quad m = 1, \dots, \tilde{N},$$

а P_l^k и $\tilde{P}_q^m$ — полиномы от $\{y_i\}_{i=1}^N$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ с коэффициентами, зависящими от структурных функций и их производных, $l, q = 1, \dots, N + \tilde{N}$. Далее, также с помощью формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа выразим координаты $\{\varphi_j^y(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ точки $\varphi_y(x)$ относительно y и сравним их с $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$: из формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа и (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_j^y(x) &= \varphi_j(y) + \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(y) \cdot (\varphi(y))^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta, \\ \varphi_j(x) &= \varphi_j(y) + \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0}) \cdot (\varphi(y))^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$j = 1, \dots, \tilde{N}$, так как структурные функции постоянны на каждом $\mathbb{M}_y$, $y \in \Omega$. Напомним, что в силу предположений о равенстве нулю коммутаторов высоких порядков суммы

$$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(y) \cdot (\varphi(y))^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta, \quad \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0}) \cdot (\varphi(y))^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta$$

состоят из конечного числа слагаемых. С помощью (2.26) далее преобразуем в терминах $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ выражение

$$\varphi_y(x) = \exp \left(\sum_{k=1}^N \tilde{\delta}_k^x X_k + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \tilde{\delta}_{N+m}^x \tilde{X}_m \right) (\varphi_\Gamma(x)),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_k^x &= y_k + \sum_{l=1}^{N+\tilde{N}} Q_l^k + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}), \\ \tilde{\delta}_{N+m}^x &= \varphi_m^y(x) - \varphi_m(x) + \sum_{q=1}^{N+\tilde{N}} \tilde{Q}_q^m + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

а Q_l^k и $\tilde{Q}_q^m$ — полиномы от $\{y_i\}_{i=1}^N$, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ и $\{\varphi_j^y(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ с коэффициентами, зависящими от структурных функций, $k = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, \tilde{N}$, $l, q = 1, \dots, N + \tilde{N}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \varphi_m^y(x) - \varphi_m(x) &= \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \beta > 0}} (F_{\alpha, \beta}^j(y) - F_{\alpha, \beta}^j(\mathbf{0})) \cdot (\varphi(y))^\alpha (\varphi^\Delta(y \rightarrow x))^\beta \\ &= O((\rho(\mathbf{0}, x) + \rho(x, y))(\rho(\mathbf{0}, \varphi(x)) + \rho(\varphi(x), \varphi(y)))\rho(\varphi(x), \varphi(y))), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$m = 1, \dots, \tilde{N}$. Последнее выражение оценивается как

$$O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\})^2,$$

если φ липшицево в классическом смысле, и величиной

$$O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}),$$

если φ липшицево в субримановом смысле и принадлежит классу C_H^1 , так как $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \rho(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle) + d_\infty(\widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle, \varphi(y))$. Заменяя в полиномах Q_l^k и $\bar{Q}_q^m$ из (2.27) элементы $\varphi_j^y(x)$ величинами $\varphi_j(x) + (\varphi_j^y(x) - \varphi_j(x))$, а затем — коэффициенты, зависящие от структурных функций, их значениями в точке $\varphi_\Gamma(x)$, $k = 1, \dots, N$, $j, m = 1, \dots, \tilde{N}$, $l, q = 1, \dots, N + \tilde{N}$, с учетом оценки (2.28) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_k^x &= y_k + \sum_{l=1}^{N+\tilde{N}} \widehat{Q}_l^k(\varphi_\Gamma(x)) + \eta_k + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}), \\ \tilde{\delta}_{N+m}^x &= \sum_{q=1}^{N+\tilde{N}} \bar{Q}_q^m(\varphi_\Gamma(x)) + \eta_{N+m} + o(\rho(x, y)^{\max\{M, \tilde{M}\}}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_k &= O(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\})^2, \\ \eta_{N+m} &= O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + O(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\})^2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

если φ липшицево в классическом смысле;

$$\begin{aligned} \eta_k &= o(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\}), \\ \eta_{N+m} &= O(\rho(\mathbf{0}, x)\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))) \max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|\} + o(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

если φ липшицево в субримановом смысле и принадлежит классу C_H^1 , а полиномы $\widehat{Q}_l^k$ и $\bar{Q}_q^m$ зависят от $\{y_i\}_{i=1}^N$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$, причем каждое слагаемое этих полиномов содержит не менее одного множителя из набора $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ и одного из $\{y_i\}_{i=1}^N$, $k = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, \tilde{N}$, $l, q = 1, \dots, N + \tilde{N}$. Это свойство полиномов вытекает из предположений на свойства коммутаторов и формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа; оно объясняет оценки первых строк (2.30) и (2.31). Подчеркнем, что $\rho(\varphi(x), \varphi(y))$ определяет в (2.28) расстояние между $\varphi_\Gamma(x)$ и $\varphi_y(x)$: оно равно либо $O(\rho(x, y))$, либо $O(\rho(x, y)) + o(\max_{i=1, \dots, N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\})$.

Задача 5. Решение этой задачи вытекает из предыдущей, а также из соотношений (2.29). Действительно, если вместо условия (4)(б) верно, что все структурные функции $F_{\alpha, \beta}^j$ липшицевы с одной и той же константой L , то (2.28) верно не только для конечных сумм, но и для рядов в соотношениях вида (2.26) (напомним, что все расстояния от $\mathbf{0}$ достаточно малы), поэтому вместо (2.19), (2.20) и (2.21) будут верны более тонкие оценки: соответственно (2.29), (2.30) и (2.31).

Из рассуждений следует, что во всех задачах имеем $o(1) \rightarrow 0$ при $\rho(x, y) \rightarrow 0$ равномерно на компактных подобластях $\mathscr{U} \in \Omega$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.17. Для простейшего случая, когда $\tilde{\mathbb{M}}_y$ является группой $\mathbb{G}$ для всех $y \in \Omega$, существенным является ограничение на значения $\rho(x, \varphi_\Gamma(x))$ для корректного определения экспоненциального отображения (в противном случае может возникнуть ситуация $\varphi_\Gamma(x) = \varphi_y(x)$), см. (2.10). В этом случае аналог переноса будет биективным отображением с невырожденным дифференциалом.

Если структура группы $\tilde{\mathbb{M}}_y$ зависит от y , то для биективности аналога переноса и невырожденности его дифференциала одного корректного определения экспоненциального отображения недостаточно: необходимы ограничения не только на $\rho(x, \varphi_\Gamma(x))$, но также на $\rho(\mathbf{0}, x)$ (см. (2.20)). Кроме того, возникает влияние свойств φ в зависимости от того, является оно липшицевым в классическом или в субримановом смысле (см. (2.21)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.18. Случай, когда $\tilde{\mathbb{M}}_y = \tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа, структурные константы которой не зависят от $y \in \Omega$, является модельным для всех остальных постановок задачи, решенной в ходе доказательства теоремы 2.15. Поэтому полученные для других случаев оценки могут быть точнее выведенных для модельного только в специфических частных случаях.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.19. Абсолютные значения φ и размер окрестности можно выбрать таким образом, что дифференциал переноса будет близок к единичной матрице.

3. Метрические свойства поверхностей

Прежде чем выпишем выражения для полиномиальных субримановых дифференциалов отображений пространств Карно — Каратеодори и классов отображений-графиков, обеспечивающих адекватную для описания метрических свойств аппроксимацию, сформулируем требования на сами отображения.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа. Для $\mathbb{G} \ni y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$, коэффициенты при полях степени k будем называть *переменными степени k* , $k = 1, \dots, M$.

Предположение 3.2. Будем считать, что

- (1) φ принадлежит классу $C^{\tilde{M}}(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$;
- (2) в частном случае если $\mathbb{M}$ — нильпотентная градуированная группа, то φ имеет гладкость $\left[\frac{\tilde{M}+k-1}{k}\right]$ по переменным степени k , $k = 1, \dots, M$;
- (3) в случае рассмотрения отображений-графиков φ либо отображение класса $C^{\max\{M, \tilde{M}\}}$, либо если $\mathbb{M}$ — нильпотентная градуированная группа, то φ имеет гладкость $\left[\frac{\max\{M, \tilde{M}\}+k-1}{k}\right]$ по переменным степени k , $k = 1, \dots, M$;
- (4) базисные поля на $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3 [1, 3, 4]. Пусть $\psi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Фиксируем $x \in \mathbb{M}$ и рассмотрим композицию $\bar{\psi} = \psi \circ \theta_x : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим символом $D_{s,q}\bar{\psi}(x)\langle y \rangle$ часть многочлена Тейлора, состоящую из производных порядка от 2 до qs функции $\bar{\psi}$ по переменным $(y_1, \dots, y_{\dim H_q})$, которая аппроксимирует значение

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(y_1, \dots, y_{\dim H_q}, 0_{\dim H_{q+1}}, \dots, 0_N) - \bar{\psi}(y_1, \dots, y_{\dim H_{q-1}}, 0_{\dim H_{q-1}+1}, \dots, 0_N) \\ & - D\bar{\psi}(0)\langle 0, \dots, 0, y_{\dim H_{q-1}+1}, \dots, y_{\dim H_q}, 0, \dots, 0 \rangle \quad (3.1) \end{aligned}$$

с точностью до величины $o(\max_{i=1, \dots, \dim H_q} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}^{qs})$, $q = 1, \dots, M$. Здесь и далее 0 с индексом обозначает соответствующую индексу координату, равную нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Так как $q \cdot \lceil \frac{\widehat{M}+q-1}{q} \rceil \geq \widehat{M}$, а $\max_{i=1, \dots, \dim H_q} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\} \leq d_\infty(x, y)$, то $D_{s,q} \bar{\psi}(x) \langle y \rangle$ при $s = \lceil \frac{\widehat{M}+q-1}{q} \rceil$ аппроксимирует (3.1) с точностью до величины $o(d_\infty(x, y)^{\widehat{M}})$, где $\widehat{M} = \widetilde{M}$ для случая отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \widetilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, и $\widehat{M} = \max\{M, \widetilde{M}\}$ для отображений-графиков $\varphi_\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$. Иными словами, далее заменим величину qs в определении 3.3 на $\widehat{M}$ в зависимости от того, рассматриваем φ или отображение-график φ_Γ .

Требований на порядок рассматриваемых производных достаточно для получения приближения с точностью до $o(d_\infty(x, y)^{\widehat{M}})$ (см. подробности в [3]).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.5. Для $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, положим

$$\mathcal{D}_{\widehat{M}} \psi(x) \langle y \rangle = D\psi(x) \langle y \rangle + \sum_{p=1}^M (D_{\lfloor \frac{\widehat{M}+p-1}{p} \rfloor, p} \psi \circ \theta_x)(x) \langle \theta_x^{-1}(y) \rangle.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Величины $O(1)$ в выражениях (2.3) для χ_l , $l = 1, \dots, N + \widetilde{N}$, зависят гладко от наборов $\{y_i\}_{i=1}^N$ и $\{\varphi_j^\Delta(y \rightarrow x)\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ и ограничены равномерно на $\mathcal{U} \Subset \Omega$ в силу гладкости базисных полей. Действительно, в этом случае экспоненциальное отображение и обратное к нему также гладкие.

Следующий результат является одним из основных в этом разделе.

Теорема 3.7. Пусть выполнены условия предположения 2.1 и, кроме того, $\varphi \in C^{\max\{M, \widetilde{M}\}}(\Omega, \mathbb{M})$. Отображение-график $\varphi_\Gamma : \Omega \rightarrow \widetilde{\mathbb{M}}$ полиномиально субриманово дифференцируемо всюду, и $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(x)$ сопоставляет элементу $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$ в координатах относительно $\varphi_\Gamma(x)$ набор $(\Delta_1(x, y), \dots, \Delta_{N+\widetilde{N}}(x, y))$, где

$$\begin{aligned} \Delta_k(x, y) &= y_k + P_k^1(y) + P_k^2(y) + P_k^3(y), \quad k = 1, \dots, N, \\ \Delta_k(x, y) &= (\mathcal{D}_{\widehat{M}} \varphi(x) \langle y \rangle)_{k-N} + P_k^1(y) + \widetilde{P}_k^2(y) + P_k^3(y), \quad k = N+1, \dots, N+\widetilde{N}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь полиномы P_k^1 зависят только от $y_1, \dots, y_{\dim H_{\deg X_{k-1}}}$, а их коэффициенты определяются значениями структурных констант в локальной группе в x , для полинома P_k^3 верно $|P_k^3| = O\left(\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N y_j y_m\right)$, $k = 1, \dots, N + \widetilde{N}$, и полиномы P_k^2

ограничены значением $O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(x, y))$, $k = 1, \dots, N$, а полиномы $\widetilde{P}_k^2$ — значением $(O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) + O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)))\rho(x, y)$, $k = N+1, \dots, N+\widetilde{N}$. Кроме того, такой набор аппроксимирует $\varphi_\Gamma(y)$ с точностью до $o(d_\infty(x, y)^{\widehat{M}})$ при любой невырожденной замене базиса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.15 имеем

$$\theta_{\varphi_\Gamma(x)}^{-1}(\varphi_y(x)) = (\tilde{\delta}_1^x, \dots, \tilde{\delta}_{N+\widetilde{N}}^x),$$

где в общем случае величины $O(1)$, описанные в (2.3), гладко зависят от наборов $\{y_i\}_{i=1}^N$ и $\{\varphi_j^\Delta(y \rightarrow x)\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ и ограничены равномерно на $\mathcal{U} \Subset \Omega$. В свою

очередь,

$$\varphi_y(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x) \tilde{X}_j\right)(\varphi_\Gamma(y)),$$

где

$$\varphi(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^\Delta(y \rightarrow x)\right)(\varphi(y)).$$

Найдем координаты $\varphi_\Gamma(y)$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$ с помощью групповой операции в локальной группе $\mathcal{G}^{\varphi_y(x)}\mathbb{U}$, а затем перейдем в локальную группу $\mathcal{G}^{\varphi_\Gamma(x)}\mathbb{U}$. Тогда, во-первых,

$$\varphi_\Gamma(y) = \exp\left(\sum_{i=1}^N c_i \hat{X}_i^{\varphi_y(x)} + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} c_{N+j} \hat{X}_j^{\varphi_y(x)}\right)(\varphi_\Gamma(x)),$$

где

$$\begin{aligned} c_i &= \tilde{\delta}_i^x + d_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ c_i &= \varphi_i^\Delta(x \rightarrow y) + \tilde{\delta}_i^x + d_i, \quad i = N+1, \dots, N+\tilde{N}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$d_i = O(\rho(x, y) \cdot \rho(\varphi(x), \varphi(y)))$ или, более точно,

$$d_i = O\left(\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N y_j y_m\right), \quad i = 1, \dots, N+\tilde{N} \quad (3.4)$$

(напомним, что φ достаточно гладкое). Во-вторых, коэффициенты $\hat{c}_l$, где $(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{N+\tilde{N}}) = \theta_{\varphi_\Gamma(x)}^{-1}(\varphi_\Gamma(y))$, отличаются от соответствующих выражений из (3.3) на величины $\hat{d}_l = O(\rho(x, y)^2)$, для которых справедливы оценки (3.4), $l = 1, \dots, N+\tilde{N}$. Все величины $O(1)$ гладкие. Положим $\Delta_k(x, y) = \mathcal{D}_{\hat{M}} \hat{c}_k(x) \langle y \rangle$, $k = 1, \dots, N+\tilde{N}$. В этом случае имеем

$$\Delta_k(x, y) = y_k + P_k^1(y) + P_k^2(y) + P_k^3(y), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\Delta_k(x, y) = \mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi_k^\Delta(x \rightarrow y)(x) \langle y \rangle + P_k^1(y) + \tilde{P}_k^2(y) + P_k^3(y), \quad k = N+1, \dots, N+\tilde{N},$$

где по определению $\{\varphi_j^\Delta(x \rightarrow y)(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ верно

$$\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi_k^\Delta(x \rightarrow y)(x) \langle y \rangle = \mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi_k(x) \langle y \rangle$$

(см. [3, 4]), $k = 1, \dots, \tilde{N}$, и, кроме того, в силу (2.3), (3.3) и (3.4) полиномы P_k^1 зависят только от $y_1, \dots, y_{\dim H_{\deg X_{k-1}}}$, а их коэффициенты определяются значениями структурных констант в локальной группе в x , для полинома P_k^3 верны оценки (3.4), $k = 1, \dots, N+\tilde{N}$, и полиномы P_k^2 ограничены значением $O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(x, y))$, $k = 1, \dots, N$, а полиномы $\tilde{P}_k^2$ — значением

$$(O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))) + O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x))\rho(\mathbf{0}, x)))\rho(x, y), \quad k = N+1, \dots, N+\tilde{N}.$$

Из определения следует, что этот полиномиальный субриманов дифференциал устойчив к изменениям базиса, т. е. точность аппроксимации $o(d_\infty(x, y)^{\hat{M}})$ при замене базиса не меняется. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Подчеркнем, что в теореме 3.7 полиномиальный hc -дифференциал аппроксимирует φ_Γ как относительно квазиметрики $\tilde{d}_\infty$ (и $\tilde{d}_2$), построенной по базису $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^{\tilde{N}}$, так и относительно функции $\tilde{d}$, определенной аналогично $\tilde{d}_\infty$ (или $\tilde{d}_2$), построенной по полученному невырожденной заменой из $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^{\tilde{N}}$ базису.

Из соотношений (3.2) видно, что в отличие от случая отображений нильпотентных градуированных групп дифференциал полиномиального субриманова дифференциала может быть вырожденным (см., например, частный случай в [8, 9]). Однако в силу свойств входящих в выражения (3.2) слагаемых этого можно избежать с помощью подходящих ограничений на значения $\varphi(x)$: а именно, достаточно выбрать расстояние $\rho(x, \varphi_\Gamma(x))$ (или, что то же самое, $\rho(\mathbf{0}, \varphi(x))$) достаточно малым для $x \in \Omega$ (или $x \in \mathcal{U} \subseteq \Omega$). Отметим, что все производные P_k^1 будут лежать ниже диагонали, а производные P_k^3 в точке x будут равны нулю, $k = 1, \dots, N + \tilde{N}$. В этом случае матрица $D(D_P \varphi_\Gamma(x))(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} E_1 + R_{1,1} & R_{1,2} & \dots R_{1,M-1} & R_{1,M} \\ * & E_2 + R_{2,2} & \dots R_{2,M-1} & R_{2,M} \\ * & * & \dots R_{3,M-1} & R_{3,M} \\ \dots & & \dots & \dots \\ * & * & \dots * & E_M + R_{M,M} \\ D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{1,1} + Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots Q_{1,M-1} & Q_{1,M} \\ * & D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{2,2} + Q_{2,2} & \dots Q_{2,M-1} & Q_{2,M} \\ * & * & \dots \dots & \dots \\ * & * & \dots * & D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{M,M} + Q_{M,M} \end{pmatrix}.$$

Здесь E_l — единичные матрицы размера $\dim H_l - \dim H_{l-1}$, $l = 1, \dots, M$, $\dim H_0 = 0$, $\max\{\|R_{km}(x)\|, \|Q_{km}(x)\|\} = O(\rho(\mathbf{0}, \varphi(x)))$, $k, m = 1, \dots, M$, а $D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{j,j}$ — «диагональные» блоки размера $(\dim \tilde{H}_j - \dim \tilde{H}_{j-1}) \times (\dim H_j - \dim \tilde{H}_{j-1})$ матрицы дифференциала (взятого в точке x) полиномиального субриманова дифференциала $\hat{D}_P \varphi(x) = \mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x)$ отображения φ , $j = 1, \dots, \min\{M, \tilde{M}\}$, $\dim \tilde{H}_0 = 0$, и $D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{M,M} = \emptyset$, если $\tilde{M} < M$ (в этом случае последний блок полиномиального hc -дифференциала отображения φ равен $D(\mathcal{D}_M \varphi(x))_{\tilde{M}, \tilde{M}}$). Если $\tilde{M} > M$, то в матрице присутствуют дополнительные строки.

Таким образом, при ограничениях на $\rho(\mathbf{0}, \varphi(x)) = \rho(x, \varphi_\Gamma(x))$ отображение-график φ_Γ (локально) взаимно однозначно, и матрица $D(D_P \varphi_\Gamma(x))(x)$ невырожденна. Следовательно [3], существует базис $\{^x X_1, \dots, ^x X_N, ^x \tilde{X}_1, \dots, ^x \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$, называемый внутренним, или адаптированным, в точке x , приводящий матрицу $D(D_P \varphi_\Gamma(x))(x)$ при перегруппировке полей по степеням к блочно-«верхнетреугольному» виду.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Далее будем рассматривать два основных преобразования базиса для точки x : первое приводит матрицу $D(D_P \varphi_\Gamma(x))(x)$ к виду $D_{\tilde{\Delta}}(D_P \varphi_\Gamma(x))(x)$, равному

$$(A) = \begin{pmatrix} E_1 & \tilde{R}_{1,2} & \dots \tilde{R}_{1,M-1} & \tilde{R}_{1,M} \\ 0 & E_2 & \dots \tilde{R}_{2,M-1} & \tilde{R}_{2,M} \\ 0 & 0 & \dots \tilde{R}_{3,M-1} & \tilde{R}_{3,M} \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & E_M \\ D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{1,1} & \tilde{Q}_{1,2} & \dots \tilde{Q}_{1,M-1} & \tilde{Q}_{1,M} \\ 0 & D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{2,2} & \dots \tilde{Q}_{2,M-1} & \tilde{Q}_{2,M} \\ 0 & 0 & \dots \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & D(\mathcal{D}_{\hat{M}} \varphi(x))_{M,M} \end{pmatrix},$$

а второе — к виду $D_{\hat{\Delta}}(D_P\varphi_{\Gamma}(x))(x)$, равному

$$\begin{pmatrix} E_1 + \hat{R}_{1,1} & \hat{R}_{1,2} & \dots & \hat{R}_{1,M-1} & \hat{R}_{1,M} \\ 0 & E_2 + \hat{R}_{2,2} & \dots & \hat{R}_{2,M-1} & \hat{R}_{2,M} \\ 0 & 0 & \dots & \hat{R}_{3,M-1} & \hat{R}_{3,M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_M + \hat{R}_{M,M} \\ D(\mathcal{D}_{\hat{M}}\varphi(x))_{1,1} + \hat{Q}_{1,1} & \hat{Q}_{1,2} & \dots & \hat{Q}_{1,M-1} & \hat{Q}_{1,M} \\ 0 & D(\mathcal{D}_{\hat{M}}\varphi(x))_{2,2} + \hat{Q}_{2,2} & \dots & \hat{Q}_{2,M-1} & \hat{Q}_{2,M} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D(\mathcal{D}_{\hat{M}}\varphi(x))_{M,M} + \hat{Q}_{M,M} \end{pmatrix},$$

где для $\tilde{R}_{km}(x)$, $\tilde{Q}_{km}(x)$, $\hat{R}_{km}(x)$ и $\hat{Q}_{km}(x)$ справедливы те же оценки, что и для $R_{km}(x)$ и $Q_{km}(x)$, $k, m = 1, \dots, M$, $x \in \Omega \subset \mathbb{M}$. Кроме того, справедливы приведенные выше замечания насчет вида матрицы для $\tilde{M} < M$ и $\tilde{M} > M$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.10. Будем обозначать адаптированный базис, для которого матрица дифференциала полиномиального субриманова дифференциала имеет вид, аналогичный $D_{\hat{\Delta}}(D_P\varphi_{\Gamma}(x))(x)$, в окрестности точки x , символом

$${}^x\mathcal{B}^{\tilde{\Delta}} = \{{}^xX_1^{\tilde{\Delta}}, \dots, {}^xX_N^{\tilde{\Delta}}, {}^x\tilde{X}_1^{\tilde{\Delta}}, \dots, {}^x\tilde{X}_{\tilde{N}}^{\tilde{\Delta}}\}, \quad (3.5)$$

а базис, для которого матрица дифференциала полиномиального субриманова дифференциала имеет вид, аналогичный $D_{\hat{\Delta}}(D_P\varphi_{\Gamma}(x))(x)$, в окрестности точки x , — символом

$${}^x\mathcal{B}^{\hat{\Delta}} = \{{}^xX_1^{\hat{\Delta}}, \dots, {}^xX_N^{\hat{\Delta}}, {}^x\tilde{X}_1^{\hat{\Delta}}, \dots, {}^x\tilde{X}_{\tilde{N}}^{\hat{\Delta}}\}. \quad (3.6)$$

Напомним, что адаптированный базис для общего случая $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, обозначается [3] через

$${}^x\mathcal{B} = \{{}^x\tilde{X}_1, \dots, {}^x\tilde{X}_{\tilde{N}}\}. \quad (3.7)$$

Приведенные ниже определения и обозначения справедливы для всех базисов (3.5)–(3.7). Для упрощения формулировок введем общие обозначения для базисов, глубин и размерностей.

СОГЛАШЕНИЕ 3.11. (1) В условиях выполнения предположений 2.1 и 3.2 для отображений-графиков $\varphi_{\Gamma} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$, построенных по отображению $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, где $\Omega \subset \mathbb{M}$, полагаем $\hat{N} = N + \tilde{N}$, $\hat{M} = \max\{M, \tilde{M}\}$ и $\hat{\varphi} = \varphi_{\Gamma}$. Кроме того,

$$({}^xY_1, \dots, {}^xY_{\hat{N}}) = ({}^xX_1^{\tilde{\Delta}}, \dots, {}^xX_N^{\tilde{\Delta}}, {}^x\tilde{X}_1^{\tilde{\Delta}}, \dots, {}^x\tilde{X}_{\tilde{N}}^{\tilde{\Delta}}) \quad \text{для вида } D_{\tilde{\Delta}}(D_P\varphi_{\Gamma}(x))(x)$$

либо

$$({}^xY_1, \dots, {}^xY_{\hat{N}}) = ({}^xX_1^{\hat{\Delta}}, \dots, {}^xX_N^{\hat{\Delta}}, {}^x\tilde{X}_1^{\hat{\Delta}}, \dots, {}^x\tilde{X}_{\tilde{N}}^{\hat{\Delta}}) \quad \text{для вида } D_{\hat{\Delta}}(D_P\varphi_{\Gamma}(x))(x).$$

(2) Если цель исследования — получить метрические свойства поверхности-образа взаимно однозначного отображения $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, где $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, $\varphi \in C^{\tilde{M}}(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$ (или если $\mathbb{M}$ — нильпотентная градуированная группа, то φ имеет гладкость $\lfloor \frac{\tilde{M}+k-1}{k} \rfloor$ по переменным степени k , $k = 1, \dots, M$), $\dim H_i - \dim H_{i-1} \leq \dim \tilde{H}_i - \dim \tilde{H}_{i-1}$, $i = 1, \dots, M$, $\dim H_0 = \dim \tilde{H}_0 = 0$, и ранг $D(\hat{D}_P\varphi(x))(x)$ всюду максимален, то $\hat{N} = \tilde{N}$, $\hat{M} = \tilde{M}$ и $\hat{\varphi} = \varphi$. Кроме того, $\mathbb{U} = \tilde{\mathbb{M}}$, а также

$$({}^xY_1, \dots, {}^xY_{\hat{N}}) = ({}^x\tilde{X}_1, \dots, {}^x\tilde{X}_{\tilde{N}}).$$

Соответствующее адаптированному базису отображение координат первого рода будем обозначать символом $\tilde{\theta}_{\widehat{\varphi}(x)}$. Кроме того, для $\varphi_{\Gamma} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$ будем полагать степень $\deg {}^x Y_j$ равной степени соответствующего базисного поля: $\deg {}^x Y_j = \deg X_j$ или $\deg {}^x Y_j = \deg \tilde{X}_{j-N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12 (ср. [2, 22]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^{\widehat{N}} w_i {}^x Y_i\right)(v)$, $w, v \in \mathbb{U}$. Определим величину ${}^x d_2(v, w)$ следующим образом:

$${}^x d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j:\deg {}^x Y_j=1} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j:\deg {}^x Y_j=2} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2.2}}, \dots, \left(\sum_{j:\deg {}^x Y_j=\widehat{M}} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2.\widehat{M}}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{U} : {}^x d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно ${}^x d_2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом ${}^x \text{Box}_2(v, r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.13 (ср. [2, 22]). Прообраз ${}^x d_2$ -шара ${}^x \text{Box}_2(\widehat{\varphi}(x), r)$ при отображении $\tilde{\theta}_{\widehat{\varphi}(x)}$ равен

$$\begin{aligned} \text{Box}_2(0, r) &= B_2^{\dim \text{span}\{{}^x Y_j : \deg {}^x Y_j=1\}}(0, r) \\ &\times B_2^{\dim \text{span}\{{}^x Y_j : \deg {}^x Y_j=2\}}(0, r^2) \times \dots \times B_2^{\dim \text{span}\{{}^x Y_j : \deg {}^x Y_j=\widehat{M}\}}(0, r^{\widehat{M}}), \end{aligned}$$

где B_2^l — евклидов шар размерности l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.14 (ср. [2, 5, 22]). Пусть выполнено одно из условий соглашения 3.11. Значение *адаптированной, или внутренней, меры $\mathcal{H}_{\Gamma}^{\nu}$* , построенной по базису ${}^x \mathcal{B}^{\widehat{\Delta}}$, для подмножеств $A \subset \widehat{\varphi}(\Omega)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{H}_{\Gamma}^{\nu}(A) = \prod_{j=1}^M \omega_{\dim V_j} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{\nu} : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\varphi}^{-1}(x_i) \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A . Мету $\mathcal{H}_{\Gamma}^{\nu}$, полученную для базиса ${}^x \mathcal{B}^{\widehat{\Delta}}$, будем обозначать символом $\widetilde{\mathcal{H}}_{\Gamma}^{\nu}$.

Опишем еще один основной результат статьи — формулу площади для классов гёльдеровых отображений на пространствах Карно — Каратеодори. Подчеркнем, что, в отличие от группового случая, и для произвольных отображений, и для отображений-графиков матрица дифференциала полиномиального субриманова дифференциала приводится к блочно-«верхнетреугольному» виду с блоками соответствующих размерностей [3, теорема 2.14].

Теорема 3.15. Пусть выполнено одно из условий соглашения 3.11. Тогда для вычисления $\mathcal{H}_{\Gamma}^{\nu}$ -меры поверхностей-образов отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \widetilde{\mathbb{M}}$ справедлива формула площади

$$\int_{\Omega} \sqrt{\det(D_{\text{diag}}(\widehat{D}_P \varphi(x))^*(x) D_{\text{diag}}(\widehat{D}_P \varphi(x))(x))} d\mathcal{H}^{\nu}(x) = \int_{\varphi(\Omega)} d\mathcal{H}_{\Gamma}^{\nu}(y),$$

где $D_{\text{diag}}(\widehat{D}_P \varphi(x))(x)$ состоит из «диагональных» блоков $D_{\Delta}(\widehat{D}_P \varphi(x))(x)$ ($D_{\Delta}(\widehat{D}_P \varphi(x))$ — матрица в базисе, приводящем ее к блочно-верхнетреугольному

виду; см. [3, 4]). Для $\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ -меры поверхностей-графиков эта формула имеет вид

$$\int_{\Omega} \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\mathcal{H}_\Gamma^\nu(y),$$

где

$$\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) = \prod_{j=1}^M \sqrt{\det(\widehat{E}_{n_j}^*(x)\widehat{E}_{n_j}(x) + \widehat{\mathcal{D}}_j^*(x)\widehat{\mathcal{D}}_j(x))},$$

$$\widehat{E}_{n_j}(x) = E_{n_j} + \widehat{R}_{j,j}(x), \quad \widehat{\mathcal{D}}_j(x) = D(\mathcal{D}_{\widehat{M}}\varphi(x))_{j,j} + \widehat{Q}_{j,j}(x), \quad j = 1, \dots, M.$$

Для $\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ -меры поверхностей-графиков эта формула имеет вид

$$\int_{\Omega} \widetilde{\mathcal{J}}(\varphi_\Gamma, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\mathcal{H}_\Gamma^\nu(y),$$

где

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\varphi_\Gamma, x) = \prod_{j=1}^M \sqrt{\det(E_{n_j} + D(\mathcal{D}_{\widehat{M}}\varphi(x))_{j,j}^* D(\mathcal{D}_{\widehat{M}}\varphi(x))_{j,j})}.$$

Кроме того, $|\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) - \widetilde{\mathcal{J}}(\varphi_\Gamma, x)| = O(\rho(x, \varphi_\Gamma(x)))$, где величина $O(1)$ ограничена равномерно по $x \in \mathcal{U} \Subset \Omega$.

Одним из основных шагов доказательства является

Лемма 3.16. Функции множества $\Phi, \widetilde{\Phi} : S \rightarrow \mathbb{R}$, где $S = \widehat{\varphi}(\Omega)$, заданные как

$$\Phi : A \mapsto \mathcal{H}_\Gamma^\nu(A) \quad \text{и} \quad \widetilde{\Phi} : A \mapsto \widetilde{\mathcal{H}}_\Gamma^\nu(A), \quad \text{где } A \subset S,$$

обладают следующими свойствами:

- (1) они абсолютно непрерывны относительно $\mathcal{H}^\nu$ на $\mathbb{M}$;
- (2) они (локально) аддитивны на удаленных шарах.

Теорема 3.15 и лемма 3.16 доказываются с очевидными изменениями по схеме, разработанной для вывода формулы площади на нильпотентных градуированных группах и группах Карно (см. подробности в [2, лемма 2.27, теорема 2.28], а также в [22]). А именно, при доказательстве леммы 3.16 первое свойство проверяется непосредственно с помощью определения меры Хаусдорфа, а второе — рассмотрением удаленных шаров, их пересечений с образом и построением покрытий, приближающих меру Хаусдорфа с помощью шаров малых радиусов.

Теорема 3.15 доказывается непосредственным рассмотрением сумм, аппроксимирующих величину $\mathcal{H}_\Gamma^\nu(\widehat{\varphi}(\text{Box}_2(x, r)))$ (величину $\widetilde{\mathcal{H}}_\Gamma^\nu(\varphi_\Gamma(\text{Box}_2(x, r)))$) и применением к ним результатов из [21] и [25]. В ходе рассуждений получаем, что в условиях (2) соглашения 3.11 верно

$$\Phi'(x) = \sqrt{\det(D_{\text{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))^*(x)D_{\text{diag}}(\widehat{D}_P\varphi(x))(x))},$$

а в условиях (1) соглашения 3.11 выполняется

$$\Phi'(x) = \prod_{j=1}^M \sqrt{\det(\widehat{E}_{n_j}^*(x)\widehat{E}_{n_j}(x) + \widehat{\mathcal{D}}_j^*(x)\widehat{\mathcal{D}}_j(x))},$$

$$\tilde{\Phi}'(x) = \prod_{j=1}^M \sqrt{\det(E_{n_j} + D(\mathcal{D}_{\hat{M}}\varphi(x))_{j,j}^* D(\mathcal{D}_{\hat{M}}\varphi(x))_{j,j})}.$$

Соотношение между $\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x)$ и $\tilde{\mathcal{J}}(\varphi_\Gamma, x)$ следует из замечания 3.9.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.17. Для классов отображений-графиков теорему 3.15 можно интерпретировать как результат о существовании меры на поверхности-образе, которая вычисляется способом, аналогичным классическому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманова М. Б. О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 305–332.
2. Карманова М. Б. Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.
3. Карманова М. Б. Полиномиальная субриманова дифференцируемость на пространствах Карно — Каратеодори // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1086–1097.
4. Карманова М. Б. Аппроксимация гёльдеровых отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 1. С. 5–8.
5. Карманова М. Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
6. Карманова М. Б. Поверхности-графики над трехмерными пространствами Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2015. Т. 463, № 3. С. 265–268.
7. Карманова М. Б. Поверхности-графики над трехмерными группами Ли с субримановой структурой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1351–1365.
8. Карманова М. Б. Трехмерные поверхности-графики на пятимерных пространствах Карно — Каратеодори // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 834–857.
9. Карманова М. Б. Поверхности-графики коразмерности два над трехмерными пространствами Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 6. С. 614–617.
10. Koranyi A., Reimann H. M. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
11. Koranyi A., Reimann H. M. Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
12. Warhurst B. Contact and quasiconformal mappings on real model filiform groups // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. V. 68. P. 329–343.
13. Warhurst B. Jet spaces as nonrigid Carnot groups // J. Lie Theory. 2005. V. 15. P. 341–356.
14. Basalaev S. G., Vodopyanov S. K. Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
15. Gromov M. Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser Verl., 1996. P. 79–318.
16. Karmanova M., Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics. Basel: Birkhäuser-Verl., 2009. P. 233–335.
17. Nagel A., Stein E. M., Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
18. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы Ли и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
19. Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin etc.: Springer-Verl., 2007.
20. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
21. Karmanova M., Vodopyanov S. An area formula for contact C^1 -mappings of Carnot manifolds // Complex. Var. Elliptic. Equ. 2010. V. 55, N 1–3. P. 317–329.
22. Карманова М. Б. Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.
23. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Contemporary mathematics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.

- 24. Карманова М. Б. Тонкие свойства базисных векторных полей на пространствах Карно — Каратеодори в условиях минимальной гладкости // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 87–99.
- 25. Karmanova M., Vodopyanov S. A coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Caratheodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128, N 1. P. 67–111.

Поступила в редакцию 10 октября 2017 г.

После доработки 4 октября 2018 г.

Принята к публикации 17 октября 2018 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com