S. L. Kruskal, On Fredholm eigenvalues of unbounded polygons, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1145–1152

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.511>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.198.64.247
April 26, 2023, 03:15:04

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ ФРЕДГОЛЬМА НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

С. Л. Крушкаль

Аннотация. Важной открытой проблемой в комплексном анализе является нахождение алгоритмов для явного выражения основных функционалов, внутренне связанных с конформными и квазиконформными отображениями, таких как нормы Тейхмюллера и Грунскогo, собственные значения Фредгольма и коэффициент квазиотражения. Эта проблема не была решена даже для общих четырехугольников. В статье дается ограниченное решение этой проблемы для неограниченных прямолинейных многоугольников.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.511

Ключевые слова: собственные значения Фредгольма, многоугольник, однолистная функция, квазиконформное отображение, неравенства Грунскогo, универсальное пространство Тейхмюллера.

Юрию Григорьевичу Решетняку
к 90-летию юбилею

1. Введение

1.1. Вводные замечания. Основные функционалы, внутренне связанные с конформными и квазиконформными отображениями, такие как их нормы Тейхмюллера и Грунскогo, первое собственное значение Фредгольма и коэффициент квазиотражения, дают глубокую количественную характеристику свойств этих отображений. Задача нахождения алгоритмов для явного выражения этих величин для индивидуальных квазиокружностей или квазиинтервалов весьма важна также и в приложениях геометрического комплексного анализа. Эта проблема все еще не решена даже для общих четырехугольников.

Напомним, что *собственные значения Фредгольма* ρ_n ориентированной замкнутой жордановой кривой L на сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ определяются как собственные значения ее потенциала двойного слоя или, что эквивалентно, интегрального уравнения

$$u(z) + \frac{\rho}{\pi} \int_L u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \frac{1}{|\zeta - z|} ds_\zeta = h(z),$$

у которого имеется много приложений (здесь n_ζ — внешняя нормаль и ds_ζ — элемент длины в точке $\zeta \in L$).

Наименьшее положительное собственное значение $\rho_L = \rho_1$ играет ключевую роль и естественно связано с конформными и квазиконформными отображениями. Его можно определить для всякой ориентированной замкнутой жордановой кривой L формулой

$$\frac{1}{\rho_L} = \sup \frac{|\mathcal{D}_G(u) - \mathcal{D}_{G^*}(u)|}{\mathcal{D}_G(u) + \mathcal{D}_{G^*}(u)},$$

где G и G^* — области внутри и вне кривой L соответственно; $\mathcal{D}$ — интеграл Дирихле, а супремум берется по всем функциям u , непрерывным на $\widehat{\mathbb{C}}$ и гармоническим в $G \cup G^*$. В частности, $\rho_L = \infty$ для окружности.

Оценку сверху для ρ_L дает неравенство Альфорса [1]

$$\frac{1}{\rho_L} \leq q_L, \quad (1)$$

где q_L — минимальная дилатация квазиотражений относительно L . Неравенство (1) остается инвариантным относительно мёбиусовых преобразований $\widehat{\mathbb{C}}$ и служит предпосылкой определения ρ_L . Эта величина внутренне связана с оператором Грунского, что качественно выражается известной теоремой Кюнау — Шиффера, утверждающей, что величина ρ_L обратна норме Грунского $\varkappa(f)$ отображения Римана области внутри кривой L (ср. с [2, 3]). До сих пор точные или даже приближенные значения величины ρ_L были найдены только для некоторых специальных наборов кривых и дуг.

Квазиконформные отражения (или квазиотражения) представляют собой частный случай топологических инволюций сферы $S^2 = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, меняющих ориентацию. Всякое квазиотражение сохраняет каждую точку квазиокружности $L \subset \widehat{\mathbb{C}}$, меняя местами области внутри и вне нее (поскольку ввиду [4] всякое множество $E \subset S^2$, допускающее квазиотражения, с необходимостью расположено на квазиокружности с тем же коэффициентом отражения).

Для произвольного зеркала E определяются его *коэффициент отражения*

$$q_E = \inf \|\partial_z f / \partial_{\bar{z}} f\|_\infty$$

(где инфимум берется по всем квазиотражениям относительно E) и *квазиконформная дилатация* $Q_E = (1 + q_E)/(1 - q_E) \geq 1$. Ввиду [4–6]

$$Q_E = (1 + k_E)^2 / (1 - k_E)^2,$$

где $k_E = \inf \|\partial_{\bar{z}} f / \partial_z f\|_\infty$ по всем квазиокружностям $L \supset E$ и всем сохраняющим ориентацию гомеоморфизмам $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, таким, что $f(\widetilde{\mathbb{R}}) = L$.

Наконец, полагая $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, $\mathbb{D}^* = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$, определим *норму Грунского* $\varkappa(f)$ однолистной функции $f(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \dots$ в круге $\mathbb{D}^*$ формулой

$$\varkappa(f) = \sup \left\{ \left| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn} \alpha_{mn} x_m x_n \right| : \mathbf{x} = (x_n) \in S(l^2) \right\},$$

где $-\alpha_{mn}$ — коэффициенты Тейлора функции

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} z^{-m} \zeta^{-n} : (\mathbb{D}^*)^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}},$$

причем у логарифмической функции берется главная ветвь, а $\mathbf{x} = (x_n)$ пробегает единичную сферу $S(l^2)$ гильбертова пространства l^2 последовательностей таких, что $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_1^\infty |x_n|^2$ (ср. с [7, 8]).

Эта норма оценивается *нормой Тейхмюллера* $k(f)$ того же отображения, т. е. минимальной дилатацией среди квазиконформных продолжений отображения f на круг $\mathbb{D}$,

$$\varkappa(f) \leq k(f), \quad (2)$$

причем для большинства однолистных функций имеем строгое неравенство (см. [9–13]). Отметим, что норма Тейхмюллера внутренне связана с интегрируемыми голоморфными квадратичными дифференциалами $\varphi(z) dz^2$ на $\mathbb{D}$, в то время как норма Грунского относится к абелевой структуре, определяемой множеством квадратичных дифференциалов $\varphi = \omega^2$, где ω голоморфна на круге $\mathbb{D}$.

Отметим, что произвольная однолистная функция $F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ в единичном круге $\mathbb{D}$ имеет те же коэффициенты Грунского α_{mn} , что и ее инверсия $f(z) = 1/F(1/z)$ в $\mathbb{D}^*$, хотя технически более удобно иметь дело с функциями, однолиственными в $\mathbb{D}^*$.

1.2. Некоторые известные основные результаты. До сих пор точные или даже приближительные значения собственного числа Фредгольма ρ_L были найдены только для некоторых специальных наборов кривых и дуг с использованием неравенств (1), (2) (см., например, обзоры [4, 13]).

Одним из основных результатов здесь является следующая общая теорема, полученная в [14] применением голоморфных движений. Она решает задачу для неограниченных выпуклых областей на базе их геометрических свойств.

Теорема А. Для любой неограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ с кусочно $C^{1+\delta}$ -гладкой границей L ($\delta > 0$) и всех ее дробно-линейных образов справедливы равенства

$$q_L = 1/\rho_L = \kappa(f) = \kappa(f^*) = k(f) = k(f^*) = 1 - |\alpha|, \quad (3)$$

где f и f^* — подобающим образом нормированные конформные отображения $\mathbb{D} \rightarrow D$ и $\mathbb{D}^* \rightarrow D^* = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$ соответственно, $k(f)$ и $k(f^*)$ — минимальные дилатации их квазиконформных продолжений на $\hat{\mathbb{C}}$, $\kappa(f)$ и $\kappa(f^*)$ — их нормы Грунского, а $\pi|\alpha|$ — раствор наименьшего внутреннего угла между граничными дугами $L_j \subset L$. Здесь $0 < \alpha < 1$, если соответствующая вершина конечна, и $-1 < \alpha < 0$ для угла в вершине на бесконечности.

Это же утверждение справедливо для вогнутых областей (дополнений к выпуклым областям), не содержащих ∞ ; для них последний член следует заменить на $|\beta| - 1$, где $\pi|\beta|$ — раствор наибольшего внутреннего угла области D .

Напротив, имеются ограниченные выпуклые области даже с аналитическими границами L , конформные отображения которых имеют различные нормы Грунского и Тейхмюллера, и потому $\rho_L < 1/q_L$.

Равенства вида (3) были известны ранее только для специальных замкнутых кривых (см. [6, 13, 15]), например, для многоугольников, ограниченных дугами окружностей с общей внутренней касательной окружностью.

1.3. Открытый вопрос. Установить пределы, в которых теорема А может быть распространена на произвольные неограниченные многоугольники.

Наша цель — показать, что такое распространение возможно для неограниченных прямолинейных многоугольников, для которых отклонение от выпуклости достаточно мало.

Это распространение существенно расширяет наборы конкретных многоугольных кривых и дуг, для которых собственные значения Фредгольма и коэффициенты отражения найдены явно.

2. Теоремы

2.1. Пусть P_n — прямолинейный многоугольник с конечными вершинами $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и вершиной $A_\infty = \infty$, и пусть внутренний угол при вершине

A_j равен $\pi\alpha_j$, а угол при A_∞ равен $\pi\alpha_\infty$, где $\alpha_\infty < 0$ и $a_j \neq 1$, $j = 1, \dots, n-1$, так что $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_\infty = 2$. Пусть f_n — конформное отображение верхней полуплоскости $U = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на P_n , которое без ограничения общности можно нормировать условием $f_n(z) = z - i + O(z - i)$ при $z \rightarrow i$ (в предположении, что P_n содержит точку $w = 0$).

Важной геометрической характеристикой многоугольников является величина

$$|1 - |\alpha|| = \max \{|1 - |\alpha_1||, \dots, |1 - |\alpha_{n-1}||, |1 - |\alpha_\infty||\}, \quad (4)$$

оценивающая граничную квазиконформную дилатацию многоугольника P_n .

Используя эту величину, сначала показываем, что утверждение, аналогичное теореме А, неверно для общих прямолинейных многоугольников.

Теорема 1. *Существуют прямолинейные многоугольники P_n , конформные отображения которых f_n удовлетворяют неравенству*

$$\kappa(f_n) = k(f_n) > |1 - |a||, \quad (5)$$

где a определено равенством (4).

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть P_n — неограниченный прямолинейный многоугольник, не являющийся ни выпуклым, ни вогнутым и потому содержащий вершины A_j , внутренние углы при которых $\pi\alpha_j$ имеют растворы $\pi\alpha_j$, где $1 < \alpha_j < 2$. Предположим, что все такие α_j удовлетворяют неравенству*

$$\alpha_j - 1 < |1 - |\alpha||, \quad (6)$$

где α определено равенством (4) (это означает, что максимальное значение в (4) достигается в некоторой вершине A_j , где $0 < |a_j| < 1$).

Для любого такого многоугольника, подбирая подходящее мёбиусово отображение $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow U$, имеем равенства

$$\kappa(f_n \circ \sigma) = k(f_n) = q_{\partial P_n} = 1/\rho_{\partial P_n} = |1 - |\alpha||. \quad (7)$$

3. Доказательство теоремы 1

Используем прямоугольники P_4 ; тогда все α_j равны $1/2$. Известно, что отображение f_4 произвольного четырехугольника имеет равные нормы Грунско-го и Тейхмюллера, $\kappa(f_4) = k(f_4)$ (см. [4, 6, 16]).

Используя мёбиусово отображение $\sigma : z \mapsto 1/z$, преобразуем прямоугольник в (невыпуклый) четырехугольник $\sigma(P_4)$, образованный дугами окружностей, с углами $\pi/2$ и взаимно ортогональными ребрами, так что два неограниченных ребра прямолинейны, а два ограниченных — дуги окружностей, и заметим, что для достаточно длинных прямоугольников должно выполняться

$$k(\hat{f}_4) = \kappa(\hat{f}_4) > 1/2, \quad (8)$$

где $\hat{f}_4$ — конформное отображение $\mathbb{D} \rightarrow \sigma(P_4)$.

В самом деле, как установил Кюнау [6], четырехугольники с соотношениями сторон (конформным модулем), большими, чем 3.31, имеют коэффициент отражения $q_{\partial P_4} > 1/2$ (последнее неравенство следует также из того факта, что длинные прямоугольники в пределе дают полуполосу с двумя неограниченными параллельными сторонами; подобная область не является квазидиском, и потому ее коэффициент отражения равен 1), что доказывает (8).

Всякий четырехугольник $\sigma(P_4)$, образованный дугами окружностей и удовлетворяющий (8), можно аппроксимировать прямоугольными многоугольниками P_n . Предполагая теперь выполнение равенств вида (3) или (7) для всех таких многоугольников, получаем противоречие с (8), так как дилатация $k(f)$ и $q_{\partial P}$ — непрерывные снизу функционалы относительно локально равномерной сходимости квазиконформных отображений (т. е. $k(f) \leq \liminf k(f_n)$ при $f_n \rightarrow f$ в указанной топологии и аналогично для коэффициента отражения). Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть P_n — неограниченный прямолинейный многоугольник. Его конформное отображение $f_n : U \rightarrow P_n$, оставляющее на месте бесконечно удаленную точку и удовлетворяющее равенству $f_n(i) = 0$, выражается интегралом Шварца — Кристоффеля

$$f_n(\zeta) = d_1 \int_0^z (\xi - a_1)^{\alpha_1-1} \dots (\xi - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} d\xi + d_0, \quad (9)$$

где $a_j = f_n^{-1}(A_j) \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n-1$, и d_0, d_1 — соответствующие комплексные константы. Логарифмическая производная $b_f = (\log f')' = f''/f'$ этого отображения имеет вид

$$b_{f_n}(z) = \sum_1^{n-1} (\alpha_j - 1)(z - a_j)^{-1}.$$

Полагая $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : -1/|1 - |\alpha|| < t < 1/|1 - |\alpha||\}$, $\mathbb{D}_\alpha = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1/|1 - |\alpha||\}$, построим для f_n объемлющую комплексную изотопию (голоморфное движение)

$$w(z, t) : U \times \mathbb{D}_\alpha \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad (10)$$

содержащую f_n в качестве отображения слоя, которая инъективна в пространстве координаты z для каждого фиксированного t , голоморфна по t для фиксированного z и такова, что $w(z, 0) \equiv z$.

Сначала заметим, что для вещественных $r \in I_\alpha$ решение W_r уравнения $w''(z) = r b_{f_n}(z) w'(z)$ с начальными условиями $w_r(i) = i$, $w_r(\infty) = \infty$ удовлетворяет равенству

$$b_{W_r}(z) = \sum_1^{n-1} r \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} = \sum_1^n \frac{\alpha_j(r) - 1}{z - a_j},$$

где

$$\alpha_j(r) = r(\alpha_j - 1) + 1. \quad (11)$$

Если внутренние углы исходного многоугольника P_n удовлетворяют предположению (6), то все функции W_r представимы интегралом вида (9) (с заменой α_j на $\alpha_j(r)$ и подходящими константами d_{0r}, d_{1r}).

Геометрически это означает, что внешний угол $2\pi - \pi\alpha_j(r)$ во всякой конечной вершине $A_j(r)$ уменьшается вместе с r (но значение $\alpha_j(r) - 1$ увеличивается, если $1 < \alpha_j < 2$). При выполнении предположения (6) допустимые границы возможных величин углов гарантируют однолистность данного интеграла на U для любого указанного t . Следовательно, каждое множество $W_r(U)$ тоже является многоугольником с внутренними углами $\pi\alpha_j(r)$ для $r \neq 0$, хотя $W_0(U) = U$.

Перейдем к конформному отображению $g_n(\zeta) = f_n \circ \sigma_0(\zeta)$ единичного круга $\mathbb{D}$ на P_n с помощью функции $\sigma_0(\zeta) = (1 + \zeta)/(1 - \zeta)$. Это отображение выражается аналогично (9) формулой

$$g_n(\zeta) = d_1 \int_0^\zeta \prod_{j=1}^n (\xi - e_j)^{\alpha_j - 1} d\xi + d_0,$$

где точки e_j — прообразы вершин $e_j = g_n^{-1}(A_j)$ на единичной окружности $\{|\zeta| = 1\}$. Выберем d_1 так, что $g'_n(0) = 1$. Для этой функции имеем естественную комплексную изотопию

$$\tilde{w}_t(\zeta) = \frac{1}{t} g_n(t\zeta) : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (12)$$

где

$$b_{\tilde{w}_t}(\zeta) = \frac{\tilde{w}_t''(\zeta)}{\tilde{w}_t'(\zeta)} = t \frac{g_n''(t\zeta)}{g_n'(t\zeta)} = t b_{g_n}(t\zeta). \quad (13)$$

Следуя (12), для $t = re^{i\theta}$ положим $\tilde{w}_t(\zeta) = e^{-i\theta} W_r \circ \sigma_0(e^{i\theta}\zeta)$. Из соотношений (13) вытекает, что эта функция также однолистка в $\mathbb{D}$. Соответствующие шварцианы $S_{\tilde{w}_r}(\zeta) = r b'_{\tilde{w}_r}(\zeta) - r^2 b_{\tilde{w}_r}(\zeta)^2/2$ заполняют вещественно-аналитическую кривую Γ в универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathbf{T}$ (моделируемом как ограниченная область в комплексном банаховом пространстве $\mathbb{B}$ гиперболически ограниченных голоморфных функций на $\mathbb{D}$). Эта кривая расположена в голоморфном диске $\tilde{\Omega} = \mathbf{b}(G) \subset \mathbf{T}$, где $\mathbf{b}$ — отображение $t \mapsto S_{\tilde{w}_t}$ и $G \supset I_\alpha$ — односвязная плоская область.

По теореме Журавлева (см. [11, 17]) эта область содержит для каждого $r \in I_\alpha$ также точки $S_{\tilde{w}_t}$ такие, что $|t| \leq r$ (образующие криволинейные многоугольники с кусочно аналитическими границами).

Это порождает голоморфные движения (комплексные изотопии) $\tilde{w}(\zeta, t) : \mathbb{D} \times G \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ и $w(z, t) : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ такие, что $w(z, 1) = f_n(z)$.

Из основной лямбда-леммы для голоморфных движений вытекает, что каждое отображение слоя $w_t(z)$ является ограничением на U квазиконформного автоморфизма $\widehat{W}_t(z)$ всей сферы $\hat{\mathbb{C}}$, а коэффициенты Бельтрами

$$\mu(z, t) = \frac{\partial_{\bar{z}} \widehat{W}_t(z)}{\partial_z \widehat{W}_t(z)}, \quad t \in \mathbb{D}_\alpha,$$

в нижней полуплоскости $U^* = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ голоморфно зависят от t как элементы пространства $L_\infty(U^*)$.

Таким образом, имеем голоморфное отображение $\mu(\cdot, t)$ из круга $\mathbb{D}_\alpha$ в единичный шар коэффициентов Бельтрами с носителем в U^* ,

$$\operatorname{Belt}(U^*)_1 = \{\mu \in L_\infty(\mathbb{C}) : \mu(z)|U = 0, \|\mu\| < 1\},$$

и из классической леммы Шварца следует оценка

$$k(\widehat{W}_t) = \|\mu_{\widehat{W}_t}\|_\infty \leq |1 - |\alpha|| |t|.$$

Стало быть, экстремальная дилатация исходного отображения $f_n(z) = \widehat{W}_1(z)|U$ удовлетворяет неравенству $k(f_n) \leq |1 - |\alpha||$. Значит, также имеем $q_{\partial P_n} \leq |1 - |\alpha||$, и в силу (2) $\varkappa(f_n) \leq |1 - |\alpha||$.

С другой стороны, согласно Кюнау [6] если замкнутая кривая $L \subset \widehat{\mathbb{C}}$ содержит две аналитические дуги с внутренним углом пересечения $\pi\alpha'$, то

$$\frac{1}{\rho_L} \geq |1 - |\alpha'|||.$$

Вместе с (1) это дает, что многоугольник P_n удовлетворяет всем равенствам (4), и теорема доказана.

5. Некоторые приложения

Теорема 2 расширяет коллекции кривых с явно найденными собственными значениями Фредгольма и коэффициентами отражения.

Например, пусть L — пилообразная квазикоусность с конечным числом треугольных и трапециевидных зубьев, соединенных прямолинейными сегментами. Предположим, что углы этих зубьев удовлетворяют условию (6). Тогда из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. Для любой квазикоусности L указанного вида ее коэффициент квазиотражения q_L и собственное значение Фредгольма ρ_L вычисляются по формуле

$$q_L = 1/\rho_L = |1 - |a||,$$

где $|\alpha|$ определяется аналогично формуле (4) углами между подынтервалами кривой L . То же самое верно для образов $\gamma(L)$ кривой L при мёбиусовых отображениях $\gamma \in PSL(2, \mathbb{C})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlfors L. V. Remarks on the Neumann–Poincaré equation // Pacific J. Math. 1952. V. 2. P. 271–280.
2. Kühnau R. Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für Q -quasikonforme Fortsetzbarkeit // Comment. Math. Helv. 1986. V. 61. P. 290–307.
3. Schiffer M. Fredholm eigenvalues and Grunsky matrices // Ann. Polon. Math. 1981. V. 39. P. 149–164.
4. Krushkal S. L. Quasiconformal extensions and reflections, Ch 11 // Handbook of complex analysis: Geometric function theory. V. 2 (R. Kühnau, ed.). Amsterdam: Elsevier Sci., 2005. P. 507–553.
5. Ahlfors L. V. Lectures on quasiconformal mappings. Princeton: Van Nostrand, 1966.
6. Kühnau R. Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve // Jber. Deutsch. Math. Verein. 1988. V. 90. P. 90–109.
7. Grunsky H. Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 29–61.
8. Pommerenke Chr. Univalent functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
9. Krushkal S. L. Strengthened Moser’s conjecture, geometry of Grunsky coefficients and Fredholm eigenvalues // Central European J. Math. 2007. V. 5, N 3. P. 551–580.
10. Krushkal S. L. Strengthened Grunsky and Milin inequalities // Contemp. Math. 2006. V. 667. P. 159–179.
11. Крушкаль С. Л., Кюнау Р. Квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1982.
12. Krushkal S. L., Kühnau R. Grunsky inequalities and quasiconformal extension // Israel J. Math. 2006. V. 152. P. 49–59.
13. Kühnau R. Quasikonforme Fortsetzbarkeit, Fredholmsche Eigenwerte und Grunskysche Koeffizientenbedingungen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1982. V. 7. P. 383–391.
14. Krushkal S. L. Quasireflections, Fredholm eigenvalues and Finsler metrics // Doklady Math. 2004. V. 69. P. 221–224.
15. Kühnau R. Zur Berechnung der Fredholmschen Eigenwerte ebener Kurven // ZAMM. 1986. V. 66. P. 193–201.

- 16. Werner S. Spiegelungskoeffizient und Fredholmscher Eigenwert für gewisse Polygone // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1997. V. 22. P. 165–186.
- 17. Журавлев И. В. Однолистные функции и пространства Тейхмюллера. Новосибирск, 1979. 23 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики).

Поступила в редакцию 11 февраля 2019 г.

После доработки 11 февраля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Крушкаль Самуил Лейбович (Samuel L. Kruskal)

Department of Mathematics, Bar-Ilan University

5290002 Ramat-Gan, Israel;

Department of Mathematics, University of Virginia,

Charlottesville, VA 22904-4137, USA

`kruskal@math.biu.ac.il`