D. N. Oskorbin, E. D. Rodionov, Ricci solitons and Killing fields on generalized Cahen–Wallach manifolds, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1165–1170

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.513>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.6.47.48

April 26, 2023, 16:19:45

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ И ПОЛЯ
КИЛЛИНГА НА ОБОБЩЕННЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ КАХЕНА — УОЛЛАХА

Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов

Аннотация. Исследуются солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена — Уоллаха. Уравнение солитона Риччи является обобщением уравнения Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях и тесно связано с потоками Риччи. Доказано, что на обобщенных многообразиях Кахена — Уоллаха уравнение солитона Риччи локально разрешимо с любой константой в уравнении солитона Риччи. В системе координат Бринкмана изучены поля Киллинга на таких многообразиях, указаны ограничения на размерность пространства киллинговых полей. В случае малой размерности для 2-симметрических лоренцевых многообразий получены решения уравнения Киллинга.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.513

Ключевые слова: солитоны Риччи, поля Киллинга, обобщенные многообразия Кахена — Уоллаха, система координат Бринкмана.

Посвящаем академику Ю. Г. Решетняку
в связи с его 90-летием

1. Основные определения. Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g . Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется лоренцевым многообразием.

Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — псевдориманово многообразие размерности n , ∇ — соответствующая связность Леви-Чивита. Тензор кривизны определим как

$$R(X, Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X, Y]}Z$$

и тензор Риччи — как

$$r(X, Y) = \text{tr}(V \mapsto R(X, V)Y),$$

где X, Y, Z, V — гладкие векторные поля на $\mathcal{M}$.

Геодезически полное (псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если тензор Риччи r удовлетворяет уравнению солитона Риччи:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где $\Lambda \in \mathbb{R}$, $L_X g$ — производная Ли метрики g в направлении дифференцируемого векторного поля X .

Солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков (см., например, обзор [1]). В общем случае задача исследования и классификации солитонов Риччи достаточно сложная, поэтому она рассматривается при различных

ограничениях на многообразии. К числу многообразий с такими ограничениями относятся 2- и 3-симметрические лоренцевы многообразия, которые были исследованы Сеновиллой, Д. В. Алексеевским и А. С. Галаевым (см. [2–4]). Заметим также, что при классификации 2-симметрических лоренцевых многообразий была доказана теорема о разложении таких пространств и одним из сомножителей данного разложения являются обобщенные пространства Кахена — Уоллаха.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенное пространство Кахена — Уоллаха $(\mathcal{C}W_d^{n+2}, g)$ размерности $n + 2 \geq 4$ порядка d определяется как $\mathbb{R}^{n+2}$ с метрикой

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u) x^i x^j (du)^2, \quad A = (a_{ij}(u)) = \sum_{k=0}^d H_k u^k,$$

где H_k — симметрические постоянные матрицы $n \times n$, H_d — невырожденная диагональная матрица.

Заметим, что обобщенные пространства Кахена — Уоллаха возникают при разложении 1-, 2- и 3-симметрических лоренцевых пространств в прямое произведение. Известно, что локально симметрическое риманово многообразие локально изометрично прямому произведению конечного числа неприводимых локально симметрических пространств и евклидова пространства, а неприводимое локально симметрическое пространство эйнштейново. В лоренцевом случае Кахен и Уоллах показали, что односвязное лоренцево симметрическое пространство изометрично произведению риманова симметрического пространства и одного из следующих лоренцевых многообразий:

- (a) $(\mathbb{R}, -dt^2)$,
- (b) универсальной накрывающей k -мерного пространства Де Ситтера или анти-Де Ситтера, $k \geq 2$,
- (c) пространства Кахена — Уоллаха $\mathcal{C}W^{n+2}(A) = (\mathbb{R}^{n+2}, g)$, где $A = (A_{ij})$ — постоянная симметричная матрица $n \times n$ с метрикой

$$g = -2 du(dv + A_{ij} x^i x^j du) + \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Псевдориманово пространство $(\mathcal{M}, g)$ называется *симметрическим порядком* k , если

$$\nabla^k R = 0, \quad \nabla^{k-1} R \neq 0,$$

где $k \geq 1$ и R — тензор кривизны (M, g) .

Для римановых многообразий из условия $\nabla^k R = 0$ вытекает $\nabla R = 0$. Однако лоренцевы k -симметрические пространства существуют при всех $k \geq 2$.

Теорема 1 [3, 4]. Локально неразложимое лоренцево многообразие $(\mathcal{M}, g)$ размерности $n + 2 \geq 4$ является 2-, 3-симметрическим в том и только в том случае, если оно локально изометрично обобщенному пространству Кахена — Уоллаха $(\mathcal{C}W_d^{n+2})$ порядка 2 (3).

Векторное поле X на (псевдо)римановом многообразии $(\mathcal{M}, g)$ называется *киллинговым*, если $L_X g = 0$.

Векторные поля Киллинга играют важную роль в дифференциальной геометрии и особенно при описании решений уравнения солитона Риччи.

Заметим, что неразложимые k -симметрические лоренцевы многообразия имеют тесную связь с более широким классом многообразий с метрикой pp -волн, а случае 2- и 3-симметрических входят в данный класс.

Лоренцево многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется *pp-волной*, если на $\mathcal{M}$ существует такое векторное поле $V \neq 0$, что $g(V, V) = 0$, $\nabla V = 0$, $R|_{V^\perp \wedge V^\perp} = 0$.

Если к тому же выполнено условие $\nabla_U R = 0 \ \forall U \in V^\perp$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется *плоской волной*.

Известно, что метрика *pp*-волны локально может быть задана уравнением

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + H(x^1, \dots, x^n, u)(du)^2.$$

В случаях, когда функция H квадратична по x_i на $\mathbb{R}^n$:

$$H(u, x^1, \dots, x^n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u)x^i x^j,$$

метрика становится плоской волной.

2. Уравнение солитона Риччи на многообразии Кахена — Уоллаха. В обозначениях разд. 1 справедлива

Теорема 2. *Обобщенное многообразие Кахена — Уоллаха $(\mathcal{C}W_d^{n+2}, g)$ является солитоном Риччи, причем уравнение солитона Риччи $r = \Lambda \cdot g + L_X g$ разрешимо для любой константы Λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Метрика g многообразия Кахена — Уоллаха $(\mathcal{C}W_d^{n+2}, g)$ является метрикой плоской волны, которая геодезически полная [5].

Вначале выпишем уравнение солитона Риччи для произвольной плоской волны

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + H(x^1, \dots, x^n, u)(du)^2$$

в специальной системе координат Бринкмана.

Пусть X — векторное поле на многообразии с координатами $V(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $X_j(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $U(v, x^1, \dots, x^n, u)$, где V, X_j, U — гладкие функции. Уравнение солитона Риччи принимает вид

$$\begin{aligned} 2U_v &= 0, \\ U_{x^j} + X_{j,v} &= 0, \\ U_u + V_v &= \Lambda, \\ 2X_{j,x^j} &= \Lambda, \\ X_{j,x^i} + X_{i,x^j} &= 0, \\ HU_{x^j} + X_{j,u} + V_{x^j} &= 0, \\ -\frac{1}{2}\Delta H + 2U_u H + 2V_u + \sum_{j=1}^n X_j H_{x^j} + U H_u &= \Lambda H. \end{aligned}$$

Далее находим частное решение, используя вид функции H :

$$H(v, x^1, \dots, x^n, u) = \sum_{k=0}^d (x^t H_k u^k x),$$

где x — вектор-столбец с компонентами $x^1, \dots, x^n$, H_k ($k \in \{0, \dots, c\}$) — постоянные матрицы размера $n \times n$. Положим $X = (V, X_1, \dots, X_n, U)$, где

$$V = \Lambda v + \frac{u^{d+1}}{2(d+1)} \sum H_{dii} + \dots + \frac{u^k}{2k} \sum H_{(k-1)ii} + \dots + \frac{u}{2} \sum H_{0ii},$$

$$X_j = \frac{\Lambda x^j}{2}, \quad U = 0.$$

Тогда последнее уравнение выполняется для обобщенных пространств Кахена — Уоллаха, поскольку $\frac{1}{2}\Delta H = 2V_u$ и $\sum_{j=1}^n X_j H_{x^j} = \Lambda H$, а выполнение остальных уравнений очевидно. Теорема доказана.

3. Поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена — Уоллаха. Поскольку два векторных поля, удовлетворяющих уравнению солитона Риччи при фиксированной константе Λ , отличаются на поле Киллинга, для описания общего решения уравнения солитона Риччи необходимо найти общий вид решений уравнения Киллинга на многообразиях Кахена — Уоллаха.

Пусть X — векторное поле на многообразии $(\mathcal{M}, g)$ с метрикой pp -волны:

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + H(x^1, \dots, x^n, u)(du)^2,$$

координаты которого $V(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $X_j(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $U(v, x^1, \dots, x^n, u)$, где V , X^j , U — гладкие функции.

Уравнение киллингова поля в нормальных координатах Бринкмана имеет вид

$$\begin{aligned} 2U_v &= 0, \\ U_{x^j} + X_{j,v} &= 0, \\ U_u + V_v &= 0, \\ 2X_{j,x^j} &= 0, \\ X_{j,x^i} + X_{i,x^j} &= 0, \\ HU_{x^j} + X_{j,u} + V_{x^j} &= 0, \\ 2U_u H + 2V_u + X_j H_{x^j} + UH_u &= 0. \end{aligned}$$

Следуя работе [6], в которой описан алгоритм вычисления полей Киллинга для метрик плоских волн вида

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u)x^i x^j \right) (du)^2,$$

имеем

$$U = au + b, \quad X_i = b_i(u) + f_{ik}x^k, \quad V = -av - \dot{b}_i(u)x^i + c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\{f_{ik}\}$ — постоянная кососимметрическая матрица, а функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{b}_i(u) = a_{ij}(u)b_j(u).$$

Данная система с начальными условиями на $b_i(0)$, $\dot{b}_i(u)$ разрешима, и размерность пространства решений равна $2n$.

Пусть $A = (a_{ij}(u))$, $F = (f_{ij})$. Для выполнения всех уравнений, определяющих поля Киллинга, как показано в [6], остается обеспечить равенство

$$(au + b)\partial_u A + 2aA + [A, F] = 0.$$

Посмотрим на диагональные элементы в этом матричном равенстве: в случае многообразия Кахена — Уоллаха это многочлены от u , в последнем слагаемом диагональные элементы равны нулю. Поэтому коэффициенты при старшей степени u будут равны $rah_{dii} + 2ah_{dii}$. По определению метрики $(\mathcal{W}_d^{n+2}, g)$

числа h_{dii} отличны от нуля, поэтому $a = 0$. Но тогда на диагонали останутся диагональные элементы матрицы $b\partial_u A$, которые обращаются в 0 только при $b = 0$.

Таким образом, для определения полей Киллинга на обобщенных пространствах Кахена — Уоллаха получаем следующее матричное уравнение: $[A, F] = 0$.

Далее, так как $A = \sum_{k=0}^d H_k u^k$, где коэффициенты H_k — постоянные матрицы, получаем систему уравнений $[H_k, F] = 0$ и задача сводится к поиску кососимметрической матрицы F , коммутирующей со всеми матрицами H_k .

Рассмотрим уравнение $[H_d, F] = 0$. Старший коэффициент H_d матричного многочлена H является диагональной матрицей с ненулевыми элементами на главной диагонали. Если диагональные элементы H_{dii} и H_{djj} различны, то $f_{ij} = f_{ji} = 0$, а если совпадают, то элементы $f_{ij} = -f_{ji}$ могут принимать любые значения.

Следовательно, размерность пространства решений $[A, F] = 0$ будет изменяться от 0 до $\frac{n(n-1)}{2}$, причем могут достигаться не все промежуточные размерности, поскольку они зависят от строения матриц H_k . Таким образом, размерность пространства полей Киллинга не меньше $2n+1$ и не больше $2n+1 + \frac{n(n-1)}{2}$. Отсюда, в частности, следует, что обобщенные пространства Кахена — Уоллаха не однородны. Итак, доказана

Теорема 3. Пусть X — векторное поле Киллинга с координатами $V(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $X_j(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $U(v, x^1, \dots, x^n, u)$ (V, X^j, U — гладкие функции) на обобщенном многообразии Кахена — Уоллаха $(\mathcal{C}W_d^{n+2}, g)$ размерности $n+2 \geq 4$ с метрикой

$$g = 2 dvdu + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u) x^i x^j \right) (du)^2, \quad a_{ij} = \sum_{k=0}^d H_{kij} u^k.$$

Тогда общее решение уравнения Киллинга имеет вид

$$U = 0, \quad X_i = b_i(u) + f_{ik} x^k, \quad V = -\dot{b}_i(u) x^i + c,$$

где $c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа, функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений $\dot{b}_i(u) = a_{ij}(u) b_j(u)$, (f_{ik}) — постоянная кососимметричная матрица, коммутирующая с $A = (a_{ij})$. Размерность пространства полей Киллинга не меньше $2n+1$ и не больше $2n+1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Заметим, что уравнения $\dot{b}_i(u) = a_{ij}(u) b_j(u)$ приводят к векторам Киллинга, образующим алгебру Гейзенберга (см. подробнее в [6]).

4. Поля Киллинга на 2-симметрических лоренцевых многообразиях. Рассмотрим случай 4-мерных неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразий. Они являются обобщенными пространствами Кахена — Уоллаха $(\mathcal{C}W_2^4, g)$, и в нормальных координатах Бринкмана (v, x, y, u) метрика примет вид

$$g = 2 dvdu + dx^2 + dy^2 + 2h(x, y, u) (du)^2,$$

где

$$h(x, y, u) = \frac{1}{2}((H_{11}u + F_{11})x^2 + 2F_{12}xy + (H_{22}u + F_{22})y^2).$$

Имеет место

Теорема 4. Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — 2-симметрическое лоренцево многообразие размерности 4 с выбранной нормальной системой координат Бринкмана (v, x, y, u) в окрестности U . Если матрицы H_{ij} , F_{ij} равны произведению константы и единичной матрицы, то всякое киллингово поле в нормальных координатах Бринкмана имеет вид

$$X = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v + (\psi_1(u) - fy)\partial_x + (\psi_2(u) + fx)\partial_y,$$

где $f, c \in \mathbb{R}$, $\psi_i(u)$ — решение уравнения

$$\ddot{\psi}_i(u) - 2(H_{ii}u + F_{ii})\psi_i(u) = 0;$$

в остальных случаях любое киллингово поле в нормальных координатах Бринкмана имеет вид

$$X = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v + \psi_1(u)\partial_x + \psi_2(u)\partial_y,$$

где $c \in \mathbb{R}$ и

$$\ddot{\psi}_2(u) - 2(H_{22}u + F_{22})\psi_2(u) - 2F_{12}\psi_1(u) = 0,$$

$$\ddot{\psi}_1(u) - 2(H_{11}u + F_{11})\psi_1(u) - 2F_{12}\psi_2(u) = 0.$$

Доказательство данной теоремы использует прямые вычисления и содержится в [7].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если хотя бы в одной из матриц H , F диагональные элементы различны, то получаем киллингово поле:

$$X = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v + \psi_1(u)\partial_x + \psi_2(u)\partial_y.$$

Размерность пространства киллинговых полей равна пяти.

В случае, когда у матриц H , F диагональные элементы равны, т. е. $H_{11} = H_{22}$, $F_{11} = F_{22}$, если $F_{12} \neq 0$, то $f = 0$ и решения будут иметь тот же вид, что и в предыдущем случае. Если $F_{12} = 0$, то f может быть любым вещественным числом и решение имеет вид

$$X = (c - \dot{\psi}_1(u)x - \dot{\psi}_2(u)y)\partial_v + (\psi_1(u) - fy)\partial_x + (\psi_2(u) + fx)\partial_y.$$

В этой ситуации размерность пространства киллинговых полей равна шести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Adv. Lect. Math. 2010. V. 11. P. 1–38.
2. Senovilla J. M. Second-order symmetric Lorentzian manifolds. I. Characterization and general results // Classical quantum gravity. 2008. V. 25, N 24. P. 1–25.
3. Alexeevskii D. V., Galaev A. S. Two-symmetric Lorentzian manifolds // J. Geom. Physics. 2011. V. 61, N 12. P. 2331–2340.
4. Galaev A. S. Classification of third-order symmetric Lorentzian manifolds // Classical quantum gravity. 2015. V. 201, N 4. P. 541–559.
5. Candela A. M., Flores J. L., Sanchez M. On general plane fronted waves. Geodesics renewal // Relativity and gravitation. 2003. V. 35, N 4. P. 631–649.
6. Blau M, O’Loughlin M. Homogeneous plane waves // Nuclear physics. 2003. V. 654. P. 135–176.
7. Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д., Эрнст И. В. О солитонах Риччи на 2-симметрических четырехмерных лоренцевых многообразиях // Изв. АлтГУ. 2017. № 4. С. 126–130.

Поступила в редакцию 15 апреля 2019 г.

После доработки 28 июня 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Оскорбин Дмитрий Николаевич, Родионов Евгений Дмитриевич
Алтайский государственный университет,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru