Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. Kleprlík, A. O. Molchanova, T. Roskovec, Example of a smooth homeomorphism violating the Luzin N^{-1} property, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1133–1144

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.510>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.209.52.79

April 26, 2023, 13:11:04

ПРИМЕР ГЛАДКОГО ГОМЕОМОРФИЗМА,
НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО
 $\mathcal{N}^{-1}$ -СВОЙСТВУ ЛУЗИНА

Л. Клепрлик, А. О. Молчанова, Т. Росковец

Аннотация. Обсуждаются некоторые результаты о справедливости $\mathcal{N}$ - и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойств Лузина для гомеоморфизмов. Приведен контрпример гладкого гомеоморфизма, не обладающего $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.510

Ключевые слова: свойство Лузина, гладкий гомеоморфизм.

*Посвящается академику Юрию Григорьевичу Решетняку
по случаю его 90-летия*

1. Введение

В механике твердого тела тот факт, что вещество не может появиться или исчезнуть во время деформации, описывается двумя математическими условиями сохранения множеств нулевой меры — $\mathcal{N}$ - и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойствами Лузина. Будем говорить, что функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, удовлетворяет $\mathcal{N}$ -свойству Лузина, если для любого множества $E \subset \Omega$ справедливо

$$\mathcal{L}_N(E) = 0 \implies \mathcal{L}_N(f(E)) = 0.$$

Аналогично f удовлетворяет $\mathcal{N}^{-1}$ -свойству Лузина, если для любого $E \subset \Omega$ выполнено

$$\mathcal{L}_N(f(E)) = 0 \implies \mathcal{L}_N(E) = 0.$$

Символ $\mathcal{L}_N$ обозначает меру Лебега на $\mathbb{R}^N$. Вместе с существенным значением физической интерпретации эти свойства немаловажны и с математической точки зрения. В частности, они играют ключевую роль в формуле замены переменных (подробнее см. в [1, теорема 8.4; 2, гл. 5, теорема 2.5; 3]). Более того, для отображений классов Соболева $\mathcal{N}$ -свойство эквивалентно условиям, при которых справедлива формула площади, а $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство — условиям формулы ко-площади (см. [4; 5, гл. A.8]).

Последние несколько десятилетий свойствам Лузина уделяется большое внимание. Так, свойства сохранения множеств нулевой меры Хаусдорфа исследованы в [6–9], а результаты об отображениях из пространств, близких к $W^{1,N}$, можно найти в [10–13]. Общий подход к данным вопросам был развит в [14] при

Работа выполнена первым и третьим авторами при финансовой поддержке гранта GAČR 18–00960Y, вторым автором — частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17–01–00801a).

изучении отображений субримановых пространств. Кроме того, исследования свойств Лузина нашли применения при решении других аналитических задач. В частности, на основе примера отображения, не обладающего $\mathcal{N}$ -свойством Лузина, был построен гомеоморфизм с почти всюду нулевым якобианом [15]. Интересная связь якобиана в смысле распределений и $\mathcal{N}$ -свойства описана в [16, 17]. Более подробная информация о формуле ко-площади в пространствах Соболева дана, например, в [4, 18–20]. Другие относящиеся к этой теме результаты можно найти в работах о теореме Морса — Сарда [6–8]. Липшицевы отображения классов Соболева на метрических пространствах исследованы в статьях [21, 22], результаты которых послужили основой для обобщения теоремы Дубовицкого и формулы ко-площади нового типа [23]. Следует отметить также, что перечисленный список публикаций не является исчерпывающим.

Рассмотрим подробнее вопрос о достаточных условиях $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойств Лузина. В 1966 г. Ю. Г. Решетняк доказал [24], что $\mathcal{N}$ -свойство выполнено для $W^{1,N}$ -гомеоморфизма. Позже в 1973 г. общий случай отображений классов Соболева $W^{1,p}$ при $p > N$ был исследован Маркусом и Мизелем [25]. Первый контрпример отображения, не удовлетворяющего свойству Лузина, описан Чезари [26] в 1944 г. и затем улучшен Мали и Мартио [27] в 1995 г. А именно, они нашли непрерывное отображение класса Соболева $W^{1,p}([0, 1]^N, [0, 1]^M)$, $M \in \mathbb{N}$, $p \leq N$, не обладающее $\mathcal{N}$ -свойством. Второй контрпример появился в 1971 г. в работе С. П. Пономарева [28] (см. также [29]), где был представлен гомеоморфизм класса $W^{1,p}([0, 1]^N, [0, 1]^N)$ при $p < N$, который не обладает $\mathcal{N}$ -свойством. Подробнее данная конструкция описана в разд. 2. Заметим, что метод построения существенно отличается от метода, предложенного Чезари, и не может быть получен простой модификацией последнего.

Как только свойства Лузина были полностью описаны для отображений классов Соболева, естественно появляется вопрос о возможности других аналитических условий, обеспечивающих свойства Лузина. Ответ может быть представлен в рамках квазиконформного анализа. Эта теория была существенно развита в 1960-х гг. в работах Ю. Г. Решетняка (см. [2, 30] и данные там ссылки, а также монографии [31, 32]). В частности, Ю. Г. Решетняк ввел и исследовал отображения с ограниченным искажением и установил связь между такими геометрическими свойствами этих отображений, как открытость, дискретность и свойства Лузина. В настоящее время основное направление развития этой теории посвящено изучению класса отображений с конечным искажением, который был введен в [33] (см. также [34]). Читатель найдет обзор основных результатов, историю и приложения в теории уравнений в частных производных и нелинейной теории упругости в [5, 35, 36].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — открытое множество. Отображение $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ имеет *конечное искажение*, если якобиан $J_f := \det Df$ принадлежит $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ и $|Df(x)| = 0$ для почти всех точек множества $\{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$. Функция q -искажения $K_{f,q}$, $1 \leq q < \infty$, определяется формулой

$$K_{f,q}(x) = \begin{cases} \frac{|Df(x)|}{|J_f(x)|^{1/q}}, & \text{если } J_f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Упомянутые выше геометрические свойства тесно связаны с вопросом композиции отображений (см., например, [37–39]). Так, $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство Лузина является необходимым условием для того, чтобы отображение f индуцировало

ограниченный оператор композиции $f^* : L^{1,p} \rightarrow L^{1,q}$ однородных пространств Соболева при $1 \leq q \leq p \leq N$ [40–42]. Этот результат может быть сформулирован также и в терминах функции искажения.

Теорема 1.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — открытое множество, а $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ — гомеоморфизм с конечным искажением, причем $K_{f,q} \in L_{\text{loc}}^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ для некоторого числа $1 \leq q \leq N$. Тогда f удовлетворяет $\mathcal{N}^{-1}$ -свойству Лузина.

Более того, если $1 \leq q < \infty$ и $\delta > 0$, то существует гомеоморфизм $f \in W^{1,1}([0, 1]^N, \mathbb{R}^N)$ с конечным искажением, который отображает $[0, 1]^N$ на $[0, 1]^N$, и

- $K_{f,q} \in L^\infty([0, 1]^N)$, если $q > N$,

или

- $K_{f,q} \in L^{\frac{q}{q-1+\delta}}([0, 1]^N)$, если $q \leq N$,

причем f не удовлетворяет $\mathcal{N}^{-1}$ -свойству Лузина.

Первую часть этой теоремы в случае $q = N$ доказали Кауханен, Коскела и Мали [43], в то время как контрпример, основанный на примере Пономарева с подходящими параметрами, был построен Коскелой и Мали в [44].

Заметим, что теорема 1.2 дает неуплучшаемый результат в терминах коэффициента искажения. В настоящей работе поставлен вопрос о необходимости $\mathcal{N}^{-1}$ -свойства Лузина для C^∞ -гладкого отображения. Ответ на этот вопрос отрицательный, и соответствующий контрпример приведен в разд. 3.

ПРИМЕР 1.3. Существует гомеоморфизм $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, не удовлетворяющий $\mathcal{N}^{-1}$ -свойству Лузина, причем $g(x) = x$ вне $(0, 1)^N$.

Подобный вопрос для $\mathcal{N}$ -свойства Лузина рассматривается в [45]. Ответ отрицательный, более того, там приведена характеристика пространств Соболева высокого порядка. Далее в тексте символом $f^{(k)}$ обозначается k -я производная f , а f^n используется для элементов последовательности. Также используется обозначение $C^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k$, но не предполагается аналитичности отображений.

2. Пример Пономарева

Гомеоморфизм Пономарева $f : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1]^N$ задается как предел некоторой последовательности гомеоморфизмов $\{f^n\}$. Приведем схему построения и некоторые ее свойства, подробное описание примера можно найти в [5] или в оригинальных работах [28, 29]. Конструкция задается двумя убывающими последовательностями положительных параметров $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Итоговое отображение f переводит канторово множество C_1 меры $\mathcal{L}(C_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^N$ в канторово множество C_2 меры $\mathcal{L}(C_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^N$. Следовательно, с подходящим выбором параметров можно отобразить множество меры нуль на множество положительной меры, и наоборот. Более того, данная конструкция позволяет также контролировать коэффициент искажения [43, 44].

Начнем с $f^0 = \text{Id}$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$. Схема основывается на последовательной замене отображения f^n на f^{n+1} на 2^{nN} кубах с длиной ребра $2^{-n}a_n$. Выберем один из таких кубов и обозначим его через Q_n . Пусть Q_n^* — меньший куб с длиной ребра, равной $2^{-n}a_{n+1}$, и с тем же центром, что и Q_n . Функция f^{n+1} линейно отображает Q_n^* на куб с длиной ребра $2^{-n}b_{n+1}$ и тем же центром, что и $f^n(Q_n)$, длина ребра последнего равна $2^{-n}b_n$. Прделаем те же действия со всеми кубами типа Q_n . Наконец, каждую копию Q_n^* разобьем на 2^N кубов с в два

Рис. 1. Замена f^n на f^{n+1} для $N = 1$ Рис. 2. Итерация замены f^n на f^{n+1} для $N = 2$

раза меньшей длиной ребра, и эти кубы образуют новое поколение Q_{n+1} . На рис. 1 приведен один шаг схемы в одномерном случае и на рис. 2 — в двумерном; в обоих случаях $a_n \rightarrow 1/2$ и $b_n \rightarrow 0$.

Следует отметить, что отображение f^{n+1} в области $Q_n \setminus Q_n^*$, которая отображается на $f_n(Q_n) \setminus f_{n+1}(Q_n^*)$, должно быть биективным, но только в одномерном случае это может быть сделано непосредственно линейным отображением, как показано на рис. 1. Оригинальная формула использует выражение типа $\frac{x}{\|x\|_{\max}}$ в определении f^{n+1} на $Q_n \setminus Q_n^*$ для $N > 1$. Такой выбор обеспечивает непрерывность, но нарушает гладкость на «диагональных» множествах $x_i = x_j$, $i \neq j$. В итоге итерационного процесса получается соболевский гомеоморфизм, производные которого достаточно просто оцениваются на каждом шаге, но при этом отсутствует гладкость на границах кубов Q_n и на некоторых их диагональных частях.

Приведем классический выбор параметров:

(1) $a_n = \frac{1}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n+1})$ — нарушение $\mathcal{N}$ -свойства Лузина для гомеоморфизма класса Соболева $W^{1,p}$, $p < N$, с конечным искажением;

(2) $a_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n+1})$, $b_n = \frac{1}{n+1}$ — нарушение $\mathcal{N}^{-1}$ -свойства Лузина для липшицева отображения с $K_{f,N} \in L^p$ для $p < \frac{N}{N-1}$.

В [45] с помощью аналогичной схемы построено гладкое отображение. Схема включает дополнительный набор параметров $\{r_n\}$, которые задают радиус сглаживающего ядра. Конструкция также отличается от первоначальной на множествах $Q_n \setminus Q_n^*$, где выбор биективного отображения, сохраняющего нужную гладкость в том числе на границе и диагональных частях, неочевиден. Правильный выбор параметров может дать следующие результаты:

(1) $a_n = 2^{-nA}$, $b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n}}$, $r_n = \frac{a_n}{100}$; $A > \max\{\frac{kp}{N-kp}, 2\}$ — нарушение $\mathcal{N}$ -свойства Лузина для гомеоморфизма класса $W^{k,p} \subset C^{k-1}$, $kp < N$;

(2) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, $b_n = 2^{-n^2}$, $r_n = \frac{1}{100n}$ — нарушение $\mathcal{N}^{-1}$ -свойства Лузина для гомеоморфизма класса $W^{1,1} \cap C^\infty$;

(3) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, $b_i = \frac{1}{n}$, $r_i = \frac{1}{100n}$ — нарушение $\mathcal{N}^{-1}$ -свойства Лузина для липшицева отображения с конечным искажением, которое обладает C^∞ -гладкостью вне границы канторовского множества.

Случай (1) описывает результат из [45], в то время как (2) и (3) являются новыми. В настоящей работе не приводится подробное описание этих случаев, так как результат не дает значительных преимуществ по отношению к схеме, представленной в разд. 3. Соответствующее отображение читатель может построить самостоятельно, действуя по схеме, заданной в [45]. Основное отличие заключается в том, что метод, представленный в разд. 3, «сжимает» канторовское множество только в одном направлении, в то время как упомянутая выше конструкция сжимается во всех направлениях, что позволяет исследовать более точные меры Хаусдорфа. При этом построение примера из данного раздела технически громоздко, поскольку сохранение гладкости и биективности на каждом шаге требует гораздо больших усилий.

3. C^∞ -гомеоморфизм, не удовлетворяющий $\mathcal{N}^{-1}$ -свойству Лузина

3.1. Гладкая функция, отображающая одно канторовское множество на другое канторовское множество. Построим функцию $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, биективно отображающую канторовский дисконтинуум положительной меры на канторовский дисконтинуум нулевой меры. Функция задается как предел последовательности гладких гомеоморфизмов $f^n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, каждый из которых отображает n -й шаг построения канторовского множества в прообразе на n -й шаг построения канторовского множества в образе. Идея проиллюстрирована первыми тремя элементами последовательности $\{f^n\}$ на рис. 3.

Рис. 3. Первые три шага построения f

Начнем с двух строго убывающих последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, принимающих значения в интервале $(0, 1)$. Рассмотрим функцию $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенную формулой

$$\phi(x) = \frac{\psi(x)}{\psi(x) + \psi(1-x)},$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что ϕ — убывающий гомеоморфизм, отображающий $[0, 1]$ на $[0, 1]$, причем $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi \in C^\infty[0, 1]$, и $\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(1) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Положим $f^0(x) = x$, $I_1^0 = [x_1^0, y_1^0] = [0, 1]$, $J_1^0 = [z_1^0, w_1^0] = [0, 1]$ и $a_0 = b_0 = 1$. Для $n \geq 1$ и $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ определим

$$\begin{aligned} x_{2i-1}^n &= x_i^{n-1} + 2^{-n-1}a_{n-1} - 2^{-n-1}a_n, \\ x_{2i}^n &= y_i^{n-1} - 2^{-n-1}a_{n-1} - 2^{-n-1}a_n, \\ y_{2i-1}^n &= x_i^{n-1} + 2^{-n-1}a_{n-1} + 2^{-n-1}a_n, \\ y_{2i}^n &= y_i^{n-1} - 2^{-n-1}a_{n-1} + 2^{-n-1}a_n, \\ z_{2i-1}^n &= z_i^{n-1} + 2^{-n-1}b_{n-1} - 2^{-n-1}b_n, \\ z_{2i}^n &= w_i^{n-1} - 2^{-n-1}b_{n-1} - 2^{-n-1}b_n, \\ w_{2i-1}^n &= z_i^{n-1} + 2^{-n-1}b_{n-1} + 2^{-n-1}b_n, \\ w_{2i}^n &= w_i^{n-1} - 2^{-n-1}b_{n-1} + 2^{-n-1}b_n. \end{aligned}$$

На n -м шаге у нас есть 2^n попарно не пересекающихся промежутков $I_i^n = [x_i^n, y_i^n]$ суммарной длины a_n и $J_i^n = [z_i^n, w_i^n]$ суммарной длины b_n , $1 \leq i \leq 2^n$. Определим гладкую функцию f^n , отображающую I_i^k на J_i^k , $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq 2^k$ (рис. 4):

$$f^n(x) = \begin{cases} f^{n-1}(x), & x \notin \bigcup_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} I_i^{n-1}, & (I) \\ \phi\left(\frac{x-x_i^n}{y_i^n-x_i^n}\right)(z_i^n-w_i^n) + w_i^n, & x \in I_i^n, \ 1 \leq i \leq 2^n, & (II) \\ \phi\left(\frac{x-x_{2i-1}^{n-1}}{x_{2i-1}^{n-1}-x_i^{n-1}}\right)(w_{2i-1}^n-w_i^{n-1}) + w_i^{n-1}, & x \in [x_i^{n-1}, x_{2i-1}^n], \ 1 \leq i \leq 2^{n-1}, & (III) \\ \phi\left(\frac{x-y_{2i}^n}{y_i^n-y_{2i}^n}\right)(z_i^{n-1}-z_{2i}^n) + z_{2i}^n, & x \in [y_{2i}^n, y_i^{n-1}], \ 1 \leq i \leq 2^{n-1}, & (IV) \\ \phi\left(\frac{x-y_{2i-1}^n}{x_{2i-1}^n-y_{2i-1}^n}\right)(w_{2i}^n-z_{2i-1}^n) + z_{2i-1}^n, & x \in [y_{2i-1}^n, x_{2i}^n], \ 1 \leq i \leq 2^{n-1}. & (V) \end{cases} \quad (3.1)$$

Функция f^n кусочно гладкая. Более того, $(f^n)^{(k)}(x_i^j) = 0 = (f^n)^{(k)}(y_i^j)$ для всех $k \geq 1$, $n \geq 1$, $1 \leq j \leq n$ и $1 \leq i \leq 2^j$. Отсюда получаем, что f^n гладкая на всем отрезке $[0, 1]$. Покажем, что $\{f^n\}$ является фундаментальной последовательностью в топологии C^k для любого $k \geq 0$. В самом деле, если $m \leq n$, то $f^n = f^m$ вне множества $\bigcup_{1 \leq i \leq 2^m} I_i^m$ и $f^m(I_i^m) = f^n(I_i^m) = J_i^m$. Следовательно, имеет место оценка

$$\max_{[0,1]} |f^n(x) - f^m(x)| = \max_{1 \leq i \leq 2^m} \max_{I_i^m} |f^n(x) - f^m(x)| \leq \max_{1 \leq i \leq 2^m} \text{diam } J_i^m = 2^{-m}b_m \rightarrow 0$$

Рис. 4. Определение f^n формулой (3.1)

при $m \rightarrow \infty$. Для $k \geq 1$ вычислим

$$\max_{[0,1]} |(f^n - f^m)^{(k)}(x)| \leq \max_{\bigcup_{1 \leq i \leq 2^m} I_i^m} |(f^n)^{(k)}(x)| + \max_{\bigcup_{1 \leq i \leq 2^m} I_i^m} |(f^m)^{(k)}(x)|. \quad (3.2)$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое в (3.2). Для $x \in I_i^m$, $1 \leq i \leq 2^m$, получаем

$$|(f^m)^{(k)}(x)| = \phi^{(k)}\left(\frac{x - x_i^m}{y_i^m - x_i^m}\right)(z_i^m - w_i^m)(y_i^m - x_i^m)^{-k} \leq \max_{[0,1]} |\phi^{(k)}| \frac{2^{-m} b_m}{(2^{-m} a_m)^k}.$$

Первое слагаемое в (3.2) можно оценить, заметив, что $f^n = f^l$ на $I_i^{l-1} \setminus (I_{2i-1}^l \cup I_{2i}^l)$ для $1 \leq l \leq n-1$ и $1 \leq i \leq 2^{l-1}$. Тогда

$$\max_{\bigcup_{1 \leq i \leq 2^m} I_i^m} |(f^n)^{(k)}| = \max\left\{ \max_{\bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} I_i^n} |(f^n)^{(k)}|, \max_{m \leq l \leq n-1} \max_{\bigcup_{1 \leq i \leq 2^l} (I_i^{l-1} \setminus (I_{2i-1}^l \cup I_{2i}^l))} |(f^l)^{(k)}| \right\}.$$

Как и ранее, для всех $x \in I_i^n$, $1 \leq i \leq 2^n$, имеем

$$|(f^n)^{(k)}(x)| \leq \max_{[0,1]} |\phi^{(k)}| \frac{2^{-n} b_n}{(2^{-n} a_n)^k}.$$

С помощью формулы (3.1) получаем, что для всех $x \in I_i^{l-1} \setminus (I_{2i-1}^l \cup I_{2i}^l)$, $m \leq l \leq n-1$ и $1 \leq i \leq 2^{l-1}$ справедливо

$$\begin{aligned} |(f^l)^{(k)}(x)| &\leq \max_{[0,1]} |\phi^{(k)}| \max\left\{ \frac{w_{2i-1}^l - w_i^{l-1}}{(x_{2i-1}^l - x_i^{l-1})^k}, \frac{z_i^{l-1} - z_{2i}^l}{(y_i^{l-1} - y_{2i}^l)^k}, \frac{w_{2i}^l - z_{2i-1}^l}{(x_{2i}^l - y_{2i-1}^l)^k} \right\} \\ &= \max_{[0,1]} |\phi^{(k)}| \frac{2^{-l-1}(b_{l-1} - b_l)}{(2^{-l-1}(a_{l-1} - a_l))^k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \max_{[0,1]} |(f^n - f^m)^{(k)}| \\ & \leq \max_{[0,1]} |\phi^{(k)}| \max \left\{ \frac{2^{-m} b_m}{(2^{-m} a_m)^k}, \frac{2^{-n} b_n}{(2^{-n} a_n)^k}, \max_{m \leq l \leq n-1} \frac{2^{-l-1} (b_{l-1} - b_l)}{(2^{-l-1} (a_{l-1} - a_l))^k} \right\}. \end{aligned}$$

Выбор параметров $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$ и $b_n = 2^{-n^2}$ обеспечит сходимость к нулю всех слагаемых при n , стремящемся к бесконечности, и тем самым $\{f^n\}$ — фундаментальная последовательность в топологии C^k -гладких функций.

Наконец, положим $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$. Легко видеть, что это отображение гладкое, инъективное и сюръективное. Кроме того,

$$f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} I_i^n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} J_i^n,$$

но

$$\mathcal{L}_1\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} I_i^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2 \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_1\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} J_i^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Значит, f не обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина.

Полученная функция f бесконечно гладкая на $[0, 1]$, но не может быть гладко продолжена тождественным отображением, так как $f^{(1)} = 0 \neq 1 = (x)^{(1)}$. Следовательно, необходимо изменить f на $[x_1^0, x_1^1] = [0, \frac{1}{4}(a_0 - a_1)]$ и $[y_2^1, y_1^0] = [1 - \frac{1}{4}(a_0 - a_1), 1]$, как показано на рис. 5.

Рис. 5. Функция $s(x)$, гладко «склеивающая» тождественное отображение

Определим

$$s(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin (0, 1), \\ f(x), & \text{если } x \in (x_1^1, y_2^1), \\ \int_0^x \phi\left(1 - \frac{2t}{x_1^1}\right) dt, & \text{если } x \in (0, \frac{1}{2}x_1^1], \\ \frac{x_1^1}{4} + \left(z_1^1 - \frac{x_1^1}{2}\right)\phi\left(\frac{2x}{x_1^1} - 1\right), & \text{если } x \in (\frac{1}{2}x_1^1, x_1^1], \\ w_2^1 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}y_2^1 - w_2^1\right)\phi\left(\frac{2(x-y_2^1)}{1-y_2^1}\right), & \text{если } x \in [y_2^1, \frac{1}{2}(1+y_2^1)), \\ 1 - \int_x^1 \phi\left(\frac{2t-1-y_2^1}{1-y_2^1}\right) dt, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}(1+y_2^1), 1]. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \phi(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$s(x_1^1/2) = x_1^1/4 = \lim_{x \rightarrow (x_1^1/2)_+} s(x),$$

$$s(1/2(1 + y_1^2)) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}y_2^1 = \lim_{x \rightarrow (1/2(1+y_1^2))_+} s(x),$$

а значит, $s \in C(\mathbb{R})$. Более того, так как $s^{(1)}(0) = s^{(1)}(1) = 1$, $s^{(k)}(0) = s^{(k)}(1) = 0$ для $k \geq 2$, и $s^{(m)}(x_1^1) = s^{(m)}(x_1^1/2) = s^{(m)}(y_2^1) = s^{(m)}(1/2(1 + y_1^2)) = 0$ для $m \geq 1$, получаем, что $s \in C^\infty(\mathbb{R})$.

3.2. Отображение из примера 1.3. Положим $h = (s(x_1), x_2, \dots, x_N)$. Функция h гладкая и удовлетворяет равенству

$$h\left(\bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} I_i^n \times [0, 1]^{N-1}\right) = \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} J_i^n \times [0, 1]^{N-1}.$$

Более того,

$$\mathcal{L}_N\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} I_i^n \times [0, 1]^{N-1}\right) = 1/2 \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_N\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} J_i^n \times [0, 1]^{N-1}\right) = 0.$$

Как и ранее, остается изменить функцию вблизи границы, чтобы ее можно было продлить тождественным образом. Этого можно добиться выпуклой комбинацией тождественного отображения и $h(x)$. Рассмотрим такую функцию $\delta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, что $\delta(t) \in C^\infty[0, 1]$, $\delta(t) = 0$ на $(-\infty, \frac{1}{8}] \cup [\frac{7}{8}, \infty)$ и $\delta(t) = 1$ на $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, например $\delta(t) = \phi(8t - 1) - \phi(8t - 6)$. Положим

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) = \delta(x_2) \dots \delta(x_N) h(x) + (1 - \delta(x_2) \dots \delta(x_N)) x$$

$$= (\delta(x_2) \dots \delta(x_N) s(x_1) + (1 - \delta(x_2) \dots \delta(x_N)) x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Легко видеть, что g — гладкое отображение, не обладающее $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина и совпадающее с тождественным вне $(0, 1)^N$. Осталось проверить, что g инъективно. В самом деле, если $g(x_1, \dots, x_N) = g(y_1, \dots, y_N)$, то $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, $\dots$, $x_N = y_N$. Предположим, что $x_1 < y_1$. Так как h — строго возрастающая функция, имеем $h(x_1) < h(y_1)$ и хотя бы одно из выражений $\delta(x_2) \dots \delta(x_N)$ или $1 - \delta(x_2) \dots \delta(x_N)$ отлично от нуля. Следовательно,

$$\delta(x_2) \dots \delta(x_N) h(x_1) + (1 - \delta(x_2) \dots \delta(x_N)) x_1$$

$$< \delta(x_2) \dots \delta(x_N) h(y_1) + (1 - \delta(x_2) \dots \delta(x_N)) y_1,$$

что приводит к противоречию.

4. Открытые вопросы

Легко видеть, что отображение g , построенное в разд. 3, не имеет конечного искажения. Как упомянуто во введении, авторы считают, что конструкция из работы [45] может привести к отображению с конечным искажением, не обладающим $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина. Однако предложенная там схема делает практически невозможным оценить функцию искажения $K_{f,p}$.

По аналогии с теоремой 1.2 возникает естественный вопрос о том, существует ли отображение с конечными искажением и $K_{f,p} \in L^q$ для любого q , сколь угодно близкого к $\frac{p}{p-1}$. Если $p < N$ ответ отрицательный, он получается из следующей леммы ввиду того, что $\frac{p}{N-1} < \frac{p}{p-1}$.

Лемма 4.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — открытое множество и f — C^1 -гомеоморфизм. Предположим также, что существует $p \in [1, N)$, для которого $K_{f,p} \in L^{\frac{p}{N-1}}(\Omega)$. Тогда f обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что C^1 -регулярность f обеспечивает $|Df| \in L^\infty(\Omega)$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|Df(x)|}{|J_f(x)|^{\frac{1}{N}}} \right)^{\frac{N}{N-1}} dx \leq \|Df\|_{\infty}^{\frac{N-p}{N-1}} \int_{\Omega} \left(\frac{|Df(x)|}{|J_f(x)|^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{p}{N-1}} dx$$

и $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство вытекает из теоремы 1.2. $\square$

К сожалению, авторы не знают, может ли C^1 - или C^∞ -гладкое отображение с $K_{f,p} \in L^{\frac{p}{N-1}-\epsilon}$ нарушать $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство. Авторы склонны считать, что в первом случае ответ будет положительным, в то время как во втором случае было бы странным ожидать, что C^∞ -функция с $K_{f,p} \in L^{\frac{p}{N-1}-\epsilon}$ может не обладать $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством. Данные вопросы остаются открытыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bojarski B., Iwaniec T. Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1983. V. 8. P. 257–324.
2. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.
3. Hajlasz P. Change of variables formula under minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
4. Malý J., Swanson D., Ziemer W. P. The co-area formula for Sobolev mappings // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355, N 2. P. 477–492.
5. Hencl S., Koskela P. Lectures on mappings of finite distortion. Cham: Springer-Verl., 2014 (Lect. Notes Math.; V. 2096).
6. Bourgain J., Korobkov M., Kristensen J. On the Morse–Sard property and level sets of Sobolev and BV functions // Rev. Mat. Iberoam. 2013. V. 29, N 1. P. 1–23.
7. Ferone A., Korobkov M., Roviello A. Morse–Sard theorem and Luzin N -property: a new synthesis result for Sobolev spaces. Preprint available <https://arxiv.org/abs/1809.00423v2>, 2018.
8. Korobkov M. V., Kristensen J. On the Morse–Sard theorem for the sharp case of Sobolev mappings // Indiana Univ. Math. J. 2014. V. 63, N 6. P. 1703–1724.
9. Korobkov M. V., Kristensen J. The trace theorem, the Luzin N - and Morse–Sard properties for the sharp case of Sobolev–Lorentz mappings // J. Geom. Anal. 2018. V. 28, N 3. P. 2834–2856.
10. Kauhanen J., Koskela P., Malý J. On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscr. Math. 1999. V. 100, N 1. P. 87–101.
11. Koskela P., Malý J., Zürcher T. Luzin’s condition (N) and Sobolev mappings // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 2012. V. 23, N 4. P. 455–465.
12. Martio O., Ziemer W. P. Luzin’s condition (N) and mappings with nonnegative Jacobians // Michigan Math. J. 1992. V. 39, N 3. P. 495–508.
13. Koskela P., Malý J., Zürcher T. Luzin’s condition (N) and modulus of continuity // Adv. Calc. Var. 2015. V. 8, N 2. P. 155–171.
14. Водопьянов С. К. Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
15. Hencl S. Sobolev homeomorphism with zero Jacobian almost everywhere // J. Math. Pures Appl. (9). 2011. V. 95, N 4. P. 444–458.
16. D’Onofrio L., Hencl S., Malý J., Schiattarella R. Note on Luzin (N) condition and the distributional determinant // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439, N 1. P. 171–182.
17. Henao D., Mora-Corral C. Luzin’s condition and the distributional determinant for deformations with finite energy // Adv. Calc. Var. 2012. V. 5, N 4. P. 355–409.
18. Csörnyei M., Hencl S., Malý J. Homeomorphism in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // J. Reine Angew. Math. 2010. V. 644. P. 221–235.

19. Hajłasz P. Sobolev mappings, co-area formula and related topics // Proc. on Analysis and Geometry (Russian) (Novosibirsk Akademgorodok, 1999). Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. P. 227–254.
20. Malý J. Coarea properties of Sobolev functions // Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Teistungen, 2001). Basel: Birkhäuser, 2003. P. 371–381.
21. Карманова М. Б. Формулы площади и коплощади для отображений классов Соболева со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 778–788.
22. Karmanova M. Rectifiable sets and coarea formula for metric-valued mappings // J. Funct. Anal. 2008. V. 254, N 5. P. 1410–1447.
23. Hajłasz P., Korobkov M. V., Kristensen J. A bridge between Dubovitskii–Federer theorems and the coarea formula // J. Funct. Anal. 2017. V. 272, N 3. P. 1265–1295.
24. Решетняк Ю. Г. Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 4. С. 886–919.
25. Marcus M., Mizel V. J. Transformations by functions in Sobolev spaces and lower semicontinuity for parametric variational problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. P. 790–795.
26. Cesari L. Sulle trasformazioni continue // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1942. V. 21. P. 157–188.
27. Malý J., Martio O. Lusin’s condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 458. P. 19–36.
28. Пономарев С. П. Пример гомеоморфизма $ACTL^p$, не являющегося абсолютно непрерывным в смысле Банаха // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. С. 1053–1054.
29. Пономарев С. П. Об N -свойстве гомеоморфизмов класса W_p^1 // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 140–148.
30. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
31. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
32. Rickman S. Quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1993 (Ser. Mod. Surv. Math.; V. 26).
33. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 399–411.
34. Iwaniec T., Šverák V. On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118. P. 185–188.
35. Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2009 (Princeton Math. Ser.; V. 48).
36. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and non-linear analysis. New York: Oxf. Univ. Press, 2001.
37. Gehring F. W. Lipschitz mappings and the p -capacity of rings in n -space // Advances in the theory of Riemann surfaces. Ann. Math. Stud. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. V. 66. P. 175–193.
38. Пономарев С. П. N^{-1} -свойство отображений и условие (N) Лузина // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 3. С. 411–418.
39. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 17–65.
40. Kleprlík L. Mappings of finite signed distortion: Sobolev spaces and composition of mappings // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 386, N 2. P. 870–881.
41. Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
42. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. Т. 46, № 10. С. 11–33.
43. Kauhanen J., Koskela P., Malý J. Mappings of finite distortion: condition N // Mich. Math. J. 2001. V. 49, N 1. P. 169–181.
44. Koskela P., Malý J. Mappings of finite distortion: the zero set of the Jacobian // J. Eur. Math. Soc. 2003. V. 5, N 2. P. 95–105.

45. Roskovec T. Higher order Sobolev homeomorphisms and mappings and the Lusin (N) condition // Rev. Mat. Comput. 2018. V. 31, N 2. P. 379–406.

Поступила в редакцию 12 февраля 2019 г.

После доработки 4 марта 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Luděk Kleprlik (Клепрлик Людек)
Faculty of Information Technology,
Czech Technical University in Prague,
Thákurova 9, 160 00 Prague 6, Czech Republic;
kleprluk@fit.cvut.cz

Молчанова Анастасия Олеговна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Венский университет, Институт математики,
Оскар-Моргенштерн-платц, 1, Вена 1090
a.molchanova@math.nsc.ru

Tomáš Roskovec (Росковец Томаш)
Faculty of Economics,
University of South Bohemia,
Studentská 13, České Budějovice, Czech Republic;
Faculty of Information Technology,
Czech Technical University in Prague,
Thákurova 9, 160 00 Prague 6, Czech Republic.
troskovec@ef.jcu.cz