A. G. Kusraev, S. S. Kutateladze, Two applications of Boolean valued analysis, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1153–1164

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.512>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.7.115

April 26, 2023, 15:22:06

ДВА ПРИЛОЖЕНИЯ БУЛЕВОЗНАЧНОГО АНАЛИЗА А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе

Аннотация. Представлены два результата, полученные с помощью булевозначного анализа. Первый результат утверждает, что универсально полная векторная решетка, не имеющая локально одномерных полос, допускает разложение в прямую сумму двух порядково плотных и латерально полных векторных подрешеток, инвариантных относительно всех порядковых проекторов, причем каждая из этих подрешеток линейно изоморфна исходной решетке с сохранением полос. Второй результат с учетом принципа переноса для инъективных банаховых решеток устанавливает аналог теоремы Андо о совместной характеристизации AL^p -пространств и пространств $c_0(\Gamma)$ в классе $\mathbb{B}$ -циклических банаховых решеток.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.512

Ключевые слова: универсально полная векторная решетка, инъективная банахова решетка, M -проектор, оператор Магарам, AL^p -пространство, булевозначное представление.

Ю. Г. Решетняку к его девяностолетию

§ 1. Введение

В работе представлен булевозначный подход к двум вопросам из теории векторных и банаховых решеток. Предварительные сведения из булевозначного анализа приведены в § 2; подробности можно найти в [1, 2]. Теория векторных и банаховых решеток представлена в [3, 4].

Ю. А. Абрамович и А. К. Китовер в [5, проблема В] поставили вопрос: будут ли векторные решетки X и Y решеточно изоморфны, если существует линейный обратимый оператор $T : X \rightarrow Y$ такой, что T и T^{-1} сохраняют дизъюнктность? Отрицательный ответ приведен в той же работе (см. [5, теорема 13.4]). Некоторое усиление этого результата представлено в § 3.

Знаменитая теорема Андо утверждает, что банахова решетка X размерности ≥ 3 изометрически и решеточно изоморфна $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ для некоторых $1 \leq p \in \mathbb{R}$ и пространства с мерой (Ω, Σ, μ) или $c_0(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ в том и только в том случае, когда каждая замкнутая подрешетка в X служит образом положительного сжимающего проектора (см., например, [4, теорема 2.7.13] или [6, теорема 1.b.8]). Аналогичный результат в классе $\mathbb{B}$ -циклических банаховых решеток установлен в § 6. Подготовительный материал о булевозначных AL^p -пространствах и булевозначных банаховых решетках вида $c_0(\Gamma)$ приводится в § 4, 5 соответственно.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № 1.1.2, проект № 0314–2019–0005.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений: $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра с единицей 1 , нулем 0 , супремумом $\vee$, инфимумом $\wedge$ и дополнением $(\cdot)^*$, причем $1 \neq 0$; $\mathbb{P}(X)$ — булева алгебра всех порядковых проекторов в векторной решетке X . Под *разбиением единицы* в $\mathbb{B}$ понимается семейство $(b_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathbb{B}$ такое, что $\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = 1$ и $b_\xi \wedge b_\eta = 0$ при $\xi \neq \eta$. Символ $:=$ используется как назначение по определению, а $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают множества натуральных и действительных чисел соответственно.

§ 2. Предварительные сведения

Применив принципы переноса и максимума к ZFC-теореме о существовании поля действительных чисел, находим элемент $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, называемый *полем действительных чисел внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $\llbracket \mathcal{R} \text{ — поле действительных чисел} \rrbracket = 1$. Следующий результат, установленный Е. И. Гордоном, утверждает, что интерпретация поля действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ представляет собой универсально полную векторную решетку.

Теорема 2.1 [7]. Пусть $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $\mathcal{R} \downarrow$ (со спущенными операциями и порядком) является универсально полной векторной решеткой. Более того, существует булев изоморфизм $\chi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{R} \downarrow)$ такой, что для всех $x, y \in \mathcal{R} \downarrow$ и $b \in \mathbb{B}$ выполняются эквивалентности

$$\chi(b)x = \chi(b)y \iff b \leq \llbracket x = y \rrbracket, \quad \chi(b)x \leq \chi(b)y \iff b \leq \llbracket x \leq y \rrbracket. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, теорема 8.1.2; 2, теорема 2.2.4]. $\square$

Рассмотрим поле действительных чисел $\mathbb{R} \in \mathbb{V}$. Стандартное имя $\mathbb{R}^\wedge$ является полем внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, причем можно считать, что $\llbracket \mathbb{R}^\wedge \text{ — плотное подполе поля } \mathcal{R} \rrbracket = 1$ (см. [2, пп. 2.2.2, 2.2.3]). В некоторых вопросах важно знать, когда $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ (см., например, [8]). Следующий результат, полученный А. Е. Гутманом, дает ответ на этот вопрос в виде эквивалентных алгебраических свойств $\mathbb{B}$ и $\mathcal{R} \downarrow$.

Теорема 2.2 [9]. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра и $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = \mathbb{R}^\wedge$.
- (2) $\mathbb{B}$ σ -дистрибутивна;
- (3) $\mathcal{R} \downarrow$ локально одномерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, теорема 5.1.6; 2, теоремы 4.4.9, 4.7.6]. $\square$

Напомним понятие $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решетки (см. [1, 2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Порядковый проектор π в банаховой решетке X называют *M-проектором*, если $\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^* x\|\}$ для всех $x \in X$, где $\pi^* := I_X - \pi$. Множество всех M-проекторов в X обозначается символом $\mathbb{M}(X)$. *Полной булевой алгеброй M-проекторов* в X называют любое множество $\mathcal{B} \subset \mathbb{M}(X)$, являющееся порядково замкнутой подалгеброй полной булевой алгебры $\mathbb{P}(X)$.

Отметим, что само множество $\mathbb{M}(X)$ служит подалгеброй булевой алгебры $\mathbb{P}(X)$ в X , но может не быть порядково полной (см. [10, теорема 1.10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Если $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathcal{B}$ и $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство в X , то элемент $x \in X$, удовлетворяющий равенству $b_\xi x_\xi = b_\xi x$ для всех $\xi \in \Xi$, называют *перемешиванием* (x_ξ) относительно (b_ξ) . Банахову решетку X

называют $\mathbb{B}$ -циклической, если $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, изоморфная полной булевой алгебре M -проекторов $\mathcal{B}$ в X , и перемешивание любого семейства из единичного шара пространства X относительно любого разбиения единицы в $\mathcal{B}$ (с тем же множеством индексов) существует и содержится в единичном шаре.

В дальнейшем будем отождествлять $\mathbb{B}$ и $\mathcal{B}$ и считать, что $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$ (см. [11, определение 2.5; 2, определение 5.7.13]). Будем говорить, что $\mathbb{B}$ -циклические банаховы решетки X и Y $\mathbb{B}$ -изометричны, и писать $X \simeq_{\mathbb{B}} Y$, если существует решеточный изометрический изоморфизм между X и Y , перестановочный с проекторами из $\mathbb{B}$.

Таким образом, банахова решетка $\mathbb{B}$ -циклическая, если она представляет собой $\mathbb{B}$ -циклическое банахово пространство относительно некоторой полной булевой алгебры M -проекторов $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$ (ср. [3, определения 7.3.1, 7.3.3] и [2, определение 5.8.8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть $\Lambda = \mathcal{K}\downarrow$ обозначает ограниченную часть универсально полной векторной решетки $\mathcal{K}\downarrow$, т. е. Λ — порядково плотный идеал в $\mathcal{K}\downarrow$, порожденный порядковой единицей $1 := 1^\wedge \in \mathcal{K}\downarrow$. Возьмем ненулевое банахово пространство $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\downarrow &:= \{x \in \mathcal{X}\downarrow : |x| \in \Lambda\}, \quad \|x\| := \| |x| \|_{\infty} \quad (x \in X), \\ \|\lambda\|_{\infty} &:= \inf\{\alpha > 0 : |\lambda| \leq \alpha 1\}, \quad \lambda \in \Lambda, \end{aligned}$$

где $|\cdot|$ — спуск нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, т. е. $\| |x| \| = \|x\|_{\mathcal{X}}$ для всех $(x \in \mathcal{X}\downarrow)$. Тогда $\mathcal{X}\downarrow := (\mathcal{X}\downarrow, \| \cdot \|)$ именуют *ограниченным спуском* $\mathcal{X}$.

Так как Λ — порядково полное AM -пространство с единицей, то $\mathcal{X}\downarrow$ — банахово пространство со смешанной нормой над Λ и, следовательно, $\mathbb{B}$ -циклическое банахово пространство (см. [3, 7.3.3]). Следующий результат утверждает, что концепция $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решетки есть не что иное, как интерпретация понятия банаховой решетки в булевозначной модели.

Теорема 2.6 [11]. Банахова решетка X $\mathbb{B}$ -циклическая в том и только в том случае, когда в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует единственная с точностью до решеточной изометрии банахова решетка $\mathcal{X}$, ограниченный спуск которой решеточно $\mathbb{B}$ -изометричен X . Более того, отображение $\pi \mapsto \pi\downarrow := \pi\downarrow|_X$ осуществляет изоморфизм булевых алгебр $\mathbb{M}(\mathcal{X})\downarrow$ и $\mathbb{M}(X)$ (в символах: $\mathbb{M}(\mathcal{X})\downarrow \simeq \mathbb{M}(X)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [11, теорема 2.1] или [2, теорема 5.9.1]. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Банахову решетку $\mathcal{X}$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ из теоремы 2.6 называют *булевозначной реализацией* $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решетки X .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Ограниченный спуск из определения 2.5 впервые появился под другим именем в статьях Такеути [12, 13] при изучении алгебр фон Неймана и C^* -алгебр методом булевозначных моделей (см. также [14]).

Потребуется следующий результат о строении булевозначных кардиналов.

Предложение 2.9. Элемент $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ является кардиналом внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в том и только в том случае, если существуют непустое множество кардиналов $\Gamma \in \mathbb{V}$ и разбиение единицы $(b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathbb{B}$ такие, что $x = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma \gamma^\wedge$ и $\gamma^\wedge$ — кардинал внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_\gamma)}$, где $\mathbb{B}_\gamma := [0, b_\gamma]$ и $b_\gamma \neq 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1, теорема 9.1.3]; см. также [2, 1.9.11]. $\square$

§ 3. Нерасширяющие линейные изоморфизмы

В [5, § 6, 13] предложен подход к построению контрпримеров к упомянутой выше проблеме В, основанный на методе d -базиса. В настоящем параграфе покажем, что с точностью до перехода к подходящей булевозначной модели такой подход равносильен применению классического базиса Гамеля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть X — векторная решетка и $u \in X$. Элемент $v \in X$ называют *осколком* или *компонентой* v , если $|v| \wedge |u - v| = 0$. Множество всех осколков элемента u обозначается символом $\mathbb{C}(u)$. Говорят, что подмножество X_0 *осколочно замкнуто*, если для любого $u \in X_0$ множество $\mathbb{C}(u)$ содержится в X_0 (см. [5, предложение 4.9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Подрешетку $X_0 \subset X$ называют *латерально полной*, если любое дизъюнктивное множество положительных элементов в X_0 имеет супремум, и $\mathbb{P}(X)$ -*инвариантной*, если $\pi(X_0) \subset X_0$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(X)$. Оператор $T : X_0 \rightarrow X$ называют *нерасширяющим* или *сохраняющим полосы*, если $T(B \cap X_0) \subset B$ для любой полосы $B \subset X$ (см. [2, определение 4.1.2]).

Лемма 3.3. Пусть $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$. Рассмотрим универсально полную векторную решетку $X := \mathcal{R}\downarrow$. Для подрешетки $X_0 \subset X$ равносильны следующие утверждения:

- (1) X_0 порядково плотна, латерально полна и осколочно замкнута;
- (2) X_0 порядково плотна, латерально полна и $\mathbb{P}(X)$ -инвариантна;
- (3) X_0 латерально полна, $\mathbb{P}(X)$ -инвариантна и $X_0^{\perp\perp} = X$;
- (4) $X_0 = \mathcal{X}_0\downarrow$ для некоторой векторной подрешетки $\mathcal{X}_0$ поля $\mathcal{R}$, рассматриваемого как векторная решетка над подполем $\mathbb{R}^\wedge$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из [2, теорема 2.5.1]. $\square$

Лемма 3.4. Пусть $\mathbb{P}$ — собственное подполе поля $\mathbb{R}$. Тогда существуют $\mathbb{P}$ -линейные подпространства $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ в $\mathbb{R}$ такие, что $\mathcal{X}_k$ и $\mathbb{R}$ изоморфны как векторные пространства над $\mathbb{P}$, но не изоморфны как упорядоченные векторные пространства над $\mathbb{P}$. Более того, $\mathbb{R} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ и соответствующие проекторы $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}_1$ и $p_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}_2$ не являются порядково ограниченными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поле действительных чисел $\mathbb{R}$ не является конечным расширением никакого собственного подполя $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ (см., например, [15, лемма 17]). Следовательно, $\mathbb{R}$ — бесконечномерное пространство над полем $\mathbb{P}$. Пусть $\mathcal{E}$ — базис Гамеля $\mathbb{P}$ -векторного пространства $\mathbb{R}$, а $|\mathcal{E}|$ — мощность $\mathcal{E}$. Так как кардинал $|\mathcal{E}|$ бесконечен, можно подобрать собственное подмножество $\mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}$ так, что $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2 := \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$ имеют одну и ту же мощность, равную $|\mathcal{E}|$, т. е. $|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2|$. Пусть $\mathcal{X}_k$ обозначает $\mathbb{P}$ -линейное подпространство $\mathbb{R}$, порожденное множеством $\mathcal{E}_k$, где $k = 1, 2$. Тогда $\{0\} \subsetneq \mathcal{X}_k \subsetneq \mathbb{R}$, причем $\mathcal{X}_k$ и $\mathbb{R}$ изоморфны как векторные пространства над $\mathbb{P}$ в силу равенства $|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}_k|$. Если бы $\mathcal{X}_k$ и $\mathbb{R}$ были изоморфны как упорядоченные векторные пространства над $\mathbb{P}$, то $\mathcal{X}_k$ было бы порядково полным и, следовательно, получили бы противоречивое равенство $\mathcal{X}_k = \mathbb{R}$. В силу выбора множеств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ имеем $\mathbb{R} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, значит, имеются проекторы $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}_k$, причем $p_1 + p_2 = I_{\mathcal{R}}$. Если проектор $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}_k$ порядково ограничен, то p_k как аддитивная функция в $\mathbb{R}$ непрерывна, следовательно, $p_k(x) = c_k x$ ($x \in \mathbb{R}$) для некоторого $c_k \in \mathbb{R}$. Но тогда $c_k^2 = 1$, т. е. либо $c_k = 1$ и тогда $\mathcal{X}_k = \mathbb{R}$, либо $c_k = 0$ и тогда $\mathcal{X}_k = \{0\}$; в обоих случаях приходим к противоречию. $\square$

Докажем теперь первый основной результат статьи, представляющий собой интерпретацию леммы 3.4 в произвольной булевозначной модели.

Теорема 3.5. Пусть X — универсально полная векторная решетка, не содержащая ненулевых локально одномерных полос. Тогда существуют осколочно замкнутые латерально полные векторные подрешетки $X_1 \subset X$ и $X_2 \subset X$ и линейные биекции $T_1 : X_1 \rightarrow X$ и $T_2 : X_2 \rightarrow X$ такие, что имеют место следующие утверждения:

- (1) $X = X_1 \oplus X_2$ и $X = X_1^{\perp\perp} = X_2^{\perp\perp}$;
- (2) операторы T_k и T_k^{-1} сохраняют полосы ($k = 1, 2$);
- (3) канонические проекторы $\pi_1 : X \rightarrow X_1$ и $\pi_2 : X \rightarrow X_2$ сохраняют полосы;
- (4) ни одна из подрешеток X_1 и X_2 не является порядково полной, а значит, и решеточно изоморфной X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Гордона 2.1 можем предположить без ограничения общности, что $X = \mathcal{R} \downarrow$. Так как X не содержит локально одномерных полос, то по теореме Гутмана 2.2 будет $\llbracket \mathcal{R} \neq \mathbb{R}^\wedge \rrbracket = 1$. Принцип переноса позволяет применить лемму 3.4 внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$, следовательно, существуют $\mathbb{R}^\wedge$ -линейные подпространства $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ в $\mathcal{R}$ такие, что $\mathcal{R} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ и имеются $\mathbb{R}^\wedge$ -линейные изоморфизмы τ_k из $\mathcal{X}_k$ на $\mathcal{R}$, причем $\mathcal{X}_k$ и $\mathcal{R}$ неизоморфны как упорядоченные векторные пространства над $\mathbb{R}^\wedge$ ($k = 1, 2$). Пусть $p_k : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{X}_k$ ($k = 1, 2$) — проекторы, соответствующие разложению $\mathcal{R} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$. Положим $X_k := \mathcal{X}_k \downarrow$, $T_k := \tau_k \downarrow$, $S_k := \tau_k^{-1} \downarrow$ и $P_k := p_k \downarrow$. Поскольку $\mathcal{X}_k$ линейно изоморфно $\mathcal{R}$, то $\llbracket \mathcal{X}_k \neq \{0\} \rrbracket = 1$, поэтому $X_k^{\perp\perp} = X$. Как видно из леммы 3.3, X_1 и X_2 осколочно замкнуты и латерально полны. Кроме того, $X = X_1 \oplus X_2$. Операторы S_k , T_k и P_k сохраняют полосы и $\mathbb{R}$ -линейны в силу [2, теорема 4.3.4]. Более того, $S_k = (\tau_k \downarrow)^{-1} = T_k^{-1}$, а P_1 и P_2 — проекторы, соответствующие разложению $X = X_1 \oplus X_2$. Остается заметить, что X_k и X решеточно изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_k$ и $\mathcal{R}$ изоморфны как упорядоченные векторные пространства над $\mathbb{R}^\wedge$, а P_1 и P_2 порядково ограничены тогда и только тогда, когда порядково ограничены p_1 и p_2 внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Лемма 3.4, а значит, и теорема 3.5 основаны на свойстве поглощения бесконечных кардиналов: $\kappa + \kappa = \kappa$. Однако это свойство верно и в том случае, когда число слагаемых бесконечно, но не превосходит самого кардинала κ , т. е. $\kappa = \sum_{\alpha \in A} \kappa_\alpha$, если $\kappa_\alpha = \kappa$ для всех $\alpha \in A$ и $|A| \leq \kappa$. Следовательно, имеет место вариант теоремы 3.5 с бесконечным числом слагаемых подрешеток.

§ 4. Булевозначные AL^p -пространства

В настоящем параграфе введем класс $\mathbb{B}$ -циклических банаховых решеток, представляющих собой классические AL^p -пространства в булевозначных моделях. Начнем с ключевого понятия инъективной банаховой решетки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Действительную банахову решетку X называют *инъективной*, если для любой банаховой решетки Y , любой замкнутой векторной подрешетки $Y_0 \subset Y$ и любого линейного положительного оператора $T_0 : Y_0 \rightarrow X$ существует положительное линейное продолжение $T : Y \rightarrow X$ оператора T_0 такое, что $\|T_0\| = \|T\|$. Иными словами, инъективные банаховы решетки суть инъективные объекты в категории банаховых решеток со сжимающими положительными операторами в качестве морфизмов (см. [2, § 5.10; 11]).

Напомним некоторые факты о строении инъективных банаховых решеток. Если $X \neq \{0\}$ — инъективная банахова решетка, то $\mathbb{M}(X)$ является порядково замкнутой подалгеброй $\mathbb{P}(X)$ (см. определение 2.3). В этом случае X является $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решеткой для любой порядково замкнутой подалгебры $\mathbb{B} \subset \mathbb{M}(X)$. Это обстоятельство позволяет установить булевозначный принцип переноса для инъективных банаховых решеток.

Лемма 4.2. Для любой инъективной банаховой решетки X существует элемент $\mathcal{X} \in \mathbb{V}(\mathbb{B})$, где $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$, такой, что $\|\mathcal{X} - AL\text{-пространство}\| = 1$ и X изометрически и решеточно $\mathbb{B}$ -изоморфна ограниченному спуску $\mathcal{X} \downarrow$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [11, теорема 4.4]. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Говорят, что положительный оператор T из векторной решетки X в векторную решетку Y имеет *свойство Леви*, если $Y = T(X)^{\perp\perp}$ и $\sup x_\alpha$ существует в X для любой возрастающей сети $(x_\alpha) \subset X_+$, если только сеть (Tx_α) порядково ограничена в Y . Оператором Магарам называют порядково непрерывный оператор, сохраняющий интервалы, т. е. $T([0, x]) = [0, Tx]$ для всех $x \in X_+$ (см. [3, 3.4.1]). Будем говорить, что T *строго положителен*, если T положителен и $T(|x|) = 0$ влечет $x = 0$.

Пусть $(\Lambda(\mathbb{B}), \|\cdot\|_\infty)$ обозначает порядково полное АМ-пространство с единицей 1 такое, что булевы алгебры $\mathbb{B}$ и $\mathbb{P}(\Lambda(\mathbb{B}))$ изоморфны. Норма $\|\cdot\|_\infty$ вводится так же, как и в определении 2.5: $\|x\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : |x| \leq \alpha 1\}$.

Лемма 4.4. Для произвольной инъективной банаховой решетки $(X, \|\cdot\|)$ с булевой алгеброй M -проекторов $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ существует строго положительный оператор Магарам $\Phi : X \rightarrow \Lambda(\mathbb{B})$ со свойством Леви такой, что $\|x\| = \|\Phi(|x|)\|_\infty$ для всех $x \in X$. Более того, существует булев изоморфизм h из $\mathbb{P}(\Lambda(\mathbb{B}))$ на $\mathbb{M}(X)$ такой, что $\pi \circ \Phi = \Phi \circ h(\pi)$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(\Lambda(\mathbb{B}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [11, следствие 4.5]. $\square$

Если X и Φ те же, что и в лемме 4.4, то будем писать $X = L^1(\Phi)$. Пусть $X = L^1(\Phi)$, $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$, $\Lambda := \Lambda(\mathbb{B})$, а X^u и Λ^u — универсальные пополнения X и Λ соответственно. Возьмем $1 \leq p \in \Lambda^u$ и положим по определению

$$X^p := L^p(\Phi) := \{x \in X^u : |x|^p \in X, |x|_p := (\Phi(|x|^p))^{\frac{1}{p}} \in \Lambda\},$$

$$\|x\|_p := \||x|_p\|_\infty \quad (x \in X^p).$$

Отметим, что если $1 \leq p \in \Lambda^u$, то p^{-1} существует и принадлежит Λ . Кроме того, можно считать Λ^u подрешеткой X^u , имеющей ту же порядковую единицу, что и X^u . Тогда X^u — f -алгебра, а Λ^u — ее f -подалгебра, поэтому отображение $x \mapsto |x|^p$ и $\lambda \mapsto |\lambda|^{1/p}$ корректно определены в X^u и Λ^u соответственно.

Лемма 4.5. Пусть X — инъективная банахова решетка, а $\mathcal{X}$ — ее представление в булевозначной модели $\mathbb{V}(\mathbb{B})$, где $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$, и $1 \leq p \in \Lambda^u$. Тогда $\|\mathcal{X}^p - AL\text{-пространство}\| = 1$ и X^p — $\mathbb{B}$ -циклическая банахова решетка, причем $\mathcal{X}^p \downarrow$ и X^p изометрически и решеточно $\mathbb{B}$ -изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Гордона 2.1 и леммы 4.2 можно считать, что $\Lambda^u = \mathcal{X} \downarrow$ и $X = \mathcal{X} \downarrow$. Согласно лемме 4.4 существует строго положительный оператор Магарам $\Phi : X \rightarrow \Lambda(\mathbb{B})$ со свойством Леви такой, что $\|x\| = \|\Phi(|x|)\|_\infty$ для всех $x \in X$. Положим $\varphi := \Phi \uparrow$ и заметим, что $\|\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} - \text{порядково непрерывный строго положительный функционал со свойством Леви}\| = 1$; более того, X — порядковый идеал в $\mathcal{X} \downarrow$ и ограничение оператора

$\varphi \downarrow$ на $\mathcal{X} \downarrow$ совпадает с Φ (см. [2, теорема 5.2.8]). Если $\mathcal{X}^u$ — универсальное пополнение $\mathcal{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то векторные решетки $\mathcal{X}^u \downarrow$ и X^u можно отождествить, так как они решеточно изоморфны в силу [2, теорема 2.11.8]. Более того, умножение в X совпадает со спуском умножения в $\mathcal{X}$, поэтому отображение $x \mapsto |x|^p$ ($x \in X$) служит спуском отображения $x \mapsto |x|^p$ ($x \in \mathcal{X}$). Так как $p \in \mathcal{R} \downarrow$, ввиду принципа переноса $\|\mathcal{X}^p - AL^p\text{-пространство}\| = 1$. По определению норма $\|\cdot\|_p \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ AL^p -пространства $\mathcal{X}^p$ имеет вид $\|x\|_p = (\varphi(|x|^p))^{1/p}$ ($x \in \mathcal{X}^p$). Пользуясь правилами спуска композиции операторов и обратного оператора (см. [2, 1.5.5]) и равенством $\Phi = \varphi \downarrow|_X$, выводим $|\cdot|_p = \|\cdot\|_p \downarrow$. Остается заметить, что для произвольного $x \in \mathcal{X}^u \downarrow$ равносильны соотношения $x \in X^p$ и $|x|_p \in \Lambda$. $\square$

Теорема 4.6. Для любой инъективной банаховой решетки $X = L^1(\Phi)$ и произвольного $1 \leq p \in \Lambda^u$ пространство $X^p = L^p(\Phi)$ представляет собой $\mathbb{B}$ -циклическую банахову решетку, причем булевы алгебры $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X^p)$ и $\mathbb{M}(X)$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из теоремы 2.6 и леммы 4.5. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Применяя теорему Гутмана о представлении пространств Банаха — Канторовича (см. [3, теорема 2.4.10]), можно показать, что $L^p(\Phi)$ изометрически и решеточно изоморфна банаховой решетке непрерывных сечений непрерывного банахова расслоения AL^p -пространств (а значит, и классических лебеговых пространств) $(L^{p(\omega)}(\varphi_\omega))_{\omega \in \Omega}$, где Ω — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathbb{B}$. Подробности об этом можно найти в [3, § 4, 5]. Аналогичный результат о представлении инъективных банаховых решеток с помощью непрерывного расслоения AL -пространств получил Хейдон в [16, теорема 7B].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Пусть X — инъективная банахова решетка, $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$, $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$, а Q и P — стоуновские компакты булевых алгебр $\mathbb{P}(X)$ и $\mathbb{B}$ соответственно. Включение $\mathbb{M}(X) \subset \mathbb{P}(X)$ индуцирует непрерывный эпиморфизм $\tau : Q \rightarrow P$. Тогда существует модулярная мера Магарам $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \Lambda = C(P)$, где $\mathcal{B} := \mathcal{B}(Q)$ — борелевская σ -алгебра компакта Q , такая, что X решеточно и изометрически $\mathbb{B}$ -изоморфна $L^1(\mu) := L^1(Q, \mathcal{B}, \mu)$ (см. [16, теорема 6H]). При этом оператору Магарам Φ из леммы 4.4 соответствует оператор интегрирования $f \mapsto \int_Q f d\mu$ ($f \in L^1(\mu)$). Теперь можно определить пространство $L^p(\mu)$ как пространство функций, μ -суммируемых с переменным показателем $p \in C_\infty(P)$:

$$L^p(\mu) = \left\{ f \in L^0(\mu) : \int_Q |f(q)|^{p(\tau(q))} d\mu(q) \in \Lambda \right\}.$$

Порядково метрические свойства классов функций, интегрируемых с переменным показателем относительно векторной меры, заслуживают самостоятельного исследования.

§ 5. Банаховы решетки $c_0(\Gamma)$ и $C_\#(Q, c_0(\Gamma))$

Напомним, что символом $l^\infty(\Gamma)$ обозначают банахову решетку всех ограниченных функций $x : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_\infty := \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|$, а банахова решетка $c_0(\Gamma)$ определяется как замыкание в $l^\infty(\Gamma)$ подрешетки $c_{00}(\Gamma)$, состоящей из функций с конечным носителем $\text{supp}(x) := \{\gamma \in \Gamma : x(\gamma) \neq 0\}$.

Лемма 5.1. Пусть Γ — произвольное непустое множество. Тогда $c_0(\Gamma^\wedge)$ служит пополнением внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ метрического пространства $c_0(\Gamma)^\wedge$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символом $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$ множество всех конечных подмножеств множества Γ . Будем пользоваться следующей формулой:

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbf{P}_{\text{fin}}(X^\wedge) = \mathbf{P}_{\text{fin}}(X)^\wedge \quad (2)$$

(см. [1, 5.1.9]). Пусть $c_{00}(\Gamma^\wedge, \mathbb{R}^\wedge)$ — часть $c_0(\Gamma^\wedge)$, состоящая из функций $x : \Gamma^\wedge \rightarrow \mathbb{R}^\wedge$ с конечным носителем $\text{supp}(x)$. Так как $c_{00}(\Gamma)$ плотно в $c_0(\Gamma)$ и $\llbracket c_{00}(\Gamma^\wedge, \mathbb{R}^\wedge) \rrbracket$ плотно в $c_0(\Gamma^\wedge)^\wedge = \mathbf{1}$, достаточно показать, что $\llbracket c_{00}(\Gamma^\wedge, \mathbb{R}^\wedge) \rrbracket \subset c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge = \mathbf{1}$. Используя свойства спусков (см. [2, 1.5.2]), последнее можно переписать в виде

$$\llbracket (\forall x \in c_{00}(\Gamma^\wedge, \mathbb{R}^\wedge)) x \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket = \bigwedge \{ \llbracket x \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket : \llbracket x \in c_{00}(\Gamma^\wedge, \mathbb{R}^\wedge) \rrbracket = \mathbf{1} \} = \mathbf{1}.$$

Возьмем $x \in c_{00}(\Gamma^\wedge, \mathbb{R}^\wedge)^\downarrow$ и рассмотрим модифицированный спуск $x \downarrow : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^\wedge \downarrow$ (см. [2, 1.5.8]). Убедимся в том, что $\llbracket x \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket = \mathbf{1}$. Привлекая формулу (2), выводим

$$\begin{aligned} \llbracket x \in c_{00}(\Gamma^\wedge, \mathbb{R}^\wedge) \rrbracket &= \llbracket (\exists \theta \in \mathbf{P}_{\text{fin}}(\Gamma^\wedge)) (\forall \gamma \in \Gamma^\wedge) (\gamma \notin \theta \rightarrow x(\gamma) = 0) \rrbracket \\ &= \bigvee_{\theta \in \mathbf{P}_{\text{fin}}(\Gamma)} \llbracket (\forall \gamma \in \Gamma^\wedge) (\gamma \notin \theta^\wedge \rightarrow x(\gamma) = 0) \rrbracket. \end{aligned}$$

В силу принципа исчерпывания (см. [2, 1.2.8]) найдется разбиение единицы $(b_\theta)_{\theta \in \Theta}$ в $\mathbb{B}$, где $\Theta := \mathbf{P}_{\text{fin}}(\Gamma)$, такое, что для всех $\theta \in \Theta$ выполняется

$$\begin{aligned} b_\theta &\leq \llbracket (\forall \gamma \in \Gamma^\wedge) (\gamma \notin \theta^\wedge \rightarrow x(\gamma) = 0) \rrbracket \\ &= \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \llbracket \gamma^\wedge \notin \theta^\wedge \rrbracket \Rightarrow \llbracket x(\gamma^\wedge) = 0 \rrbracket = \bigwedge_{\gamma \in \Gamma \setminus \theta} \llbracket x \downarrow(\gamma) = 0 \rrbracket. \end{aligned}$$

Так как $\{x \downarrow(\gamma) : \gamma \in \theta\}$ — конечное множество в $\mathbb{R}^\wedge \downarrow$, существуют разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathbb{B}$ и семейство $(t_{\theta, \xi})_{\xi \in \Xi}$ такие, что $b_\theta x \downarrow(\gamma) = \bigvee_{\xi \in \Xi} \pi_\xi t_{\theta, \xi}^\wedge$ для всех $\xi \in \Xi$ и $\gamma \in \theta$. Определим функцию $x_\xi \in c_{00}(\Gamma)$, полагая $x_\xi(\gamma) = t_{\xi, \gamma}$, если $\gamma \in \theta$, и $x_\xi(\gamma) = 0$ в противном случае. Тогда $\llbracket x_\xi^\wedge \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket = \mathbf{1}$ и для всех $\xi \in \Xi$ и $\theta \in \Theta$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \llbracket x \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket &\geq \llbracket x_\xi^\wedge \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket \wedge \llbracket x_\xi^\wedge = x \rrbracket = \llbracket x_\xi^\wedge = x \rrbracket \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \llbracket x_\xi^\wedge(\gamma^\wedge) = x(\gamma^\wedge) \rrbracket \\ &= \bigwedge_{\gamma \in \theta} \llbracket t_\xi^\wedge = x \downarrow(\gamma) \rrbracket \wedge \bigwedge_{\gamma \notin \theta} \llbracket 0 = x \downarrow(\gamma) \rrbracket \geq \pi_\xi \wedge b_\theta, \end{aligned}$$

откуда $\llbracket x \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket \geq \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\theta \wedge \pi_\xi = b_\theta$. Следовательно, $\llbracket x \in c_{00}(\Gamma^\wedge)^\wedge \rrbracket \geq \bigvee_{\theta \in \Theta} b_\theta = \mathbf{1}$, что и требовалось. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Предположим, что Q — экстремально несвязный компакт и X — банахова решетка. Обозначим символом $C_\#(Q, X)$ множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций $u : \text{dom}(u) \subset Q \rightarrow X$ таких, что $Q \setminus \text{dom}(u)$ — множество первой категории в Q и непрерывное продолжение $|u|$ поточечной нормы $q \mapsto \|u(q)\|$ на все Q принадлежит банаховой решетке непрерывных функций $C(Q)$. Вектор-функции u и v эквивалентны, если $u(q) = v(q)$ для всех $q \in \text{dom}(u) \cap \text{dom}(v)$. Если $\tilde{u}$ — класс эквивалентности функции u , то определим $|\tilde{u}| := |u|$. Множество $C_\#(Q, X)$ естественным образом снабжается структурой модуля над f -алгеброй $C(Q)$ и нормой $\|u\| := \||u|\|_\infty$ (ср. [3, 2.3.3]).

Лемма 5.3. Пусть $X \in \mathbb{V}$ — банахова решетка, а $\mathcal{X}$ — пополнение метрического пространства $X^\wedge$ внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$. Тогда $\|\mathcal{X}$ — банахова решетка $\| = 1$ и $\mathcal{X} \downarrow$ — $\mathbb{B}$ -циклическая банахова решетка изометрически и решеточно $\mathbb{B}$ -изоморфная $C_\#(Q, X)$, где Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно лишь применить описание спуска $\mathcal{X} \downarrow$ из [3, теорема 8.3.4(1)] и осуществить очевидный переход к ограниченным частям. $\square$

Следствие 5.4. $C_\#(Q, X)$ является $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решеткой, где $\mathbb{B}$ изоморфна булевой алгебре открыто замкнутых подмножеств Q . При этом M -проектор в $C_\#(Q, X)$, соответствующий открыто замкнутому множеству $U \subset Q$, является оператором умножения на характеристическую функцию χ_U .

Следствие 5.5. Пусть Γ обозначает непустое множество, а Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры $\mathbb{B}$. Тогда $\mathbb{B}$ -циклические банаховы решетки $c_0(\Gamma^\wedge) \downarrow$ и $C_\#(Q, c_0(\Gamma))$ решеточно и изометрически $\mathbb{B}$ -изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из лемм 5.1 и 5.3. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Лемма 5.3 является частным случаем общего результата о функциональной реализации конструкции булева расширения равномерного пространства, полученного Е. И. Гордоном и В. А. Любецким (см. [17, 18]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Важную информацию о строении банаховой решетки дает возможность вложения в нее классических пространств последовательностей c_0 , l^1 и l^∞ (см., например, [4, § 2.3, 2.4]). Из следствия 5.5 видно, что аналогичная роль в теории $\mathbb{B}$ -циклических банаховых решеток должна принадлежать $\mathbb{B}$ -вложимости банаховых решеток $C_\#(Q, c_0)$, $C_\#(Q, l^1)$ и $C_\#(Q, l^\infty)$ (см. также замечания 6.5 и 6.6 ниже).

§ 6. Булевозначная теорема Андо

Начнем с формулировки теоремы Андо, булевозначная интерпретация которой приводит к аналогичному результату для $\mathbb{B}$ -циклических банаховых решеток.

Теорема 6.1 [19]. Пусть X — банахова решетка размерности ≥ 3 . Тогда X изометрически изоморфна $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ для некоторых $1 \leq p \in \mathbb{R}$ и пространства с мерой (Ω, Σ, μ) или $c_0(\Gamma)$ для некоторого непустого множества Γ в том и только в том случае, когда каждая замкнутая векторная подрешетка в X служит образом положительного сжимающего проектора.

Напомним, что *положительный сжимающий проектор* в банаховой решетке — это положительный линейный оператор $P : X \rightarrow X$ такой, что $P^2 = P$ и $\|P\| \leq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Подпространство X_0 $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решетки X называют $\mathbb{B}$ -полным, если X_0 содержит перемешивания любых семейств из X_0 относительно любых разбиений единицы в $\mathbb{B}$. Будем говорить, что булева размерность $\mathbb{B}\text{-dim}(X)$ больше или равна 3, если в X можно подобрать три элемента так, что содержащее их наименьшее замкнутое $\mathbb{B}$ -полное подпространство $\mathbb{B}$ -изоморфно $\Lambda(\mathbb{B})^3$.

Лемма 6.3. Если $\mathcal{X} \in \mathbb{V}(\mathbb{B})$ — булевозначная реализация $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решетки X , то имеет место эквивалентность

$$\mathbb{B}\text{-dim}(X) \geq 3 \iff \|\dim(\mathcal{X}) \geq 3^\wedge\| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [2, предложение 5.8.5, теорема 5.8.11] следует, что $\mathbb{B}$ -циклическая банахова решетка является f -модулем над кольцом $\Lambda := \Lambda(\mathbb{B})$ (определение f -модуля см. в [2, 2.11.1]). Возьмем произвольные элементы $e_1, e_2, e_3 \in X$ и рассмотрим отображение $\varphi : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ из Λ^3 в X . Легко видеть, что если e_1, e_2, e_3 Λ -линейно независимы, то $X_0 := \varphi(\Lambda^3)$ будет $\mathbb{B}$ -полным подпространством X . В то же время φ инъективно в том и только в том случае, когда e_1, e_2, e_3 Λ -линейно независимы. Остается заметить, что Λ -линейная независимость e_1, e_2, e_3 равносильна равенству $\llbracket \dim(\mathcal{X}) \geq 3^\wedge \rrbracket = 1$. $\square$

Теперь есть все ингредиенты, необходимые для формулировки и доказательства второго основного результата статьи.

Теорема 6.4. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра и Q — ее стоуновский компакт. Для $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решетки X , удовлетворяющей условию $\mathbb{B}\text{-dim}(X) \geq 3$, равносильны следующие утверждения:

- (1) на любую $\mathbb{B}$ -полную замкнутую по норме подрешетку в X существует положительный сжимающий проектор, перестановочный с проекторами из $\mathbb{B}$;
- (2) существует такое разбиение единицы $(\pi_\gamma)_{\Gamma \cup \{0\}}$ в $\mathbb{B}$, где Γ — непустое множество кардиналов, что $\pi_0 X \simeq_{\pi_0 \mathbb{B}} L^p(\Phi)$ для некоторых $1 \leq p \in \Lambda(\mathbb{B})^u$ и инъективной банаховой решетки $L := L^1(\Phi)$ со свойством $M(L) \simeq \pi_0 \mathbb{B}$, и $\pi_\gamma X \simeq_{\pi_\gamma \mathbb{B}} C_\#(Q_\gamma, c_0(\gamma))$ для всех $\gamma \in \Gamma$, где Q_γ — открыто-замкнутое подмножество Q , соответствующее проектору π_γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\implies$ (2) В соответствии с теоремой 2.6 можно предположить, что $X = \mathcal{X} \downarrow$, где $\mathcal{X}$ — банахова решетка внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$, причем соотношения $\mathbb{B}\text{-dim}(X) \geq 3$ и $\llbracket \dim(\mathcal{X}) \geq 3^\wedge \rrbracket = 1$ равносильны согласно лемме 6.3. Легко проверить, что $\mathcal{X}_0$ будет замкнутой подрешеткой $\mathcal{X}$ в том и только в том случае, когда $X_0 := \mathcal{X}_0 \downarrow$ — $\mathbb{B}$ -полная замкнутая по норме подрешетка в X . Оператор $P : X \rightarrow X$ имеет вид $P = \pi \downarrow$ для оператора $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ в том и только в том случае, когда P экстенционален (см. [2, 1.5.6]), а последнее в силу формул (1) означает, что P перестановочен с проекторами из $\mathbb{B}$. Кроме того, P — положительный сжимающий проектор лишь в том случае, когда $\llbracket \pi — положительный сжимающий проектор \rrbracket = 1$. Таким образом, утверждение 6.4(1) равносильно тому, что $\llbracket \text{любая замкнутая подрешетка в } \mathcal{X} \text{ допускает положительный сжимающий проектор} \rrbracket = 1$. В силу упомянутой теоремы 6.4(1) равносильно также и тому, что $\mathcal{X}$ решеточно и изометрически изоморфна $L^p(\mu)$ для некоторого $1 \leq p \in \mathcal{R}$ и пространства с мерой (Ω, Σ, μ) или же $c_0(S)$ для некоторого непустого множества S внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B})$. Последнее запишем в символической форме:

$$\llbracket (\exists 1 \leq p \in \mathcal{R})(\exists \varphi) \mathcal{X} \simeq L^p(\varphi) \vee (\exists S) \mathcal{X} \simeq c_0(S) \rrbracket = 1.$$

Отсюда следует существование двух взаимно дополнительных элементов $\pi_0, \pi_0^* \in \mathbb{B}$ таких, что если положить $\mathbb{B}_1 := [0, \pi_0]$ и $\mathbb{B}_2 := [0, \pi_0^*]$, то можно подобрать элементы $p, \varphi \in \mathbb{V}(\mathbb{B}_1)$ и $S \in \mathbb{V}(\mathbb{B}_2)$, для которых справедливы два утверждения:

- (*) в модели $\mathbb{V}(\mathbb{B}_1)$ число $1 \leq p \in \mathcal{R}$, инъективная банахова решетка L и строго положительный порядково непрерывный функционал $\varphi : L \rightarrow \mathcal{R}$ со свойством Леви удовлетворяют оценке $\pi_0 \leq \llbracket \mathcal{X} \simeq L^p(\varphi) \rrbracket$;
- (**) в модели $\mathbb{V}(\mathbb{B}_2)$ множество S удовлетворяет оценке $\pi_0^* \leq \llbracket \mathcal{X} \simeq c_0(S) \rrbracket$.

Положим $\Phi := \varphi \downarrow$ и заметим, что в силу леммы 4.5 имеем $L^p(\Phi) \simeq_{\pi_0 \mathbb{B}} L^p(\varphi) \downarrow$. Теперь из утверждения (*) видно, что $\pi_0 X \simeq_{\pi_0 \mathbb{B}} L^p(\Phi)$.

Пусть $\kappa \in \mathbb{V}(\mathbb{B}_2)$ — мощность множества S . Ввиду предложения 2.9 булевозначный кардинал κ является перемешиванием относительно стандартных кардиналов, т. е. $\kappa = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma \gamma^\wedge$, где Γ — непустое множество кардиналов, $(b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ разбиение единицы в $\mathbb{B}_2$, $\gamma^\wedge$ — кардинал внутри $\mathbb{V}(\mathbb{B}_\gamma)$, $\mathbb{B}_\gamma := [0, b_\gamma]$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Переходя к модели $\mathbb{V}(\mathbb{B}_\gamma)$ (по схеме из [2, 1.3.7]) и учитывая утверждение (**), видим, что $\mathcal{X} \simeq c_0(\gamma^\wedge)$. Привлекая лемму 5.1 и определение 5.2, получаем $b_\gamma X \simeq_{b_\gamma \mathbb{B}} C_\#(Q_\gamma, c_0(\gamma))$.

(2) $\implies$ (1) Как и в лемме 3.3, отображение $\mathcal{X}_0 \mapsto \mathcal{X}_0 \downarrow$ осуществляет биекцию между замкнутыми по норме подрешетками в $\mathcal{X}$ и $\mathbb{B}$ -полными замкнутыми по норме подрешетками в X . Аналогично сжимающие положительные проекторы в $\mathcal{X}$ находятся во взаимно однозначном соответствии со сжимающими положительными проекторами в $\mathcal{X}$, коммутирующими с проекторами из $\mathbb{B}$. Остается заметить, что если выполнено утверждение (2), то банахова решетка $\mathcal{X}$ либо AL^p -пространство, либо $c_0(\Gamma)$, следовательно, любая замкнутая подрешетка в ней допускает сжимающий положительный проектор в силу принципа переноса. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Ненулевой положительный элемент x $\mathbb{B}$ -циклической банаховой решетки X называют $\mathbb{B}$ -атомом, если для любой пары дизъюнктивных элементов $x, y \in X_+$, $y + z \leq x$, существует проектор $\pi \in \mathbb{B}$ такой, что $\pi y = 0$ и $\pi^* z = 0$. Саму решетку X называют $\mathbb{B}$ -атомичной, если нуль является единственным элементом X , дизъюнктивным каждому $\mathbb{B}$ -атому в X . Если X то же, что и в теореме 6.4(2), то существует M -проектор $\rho \leq \pi_0$ такой, что $\rho^* X$ не имеет $\mathbb{B}$ -атомов, а ρX допускает представление

$$\rho X \simeq_{\rho \mathbb{B}} \left(\sum_{\gamma \in \Delta}^\oplus C_\#(P_\gamma, l^{p(\gamma)}(\gamma)) \right)_{l_\infty},$$

где Δ — множество кардиналов, а $(P_\gamma)_{\gamma \in \Delta}$ — семейство экстремально несвязных компактов. Это утверждение можно вывести из [20, теорема 5.4].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Если $\mathbb{B}$ -циклическая банахова решетка X удовлетворяет условию теоремы 6.4(1), то, как и в 6.4(2), $\pi_0 X \simeq_{\pi_0 \mathbb{B}} L^p(\Phi)$, и если $\pi := \pi_0^* = I_X - \pi_0$, то имеет место представление

$$\pi X \simeq_{\pi \mathbb{B}} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma}^\oplus C_\#(Q_\gamma, c_0(\gamma)) \right)_{l_\infty}.$$

При этом семейство экстремальных компактов $(Q_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ (как и в замечании 6.5), вообще говоря, не единственно. Причина заключается в феномене *смещения кардинальных чисел* в булевозначной модели. Обойти эту трудность и получить единственное представление можно так же, как и в [20], используя понятия чистой $\mathbb{B}$ -атомичности и стабильности [20, определения 3.4 и 3.6].

Авторы выражают благодарность рецензенту за труд по устранению опечаток и неточностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
2. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean valued analysis: Selected topics. Vladikavkaz: Vladikavkaz Sci. Center Press, 2014, (Trends Sci. South Russia).
3. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
4. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices. Berlin etc.: Springer-Verl., 1991.

5. Abramovich Y. A., Kitover A. K. Inverses of disjointness preserving operators. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Mem. Amer. Math. Soc.; N 679).
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. V. 2. Function spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1979.
7. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K -пространства // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 773–775.
8. Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. The Wickstead problem // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2008. V. 5. P. 293–333.
9. Gutman A. E. Locally one-dimensional K -spaces and σ -distributive Boolean algebras // Sib. Adv. Math. 1995. V. 5, N 2. P. 99–121.
10. Harmand P., Werner D., Wener W. M -Ideals in Banach spaces and Banach algebras. Berlin etc.: Springer-Verl., 1993. (Lecture Notes Math.; V. 1547).
11. Кусраев А. Г. Булевозначный принцип переноса для инъективных банаховых решеток // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 25, № 1. С. 57–65.
12. Takeuti G. Von Neumann algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan. 1983. V. 35, N 1. P. 1–21.
13. Takeuti G. C^* -algebras and Boolean valued analysis // Japan J. Math. 1983. V. 9, N 2. P. 207–246.
14. Ozawa M. Boolean valued interpretation of Banach space theory and module structure of von Neumann algebras // Nagoya Math. J. 1990. V. 117. P. 1–36.
15. Coppel W. A. Foundations of convex geometry. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1988.
16. Haydon R. Injective Banach lattices // Math. Z. 1977. Bd 156. S. 19–47.
17. Гордон Е. И., Любецкий В. А. Некоторые приложения нестандартного анализа в теории булевозначных мер // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 5. С. 1037–1041.
18. Гордон Е. И., Любецкий В. А. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным структурам. М.: Наука, 1983. С. 82–153.
19. Ando T. Banachverbände und positive Projektionen // Math. Z. 1969. Bd 109. S. 121–130.
20. Kusraev A. G. Atomicity in injective Banach lattices // Владикавказ. мат. журн. 2015. V. 17, N 3. P. 34–42.

Поступила в редакцию 4 марта 2019 г.

После доработки 11 марта 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027;
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 44–46, Владикавказ 362025
kusraev@smath.ru

Кутателадзе Семен Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru