A. Ferone, M. V. Korobkov, A. Roviello, The Morse–Sard theorem and Luzin N -property: a new synthesis for smooth and Sobolev mappings, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 5, 1171–1185

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.514>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.6.47.48

April 26, 2023, 15:09:13

ТЕОРЕМА МОРСА — САРДА И N -СВОЙСТВО
ЛУЗИНА: НОВЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ГЛАДКИХ
И СОБОЛЕВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
А. Фероне, М. В. Коробков, А. Ровиелло

Аннотация. Для регулярных отображений евклидовых пространств изучается вопрос об искажении хаусдорфовой размерности образа данного множества, на котором дифференциал отображения имеет ограничение по рангу.

Для классических пространств функций гладкости k и для гёльдеровых отображений данная проблема решена в статьях А. Я. Дубовицкого, Бейтса и Морейры. В настоящей работе эта проблема решается для соболевских классов функций (включая случай с дробным показателем гладкости). При этом соболевский случай изучается при минимальных предположениях на показатель интегрируемости (когда можно гарантировать лишь непрерывность, а не всюду дифференцируемость рассматриваемых функций). Попутно установлен ряд новых фактов и для классического гладкого случая.

Доказательства большинства результатов основаны на наших предыдущих статьях с Бургейном и Кристенсеном (2013, 2015).

DOI 10.33048/smzh.2019.60.514

Ключевые слова: теорема Морса — Сарда, N -свойство Лузина, мера Хаусдорфа, отображения классов Гёльдера и Соболева, потенциальные пространства Бесселя.

Посвящается Юрию Григорьевичу Решетняку,
выдающемуся математику и благородному человеку

§ 1. Введение

Теорема Морса — Сарда в своей классической форме утверждает, что множество критических значений отображения $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ класса гладкости C^{n-d+1} имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^d$. Точнее, для множества критических точек $Z_v = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{rank } \nabla v(x) < d\}$ эта теорема гарантирует, что

$$\mathcal{L}^d(v(Z_v)) = 0$$

при условии, что $v \in C^k$ при $k \geq \max(1, n - d + 1)$. Теорема была доказана Морсом [1] в 1939 г. для случая $d = 1$ и впоследствии Сардом [2] в 1942 г. для общего векторнозначного случая. Знаменитые контрпримеры Уитни [3] показывают, что предположения гладкости C^{n-d+1} на отображение v оптимально-точные (неулучшаемые).

В данной статье теорема Морса — Сарда рассматривается в контексте N -свойства Лузина. Точнее, если τ и σ являются положительными параметрами,

---

Публикация выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России (проект 1.8126.2017/8.9) и РФФИ (проект 18-01-00649-а).

будем говорить, что непрерывное отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ обладает (τ, σ) - N -свойством, если

$$\mathcal{H}^\sigma(v(E)) = 0, \quad \text{когда} \quad \mathcal{H}^\tau(E) = 0,$$

где $\mathcal{H}^s$ означает s -мерную меру Хаусдорфа (см. недавнюю статью [4], где обсуждается история вопроса).

Отправной точкой настоящего исследования являются результаты Бейтса и Морейры, содержащиеся в [5, 6], и при их изложении нам понадобятся некоторые полезные обозначения. Для C^1 -гладкого отображения $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ и целого числа $m \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим множество m -критических точек

$$\tilde{Z}_{v,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{rank } \nabla v(x) \leq m\}.$$

Тогда для параметров $\tau, \sigma > 0$ говорят, что отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ обладает (τ, σ, m) - N -свойством, если

$$\mathcal{H}^\sigma(v(E)) = 0, \quad \text{когда} \quad E \subset \tilde{Z}_{v,m} \quad \text{с} \quad \mathcal{H}^\tau(E) = 0.$$

Далее будем говорить, что отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ обладает *строгим* (τ, σ, m) - N -свойством, если

$$\mathcal{H}^\sigma(v(E)) = 0, \quad \text{когда} \quad E \subset \tilde{Z}_{v,m} \quad \text{с} \quad \mathcal{H}^\tau(E) < \infty.$$

В этих обозначениях приведенная выше классическая теорема Морса — Сарда означает, что каждое C^k -отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ имеет строгое $(n, d, d-1)$ - N -свойство, если $k \geq n-d+1$. Бейтс и Морейра доказали следующее универсальное расширение этого результата.

Теорема 1.1 [5, 6]. Пусть $m \in \{0, \dots, n-1\}$, $k \geq 1$, $d \geq m$, $0 \leq \alpha \leq 1$ и $v \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. Тогда для каждого $\tau \in [m, n]$ отображение v имеет (τ, σ, m) - N -свойство с

$$\sigma = m + \frac{\tau - m}{k + \alpha}.$$

Более того, это N -свойство строгое, если выполнено хотя бы одно из нижеприведенных дополнительных условий:

- 1) $\tau = n$ (в частности, это включает в себя случай теоремы Морса — Сарда);
- 2) $\tau > m$ и $\alpha = 0$ (это означает, что $v \in C^k$);
- 3) $\tau > m$ и $v \in C^{k,\alpha+}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$.

Здесь $C^{k,\alpha}$ и $C^{k,\alpha+}$ обозначают пространство C^k -гладких функций, у которых k -я производная $\nabla^k f$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и соответственно строгому условию Гёльдера (т. е. с асимптотически зануляющимся коэффициентом) с тем же показателем (см. точные определения в § 2).

Заметим, что утверждение теоремы 1.1 оптимально-точное. А именно, если ее дополнительные условия 1–3 не выполняются, то и соответствующее (τ, σ, m) - N -свойство не является строгим, это следует из контрпримеров Уитни [3] (см. также комментарии в [7]).

Легко видеть, что предположение $\tau > m$ в теореме 1.1 гарантирует оценку

$$m < \sigma < \tau \tag{1.1}$$

(неравенства в (1.1) превращаются в равенства, если и только если $\tau = m$). Это означает, в частности, следующую оценку искажения размерности Хаусдорфа для множеств $E \subset \tilde{Z}_{v,m}$ с $\tau = \dim_H(E)$:

$$\dim_H f(E) \leq \sigma < \dim_H E. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1 при $\alpha = 0$ (т. е. при $v \in C^k$) установлена гораздо раньше в 1967 г. А. Я. Дубовицким [8] и включает в себя многие предыдущие теоремы типа Морса — Сарда как частный случай. Например, если $\alpha = 0$, $\tau = n$, то

$$\sigma = m + \frac{n - m}{k}$$

и утверждение теоремы 1.1 совпадает с теоремой Федерера (частный случай теоремы Дубовицкого) (см. [9, теорема 3.4.3]). Конечно, она включает в себя и первоначальную теорему Морса — Сарда (когда $k = n - m$, $\sigma = m + 1$).

Отметим также, что теорема 1.1 сформулирована как гипотеза Нортеном (доказавшим эту гипотезу для случая $\sigma = d$, $\tau = (k + \alpha)(d - m) + m$, см. [7, с. 369]) и включает в качестве частных случаев целый ряд родственных результатов, полученных другими авторами: Й. Йомдиным [10] (случай $\tau = n$, $v \in C^{k, \alpha+}$, см. также [11]), М. Кучерой [12] (случай $\tau = n$, $m = 1$, т. е. когда градиент зануляется на критическом множестве) и т. д.

Цель настоящей статьи — распространить теорему 1.1 на отображения соболевских пространств. Попутно получен ряд результатов, новых и для классического гладкого случая (см. п. 1.2).

1.1. Теорема типа Морса — Сарда — Лузина для случая пространств Соболева. Здесь и в дальнейшем $W_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ означает классическое пространство Соболева, состоящее из отображений $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, все обобщенные частные производные которых до порядка k включительно принадлежат пространству Лебега L_p .

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ и $0 \leq \alpha < 1$. Одной из самых естественных разновидностей пространств Соболева дробного порядка являются *бесселевы потенциалные пространства* $\mathcal{L}_p^{k+\alpha}$. Напомним, что функция $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_p^{k+\alpha}$, если она является сверткой функции $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ с ядром Бесселя $G_{k+\alpha}$, где $\widehat{G_{k+\alpha}}(\xi) = (1 + 4\pi^2 \xi^2)^{-(k+\alpha)/2}$. Известно, что для целых показателей (т. е. когда $\alpha = 0$) имеет место классическое тождество

$$\mathcal{L}_p^k(\mathbb{R}^n) = W_p^k(\mathbb{R}^n), \quad \text{если } 1 < p < \infty$$

(см., например, [13]). Как известно, если $(k + \alpha)p > n$, то функции из потенциального пространства $\mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ непрерывны по теореме вложения С. Л. Соболева, но градиент ∇v в общем случае уже не является непрерывным (или даже всюду корректно определенным). Таким образом, для пространств Соболева m -критическое множество определяется как

$$\tilde{Z}_{v,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A_v \text{ или } x \in \mathbb{R}^n \setminus A_v \text{ с } \text{rank } \nabla v(x) \leq m\}.$$

Здесь и в дальнейшем A_v означает множество «плохих» точек, т. е. или точек недифференцируемости функции v , или точек, не являющихся точками Лебега для ∇v . Таким образом, в настоящей статье¹⁾ эти «плохие» нерегулярные точки автоматически классифицируются как m -критические для любого m (такое предположение, конечно, делает соответствующие (τ, σ, m) - N -свойства сильнее).

¹⁾В предыдущей нашей статье m -критические точки и «плохие» точки A_v рассматривались отдельно.

Теорема 1.2. Пусть $m \in \{0, \dots, n-1\}$, $k \geq 1$, $d \geq m$, $0 \leq \alpha < 1$, $p > 1$, $(k+\alpha)p > n$ и $v \in \mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. Обозначим $\tau_* = n - (k+\alpha-1)p$. Предположим дополнительно, что $\tau_* \neq 0$ и

$$\tau > \max\{m, \tau_*\}.$$

Тогда отображение v обладает строгим (τ, σ, m) - N -свойством с

$$\sigma = m + \frac{p(\tau - m)}{\tau + (k + \alpha)p - n}. \quad (1.3)$$

Кроме того, если $\tau = m > \tau_*$, то v имеет нестрогое (τ, m, m) - N -свойство.

Здесь необходимо сделать несколько замечаний.

• Прежде всего отметим, что величины σ в теоремах 1.1, 1.2 совпадают для крайних значений параметра $\tau = m$ или $\tau = n$, но они различны при $m < \tau < n$ (конечно, тогда σ для соболевского случая больше). Тем не менее значение σ в теореме 1.1 можно получить, взяв предел в формуле (1.3) при $p \rightarrow \infty$.

• Предположение $\tau > \max\{m, \tau_*\}$ в теореме 1.2 гарантирует, что $\sigma < \tau$, и, следовательно, имеет место уменьшение размерности Хаусдорфа (1.2). Данное предположение существенно и оптимально-неулучшаемо: действительно, если $\tau \leq \tau_*$, то регулярность отображения слишком мала, и это служит непреодолимым препятствием для получения желаемых уменьшительных оценок размерности. (Иначе говоря, влияние «плохого» множества A_v размерности $\dim_H A_v = \tau_*$ слишком велико для данного случая, и это делает бесполезными ограничения на ранг градиента ∇v на множестве $E \setminus A_v$.) Кроме того, в [4] нами построен контрпример отображения из $\mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, не удовлетворяющего (τ, σ, m) - N -свойству с $\tau = \tau_* = m = \sigma = 1$.

Теорема 1.2 не покрывает предельных случаев $(k+\alpha)p = n$, $\tau = \tau_*$ и $\tau_* = 0$. Однако можно охватить и эти случаи, если воспользоваться нормой Лоренца. А именно, обозначим через $\mathcal{L}_{p,1}^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ пространство функций, которые можно представить как свертку ядра Бесселя $G_{k+\alpha}$ с функцией g из пространства Лоренца $L_{p,1}$ (см. определение этих пространств в § 2).

Теорема 1.3. Пусть $m \in \{0, \dots, n-1\}$, $k \geq 1$, $d \geq m$, $0 \leq \alpha < 1$, $p \geq 1$ и отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ удовлетворяет одному из приведенных ниже условий:

- (i) $\alpha = 0$, $k \geq n$, и $v \in W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$;
- (ii) $0 \leq \alpha < 1$, $p > 1$, $(k+\alpha)p \geq n$ и $v \in \mathcal{L}_{p,1}^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$.

Обозначим $\tau_* = n - (k+\alpha-1)p$. Предположим дополнительно, что

$$\tau > m \quad \text{и} \quad \tau \geq \tau_*.$$

Тогда отображение v обладает строгим (τ, σ, m) - N -свойством с тем же самым параметром σ , заданным формулой (1.3). Далее, если $\tau = m \geq \tau_*$, то v имеет соответствующее нестрогое (τ, m, m) - N -свойство.

Таким образом, здесь уже охвачен и предельный случай $\tau = \tau_*$. Но если $\tau < \tau_*$, то теоремы 1.2, 1.3 не работают. Чтобы оценить хаусдорфову меру множества $v(E)$ для этого случая, необходимо использовать обычное (τ, σ) - N -свойство (без ограничений на градиент), которое изучено в нашей предыдущей статье [4].

Теорема 1.4 [4]. Пусть $\alpha > 0^2)$, $1 < p < \infty$, $\alpha p > n$ и $v \in \mathcal{L}_p^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. Предположим, что $0 < \tau \leq n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(о) если $\tau \neq \tau_* = n - (\alpha - 1)p$, то v имеет (τ, σ) - N -свойство, где параметр $\sigma = \sigma(\tau)$ определяется по формуле

$$\sigma(\tau) := \max \left\{ \tau, \frac{p\tau}{\alpha p - n + \tau} \right\} = \begin{cases} \tau & \text{при } \tau \geq \tau_* := n - (\alpha - 1)p, \\ \frac{p\tau}{\alpha p - n + \tau} & \text{при } 0 < \tau < \tau_*; \end{cases} \quad (1.4)$$

(оо) если $\alpha > 1$ и $\tau = \tau_* > 0$, то $\sigma(\tau) = \tau_*$ и отображение v в общем случае может не иметь (τ_*, τ_*) - N -свойства, т. е. возможна ситуация $\mathcal{H}^{\tau_*}(v(E)) > 0$ для некоторого множества $E \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $\mathcal{H}^{\tau_*}(E) = 0$.

Аналогичные результаты анонсированы в [14] (см. в [4] некоторые комментарии и замечания по истории вопроса).

Теорема 1.4 пропускает предельные случаи $\alpha p = n$ и $\tau = \tau_*$. Как и выше, эти случаи можно охватить, используя нормы Лоренца.

Теорема 1.5 [15, 4]. Пусть $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ является отображением, удовлетворяющим одному из условий:

- (i) $v \in W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$;
- (ii) $v \in \mathcal{L}_{p,1}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ для некоторого $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty)$ с $\alpha p \geq n$.

Предположим, что $0 < \tau \leq n$. Тогда v является непрерывной функцией, обладающей (τ, σ) - N -свойством, где опять значение $\sigma = \sigma(\tau)$ определяется по формуле (1.4) (с $\alpha = k$ и $p = 1$ для случая (i)).

Итак, в последней теореме критический случай $\tau = \tau_*$ также охвачен. Заметим, наконец, что утверждение теоремы 1.3 для случая $\tau = \tau_* > n$ существенно сильнее, чем утверждение теоремы 1.5 для того же случая $\tau = \tau_*$, несмотря на то, что здесь $\sigma = \tau = \tau_*$ для обеих теорем. В самом деле, теорема 1.3 (в отличие от теоремы 1.5) утверждает наличие строгого (τ, σ) -свойства для этого случая, т. е. $\mathcal{H}_*^\tau(f(E)) = 0$, когда $E \subset \tilde{Z}_{v,m}$ с $\mathcal{H}_*^\tau(E) < \infty$.

1.2. Аналоги свойств Фубини — Дубовицкого для теоремы Морса — Сарда. Как указано Нортоном [7, с. 369], отсутствие теоремы Фубини для мер Хаусдорфа создает препятствие для доказательства некоторых новых теорем типа Морса — Сарда. Тем не менее еще в 1957 г. А. Я. Дубовицкий получил неожиданный результат, согласно которому некоторые свойства типа Фубини всегда сохраняются для теоремы Морса — Сарда.

Теорема А [16]. Пусть $n, d, k \in \mathbb{N}$ и $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ является C^k -гладким отображением. Тогда выполнено равенство

$$\mathcal{H}^\mu(Z_v \cap v^{-1}(y)) = 0 \quad \text{для } \mathcal{L}^d\text{-(п. в.) } y \in \mathbb{R}^d, \quad (1.5)$$

где $\mu = n - d + 1 - k$ и $Z_v = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{rank } \nabla v(x) < d\}$.

Здесь и далее $\mathcal{H}^\beta$ интерпретируется как «считающая мера», когда $\beta \leq 0$. Таким образом, при $k \geq n - d + 1$ имеем $\mu \leq 0$ и $\mathcal{H}^\mu$ в формуле (1.5) становится просто считающей мерой, поэтому теорема Дубовицкого содержит теорему Морса — Сарда как частный случай.

Оказывается, аналогичные свойства типа Фубини имеют место и для теорем 1.1–1.3. Нам понадобится следующее понятие. Для параметров $\mu \geq 0$,

²⁾Здесь и в теоремах 1.5, 1.9 в отличие от теорем 1.1–1.3 параметр α может быть произвольным положительным числом (не обязательно меньшим единицы).

$q \geq m$ и $\tau > 0$ будем говорить, что отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ обладает (τ, μ, q, m) - N -свойством, если

$$\mathcal{H}^\mu(E \cap v^{-1}(y)) = 0 \text{ для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in v(E), \text{ когда } E \subset \tilde{Z}_{v,m} \text{ с } \mathcal{H}^\tau(E) = 0. \quad (1.6)$$

Очевидно, что

$$\text{если } \mu \leq 0, \text{ то } (\tau, \mu, q, m)\text{-}N\text{-свойство эквивалентно } (\tau, q, m)\text{-}N\text{-свойству.} \quad (1.7)$$

Говорят, что отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ удовлетворяет *строгому* (τ, μ, q, m) - N -свойству, если

$$\mathcal{H}^\mu(E \cap v^{-1}(y)) = 0 \text{ для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in v(E), \text{ когда } E \subset \tilde{Z}_{v,m} \text{ с } \mathcal{H}^\tau(E) < \infty.$$

Теорема 1.6 (гладкий случай $v \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$). В предположениях теоремы 1.1 утверждение о (τ, σ, m) - N -свойстве может быть заменено более сильным утверждением о наличии (τ, μ, q, m) - N -свойства для любых $\tau \in [m, n]$ и $q \in [m, \sigma]$ с

$$\mu = \tau - m - (k + \alpha)(q - m).$$

Более того, если $q > m$ и по крайней мере одно из дополнительных условий 1–3 теоремы 1.1 выполнено, то это (τ, μ, q, m) - N -свойство сильное.

Подобные утверждения справедливы и для случая пространств Соболева и Соболева — Лоренца.

Теорема 1.7 (соболевский случай $v \in \mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, $(k+\alpha)p > n$). В предположениях теоремы 1.2 утверждение о строгом (τ, σ, m) - N -свойстве может быть заменено более сильным утверждением о наличии строгого (τ, μ, q, m) - N -свойства для любых $\tau > \max(\tau_*, m)$ и $q \in (m, \sigma]$ с

$$\mu = \tau - m - \left(k + \alpha - \frac{n}{p} + \frac{\tau}{p}\right)(q - m). \quad (1.8)$$

Кроме того, если $q = m$, $\tau > \tau_*$ и $\tau \geq m$, то v имеет нестрогое (τ, μ, m, m) - N -свойство с $\mu = \tau - m$.

Теорема 1.8 (случай пространств Соболева — Лоренца). В предположениях теоремы 1.3 утверждение о строгом (τ, σ, m) - N -свойстве может быть заменено более сильным утверждением о наличии строгого (τ, μ, q, m) - N -свойства для любых $\tau \geq \tau_*$, $\tau > m$, $q \in (m, \sigma]$ с тем же μ , как в формуле (1.8). Кроме того, если $q = m$ и $\tau \geq \max(m, \tau_*)$, то v имеет нестрогое (τ, μ, m, m) - N -свойство с $\mu = \tau - m$.

Легко видеть, что если в формулировке теорем 1.6–1.8 взять $q = \sigma$ со значением σ , определенном, как в теоремах 1.1–1.3, то $\mu = 0$. Это значит (см. (1.7)), что теоремы 1.6–1.8 включают в себя предыдущие теоремы 1.1–1.3 как частный случай.

1.3. Некоторые исторические замечания. Интересно отметить, что результат Дубовицкого в теореме А долгое время оставался почти незамеченным западными математиками (как, впрочем, и доказанная им теорема 1.1 для случая $\alpha = 0$); другое доказательство было дано в недавней статье [11], где аналогичный результат установлен также для классов гёльдеровых отображений $C^{k,\alpha+}$ с асимптотически зануляющимся коэффициентом (2.1). Далее, в [17] Хайлаш и Циммерман заменили предположение $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ теоремы А предположением о регулярности по Соболеву $v \in W_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ с $p > n$ (это аналог

результата Де Паскаля [18] о справедливости теоремы Морса — Сарда для классов Соболева, ср. с предположениями настоящей статьи $kr > n$ или $kr \geq n$ в теоремах 1.2–1.8).

Легко видеть, что сама теорема А является частным случаем теоремы 1.6 настоящей статьи с параметрами $\tau = n$, $\alpha = 0$ и $q = m + 1 = d$. То же предположение $q = d$ использовалось и в [11, 17]. Отметим, что это предположение радикально упрощает доказательства, поскольку из него немедленно вытекает, что множество $v(E) \subset \mathbb{R}^d$ является $\mathcal{H}^q$ - σ -конечным. Но в общем случае (при $q < d$) в теоремах 1.6–1.8 множество $v(E)$ может иметь хаусдорфову размерность много больше q даже при выполнении требуемых условий $E \subset \tilde{Z}_{v,m}$ с $\mathcal{H}^\tau(E) = 0$. Тем не менее удивительным и неожиданным образом равенство $\mathcal{H}^\mu(v^{-1}(y) \cap Z_{v,m}) = 0$ выполняется для q -почти всех $y \in v(E)$, как это и требуется в определении (1.6).

В заключение этого параграфа отметим, что утверждения теорем 1.6–1.8 для случая $\tau = n$ были доказаны в нашей предыдущей статье [19] (см. также более ранние статьи [15, 20–23] второго соавтора с Бургейном, Кристенсеном и Хайлашем по этой теме). Без градиентных ограничений аналоги теорем типа Дубовицкого — Фубини 1.4–1.5 получены в другой нашей предыдущей статье [4]. В частности, справедлива

Теорема 1.9 [4]. Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $\alpha p > n$ и $v \in \mathcal{L}_p^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. Предположим, что $0 < \tau \leq n$ и $\tau > \tau_* = n - (\alpha - 1)p$. Тогда для каждого числа $q \in [0, \tau]$ и множества $E \subset \mathbb{R}^n$ со свойством $\mathcal{H}^\tau(E) = 0$ имеет место равенство

$$\mathcal{H}^{\tau-q}(E \cap v^{-1}(y)) = 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in \mathbb{R}^d. \quad (1.9)$$

Кроме того, если $v \in \mathcal{L}_{p,1}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ или $v \in W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, то это же утверждение имеет место при более слабых предположениях $\alpha p \geq n$ (соответственно $k \geq n$) и $\tau \geq \tau_*$.

В заключение несколько слов о доказательствах. Когда рассматриваются соболевские функции из теоремы 1.2, в первую очередь нужно устранить технические трудности, связанные с нерегулярными точками. Сделать это удастся благодаря тому факту, что если $v \in \mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, то множество «плохих» точек A_v довольно мало: его размерность Хаусдорфа удовлетворяет неравенству $\dim_H A_v \leq \tau_*$. Таким образом, при $\tau_* < 0$ имеем $A_v = \emptyset$, а для $\tau_* \geq 0$ можно использовать оценки (1.9) для устранения влияния A_v . Как только упрощена ситуация вокруг «плохого» множества A_v , можно следовать методам, разработанным в [15, 21], и использовать некоторые универсальные оценки для критических значений на кубах, полученные в [19].

Статья построена следующим образом. В § 2 даются некоторые обозначения, формальные определения рассматриваемых пространств функций и предварительные результаты. В § 3 излагаются вышеупомянутые оценки для множества критических значений на кубах. Наконец, в § 4 доказываются сформулированные выше новые результаты.

§ 2. Предварительные сведения

Как принято, будем говорить, что отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ принадлежит классу $C^{k,\alpha}$ для некоторого положительного целого числа k и $0 < \alpha \leq 1$, если $v \in C^k$ и существует константа $L \geq 0$ такая, что

$$|\nabla^k v(x) - \nabla^k v(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Чтобы упростить обозначения, в статье принято следующее соглашение: при $\alpha = 0$ пространство $C^{k,\alpha}$ отождествляется с обычными пространством функций класса гладкости C^k .

Аналогично отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ принадлежит классу $C^{k,\alpha+}$ для некоторого положительного целого числа k и $0 < \alpha \leq 1$, если существует функция $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\omega(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и

$$|\nabla^k v(x) - \nabla^k v(y)| \leq \omega(r) \cdot |x - y|^\alpha, \quad \text{когда } |x - y| < r. \quad (2.1)$$

Под n -мерным *промежутком* ниже подразумевается замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат. Если Q является n -мерным промежутком, то символом $\ell(Q)$ обозначается длина его стороны.

Для подмножества S из $\mathbb{R}^n$ символами $\mathcal{L}^n(S)$ и $\mathcal{H}^m(S)$ обозначается его внешняя мера Лебега и m -мерная мера Хаусдорфа соответственно. Напомним, что для любого подмножества S из $\mathbb{R}^n$ по определению

$$\mathcal{H}^m(S) = \lim_{t \searrow 0} \mathcal{H}_t^m(S) = \sup_{t > 0} \mathcal{H}_t^m(S),$$

где для каждого $0 < t \leq \infty$

$$\mathcal{H}_t^m(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } S_i)^m : \text{diam } S_i \leq t, S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right\}.$$

Известно, что $\mathcal{H}^n(S) = \mathcal{H}_{\infty}^n(S) \sim \mathcal{L}^n(S)$ для множеств $S \subset \mathbb{R}^n$.

Для упрощения обозначений ниже будем писать $\|f\|_{L_p}$ вместо $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ и т. д.

Пространства Соболева $W_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, как обычно, определяются как состоящие из $\mathbb{R}^d$ -значных функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, у которых все обобщенные частные производные порядка $l \leq k$ принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$ (более подробное обсуждение определения и дифференциальных свойств этих функций см., например, в [24]). Норма этих пространств задается формулой

$$\|f\|_{W_p^k} = \|f\|_{L_p} + \|\nabla f\|_{L_p} + \cdots + \|\nabla^k f\|_{L_p},$$

и если не указано обратного, все нормы в пространстве $\mathbb{R}^s$ ($s \in \mathbb{N}$) представляют собой обычные евклидовы нормы.

При работе с локально интегрируемыми функциями всегда предполагается, что выбран их наилучший представитель. Напомним, что если $w \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, то точный представитель w^* определяется для всех точек $x \in \Omega$ по формуле

$$w^*(x) = \begin{cases} \lim_{r \searrow 0} \oint_{B(x,r)} w(z) dz, & \text{если предел существует и конечен,} \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

здесь перечеркнутый знак интеграла, как обычно, обозначает интегральное среднее, т. е.

$$\oint_{B(x,r)} w(z) dz = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} w(z) dz,$$

и $B(x,r) = \{y : |y - x| < r\}$ представляет собой открытый шар радиуса r с центром в x . В дальнейшем избегаем специальных обозначений для наилучшего представителя, предполагая просто выполнение равенства $w^* = w$.

Известно, что для $k < n$ функции из пространств Соболева $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ непрерывны при $p > \frac{n}{k}$ и могут быть разрывны при $p \leq p_0 = \frac{n}{k}$. Определенное ниже пространство Соболева — Лоренца $W_{p_0,1}^k(\mathbb{R}^n) \subset W_{p_0}^k(\mathbb{R}^n)$ представляет собой «уточняющее улучшение» соответствующего соболевского пространства: функции из данного пространства Соболева — Лоренца, в частности, непрерывны (см., например, [23]).

В настоящей статье используется только норма Лоренца $L_{p,1}$, $p \geq 1$, и в этом случае ее можно посчитать по формуле

$$\|f\|_{L_{p,1}} = \int_0^{+\infty} [\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})]^{\frac{1}{p}} dt$$

(см., например, [25, предложение 3.6]). Из данного определения сразу же вытекает неравенство

$$\|f\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_{p,1}}.$$

Обозначим через $W_{p,1}^k(\mathbb{R}^n)$ множество всех функций $v \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$ таких, что вдобавок норма $\|\nabla^k v\|_{L_{p,1}}$ конечна. Это пространство совпадает с пространством потенциалов Бесселя — Лоренца, определенным ранее в п. 1.1:

$$\mathcal{L}_{p,1}^k(\mathbb{R}^n) = W_{p,1}^k(\mathbb{R}^n), \quad \text{если } 1 < p < \infty$$

(см., например, [4]).

Положим по определению $\|g\|_{L_{p,1}(E)} := \|1_E \cdot g\|_{L_{p,1}}$, где 1_E представляет собой индикаторную функцию множества E . Для нормы Лоренца справедлив следующий аналог свойства аддитивности:

$$\sum_i \|f\|_{L_{p,1}(Q_i)}^p \leq \|f\|_{L_{p,1}(\bigcup_i Q_i)}^p \quad (2.2)$$

для любого семейства неперекрывающихся кубов Q_i (см., например, [25, лемма 3.10] или [26]).

2.1. О теоремах типа Фубини для графиков непрерывных функций. Напомним, что по обычной теореме Фубини если множество $E \subset \mathbb{R}^2$ имеет нулевую плоскую меру, то для $\mathcal{H}^1$ -почти всех прямых L , параллельных координатным осям, справедливо равенство $\mathcal{H}^1(L \cap E) = 0$. Следующий результат можно рассматривать как функциональную теорему типа Фубини.

Теорема 2.1 (см. [15, теорема 5.3]). Пусть $\mu \geq 0$, $q > 0$, и пусть функция $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ непрерывна. Для множеств $E \subset \mathbb{R}^n$ определим функцию множества

$$\Phi(E) = \Phi_{\mu,q}(E) := \inf_{E \subset \bigcup_j D_j} \sum_j (\text{diam } D_j)^\mu [\text{diam } v(D_j)]^q, \quad (2.3)$$

где инфимум берется по всем счетным семействам компактных множеств $\{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ таким, что $E \subset \bigcup_j D_j$. Тогда функция $\Phi(\cdot)$ счетно аддитивна и справедлива импликация

$$\Phi(E) = 0 \Rightarrow [\mathcal{H}^\mu(E \cap v^{-1}(y)) = 0 \text{ для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in \mathbb{R}^d].$$

§ 3. Оценки критических значений на кубах

В этом параграфе формулируются оценки определенной выше функции множества Φ , полученные в [19, приложение] для подмножеств критического множества в кубах для разных классов отображений.

Для каждого из следующих трех пунктов зафиксируем параметры $m \in \{0, \dots, n-1\}$ и $d \geq m$. Возьмем также положительный параметр $q \geq m$ и параметр $\mu \geq 0$, необходимые в определении функции множества Φ из (2.3).

Для отображения $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ рассмотрим регулярную часть критического множества:

$$Z_v = \tilde{Z}_{v,m} \setminus A_v = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus A_v : \text{rank } \nabla v(x) \leq m\}.$$

Достаточно ограничиться исследованием следующего подмножества критических точек:

$$Z'_v = \{x \in Z_v : |\nabla v(x)| \leq 1\}.$$

3.1. Оценки на кубах для гёльдеровых отображений. Чтобы доказать теорему 1.6, понадобится

Теорема 3.1 [19]. Пусть $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ и $v \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. Тогда существует константа $\delta = \delta_v > 0$ такая, что для каждого n -мерного промежутка $Q \subset \mathbb{R}^n$ размера $\ell(Q) \leq \delta$ справедлива оценка

$$\Phi(Q \cap Z'_v) \leq C A^{q-m} \ell(Q)^{q+\mu+(k+\alpha-1)(q-m)},$$

где константа C зависит только от n, m, k, α, d и

$$A = \sup_{x,y \in Q} \frac{|\nabla^k v(x) - \nabla^k v(y)|}{\ell(Q)^\alpha}.$$

3.2. Оценки на кубах для классов отображений Соболева. Чтобы доказать теорему 1.7, понадобится

Теорема 3.2 [19]. Пусть $k \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$ с $k + \alpha > 1$, $1 < p < \infty$ и

$$v \in \mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) \quad \text{с } (k + \alpha)p > n. \quad (3.1)$$

Тогда отображение v непрерывно и существует (зависящая от v) функция $h \in L_p(\mathbb{R}^n)$ такая, что

(i) если $(k + \alpha - 1)p > n$, то градиент ∇v представляет собой непрерывную равномерно ограниченную функцию и для каждого достаточно малого n -мерного промежутка $Q \subset \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$\Phi(Z'_v \cap Q) \leq C \xi^{q-m} r^{q+\mu+(k+\alpha-1-\frac{n}{p})(q-m)}, \quad (3.2)$$

где $r = \ell(Q)$, $\xi = \|h\|_{L_p(Q)}$ и константа C зависит только от n, m, k, α, d, p ;

(ii) если $(k + \alpha - 1)p < n$, то при дополнительном предположении

$$q + \mu > \tau_* := n - (k + \alpha - 1)p \quad (3.3)$$

для каждого n -мерного промежутка $Q \subset \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$\Phi(Z'_v \cap Q) \leq C(\xi^q r^{(k+\alpha-\frac{n}{p})q+\mu} + \xi^{q-m} r^{q+\mu+(k+\alpha-1-\frac{n}{p})(q-m)}) \quad (3.4)$$

с теми же самыми ξ, r .

3.3. Оценки на кубах для отображений классов Соболева — Лоренца. Теорема 3.2 не покрывает некоторых предельных случаев. Чтобы охватить их и доказать теорему 1.8, понадобится

Теорема 3.3 [19]. Пусть предположения теоремы 3.2 выполнены с

$$v \in \mathcal{L}_{p,1}^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) \quad \text{для} \quad (k+\alpha)p \geq n \quad (3.5)$$

вместо (3.1). Тогда отображение v непрерывно и существует функция $h \in L_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

(i) если $(k+\alpha-1)p \geq n$, то утверждение (i) теоремы 3.2 выполнено с $\xi = \|h\|_{L_{p,1}(Q)}$;

(ii) если $(k+\alpha-1)p < n$, то при более слабом предположении $q + \mu \geq \tau_*$ (вместо (3.3)) оценка (3.4) справедлива с $\xi = \|h\|_{L_{p,1}(Q)}$.

Далее, если вместо (3.5) выполнено включение $v \in W_1^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ для некоторого $k \geq n$, то

(iii) если $k-1 \geq n$, то утверждение (i) теоремы 3.2 выполнено с $\alpha = 0$, $p = 1$ и $\xi = \|\nabla^k v\|_{L_1(Q)}$;

(iv) если $k = n$, то оценка (3.4) справедлива с $\alpha = 0$, $p = 1$ и $\xi = \|\nabla^n v\|_{L_1(Q)}$.

§ 4. Доказательства основных результатов

Требуется доказать только теоремы 1.6–1.8 (о свойствах типа Фубини — Дубовицкого), поскольку исходные теоремы 1.2, 1.3 являются частными случаями теорем 1.7, 1.8, когда $q = \sigma$ и $\mu = 0$.

Крайний случай $\tau = n$ для всех трех теорем доказан в предыдущих статьях [15, 19], так что ниже всегда будем предполагать, что

$$0 < \tau < n.$$

Сначала проверим утверждения о наличии строгих N -свойств. Зафиксируем соответствующие параметры $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\mu \geq 0$, $q \in (m, \sigma]$ и отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, удовлетворяющее предположениям одной из теорем 1.6–1.8. Необходимо доказать, что

$$\mathcal{H}^\mu(E \cap v^{-1}(y)) = 0 \quad \text{для} \quad \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in \mathbb{R}^d, \quad \text{когда} \quad E \subset \tilde{Z}_{v,m} \quad \text{с} \quad \mathcal{H}^\tau(E) < \infty. \quad (4.1)$$

Прежде всего нужно упростить ситуацию и избавиться от технических сложностей, связанных с нерегулярными точками $A_v \subset \tilde{Z}_{v,m}$ отображений из классов Соболева. Напомним, что «плохое» множество A_v относительно мало:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(A_v) &= 0 \quad \forall t > \tau_* := n - (k + \alpha - 1)p, \\ &\text{если} \quad v \in \mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) \quad (\text{случай теоремы 1.7}); \\ \mathcal{H}^{\tau_*}(A_v) &= 0, \quad \text{если } v \text{ из теоремы 1.8} \end{aligned} \quad (4.2)$$

(см., например, [27, 23]).

Для случая теоремы 1.7 возьмем $t \in (\tau_*, \tau)$. Тогда по теореме 1.9 имеем

$$\mathcal{H}^{t-q}(A_v \cap v^{-1}(y)) = 0 \quad \text{для} \quad \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in \mathbb{R}^d. \quad (4.3)$$

Согласно прямому элементарному вычислению если $\tau_* > 0$, то

$$\tau_* - q < \mu = \tau - m - \left(k + \alpha - \frac{n}{p} + \frac{\tau}{p}\right)(q - m). \quad (4.4)$$

В самом деле, по определению параметра $\tau_* = n - (k + \alpha - 1)p$ последнее неравенство эквивалентно следующему соотношению:

$$(\tau - \tau_*) \left(1 - \frac{q - m}{p}\right) > 0. \quad (4.5)$$

С другой стороны, согласно сделанным предположениям

$$\frac{q-m}{p} \leq \frac{\sigma-m}{p} = \frac{\tau-m}{\tau+(k+\alpha)p-n} < \frac{\tau}{\tau} = 1, \quad (4.6)$$

поэтому неравенства (4.4), (4.5) в самом деле выполнены. Далее, из (4.4), в свою очередь, вытекает, что для параметра $t \in (\tau_*, \tau)$, достаточно близкого к τ_* , имеем

$$t - q < \mu.$$

Тогда из последнего неравенства и (4.3) получаем, что

$$\mathcal{H}^\mu(A_v \cap v^{-1}(y)) = 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in \mathbb{R}^d, \quad (4.7)$$

т. е. множество A_v в самом деле является пренебрежимым в свойстве (4.1).

Рассмотрим другой случай, когда v удовлетворяет предположениям теоремы 1.8. В этом случае теорема 1.9 вместе с равенством (4.2) влекут тождество

$$\mathcal{H}^{\tau*-q}(A_v \cap v^{-1}(y)) = 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in \mathbb{R}^d.$$

Таковыми же вычислениями показывается, что

$$\tau_* - q \leq \mu,$$

поэтому равенство (4.7) снова выполнено, и в каждом случае получаем, что «плохое» множество A_v в самом деле пренебрежимо при проверке искомого свойства (4.1).

Более того, поскольку счетное объединение множеств $\mathcal{H}^\mu$ -меры нуль также является множеством $\mathcal{H}^\mu$ -меры нуль, вместо (4.1) достаточно показать, что

$$\mathcal{H}^\mu(E \cap v^{-1}(y)) = 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in v(E), \quad \text{когда } E \subset Z'_v \text{ с } \mathcal{H}^\tau(E) < \infty, \quad (4.8)$$

где, напомним, $Z'_v = \{x \in \tilde{Z}_{v,m} \setminus A_v : |\nabla v(x)| \leq 1\}$.

Вследствие теоремы 2.1 для доказательства (4.8) достаточно установить тождество

$$\Phi(E) = 0, \quad \text{когда } E \subset Z'_v \text{ с } \mathcal{H}^\tau(E) < \infty \quad (4.9)$$

для функции множества Φ , заданной формулой (2.3). Но тождество (4.9) является сравнительно простым следствием оценок на кубах, приведенных выше в пп. 3.1–3.3, и неравенства Гёльдера. Проиллюстрируем, как вывести (4.9) из этих оценок, только для соболевского случая (т. е. для теоремы 1.7), так как вычисления для других случаев аналогичны.

Начиная с этого момента, зафиксируем функцию $v \in \mathcal{L}_p^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$. Рассмотрим более трудный случай, когда $\tau_* = n - (k + \alpha - 1)p > 0$ и соответствующая оценка (3.4) имеет дополнительное слагаемое в правой части (в сравнении с формулой (3.2)). Зафиксируем параметры $\tau > \max(\tau_*, m)$, $q \in (m, \sigma]$ и μ , вычисленные по формуле (1.8). Возьмем множество $E \subset Z'_v$ с $\mathcal{H}^\tau(E) < \infty$ и рассмотрим семейство неперекрывающихся n -мерных промежутков $\{Q_i\}$ размеров $r_i = \ell(Q_i)$ таких, что

$$\sup_i r_i \leq \delta, \quad E \subset \bigcup_i Q_i \quad \text{и} \quad \sum_i r_i^\tau \leq C,$$

где $C \sim \mathcal{H}^\tau(E)$ и $\delta < 1$ является малым параметром.

Рассмотрим функцию Φ , определенную в теореме 2.1 для заданных q, μ , и функцию $h \in L_p(\mathbb{R}^n)$ из теоремы 3.2. В силу аддитивности Φ и формул (3.4), (1.8) получаем

$$\Phi(E) \leq \sum_i \Phi(Q_i) \leq C \sum_i (\xi_i^q r_i^{\tau(1-\frac{q-m}{p})-m\frac{\tau_*}{p}} + \xi_i^{q-m} r_i^{\tau(1-\frac{q-m}{p})}) = C(S_1 + S_2), \quad (4.10)$$

где $\xi_i = \|h\|_{L_p(Q_i)}$. Оценим обе суммы в (4.10) по отдельности. Оценка второй суммы вследствие имеющегося неравенства $q - m < p$ (см. (4.6)) проводится легче:

$$S_2 \leq \left(\sum_i \xi_i^p \right)^{\frac{q-m}{p}} \left(\sum_i r_i^\tau \right)^{1-\frac{q-m}{p}} \leq C \|h\|_{L_p(\bigcup_i Q_i)}^{\frac{q-m}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0$$

(использовано неравенство Гёльдера). Последний вывод вытекает сразу из предположения $\tau < n$ и следующего простого факта:

$$\mathcal{L}^n \left(\bigcup_i Q_i \right) = \sum_i \ell(Q_i)^n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sum_i \ell(Q_i)^\tau \leq C, \quad \sup_i \ell(Q_i) \rightarrow 0.$$

При оценке первой суммы S_1 необходимо по отдельности рассмотреть две возможные ситуации.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $q \geq p$. Выберем параметр δ достаточно малым, чтобы можно было предположить без потери общности, что $\xi_i < 1$ для всех i . Прямым вычислением ввиду соотношений $q \leq \sigma = m + \frac{p(\tau-m)}{\tau+(k+\alpha)p-n}$ получаем

$$\tau \left(1 - \frac{q-m}{p} \right) - m \frac{\tau_*}{p} \geq \tau \left(1 - \frac{\sigma-m}{p} \right) - m \frac{\tau_*}{p} = (p-\tau_*) \frac{m(\tau-\tau_*)+p\tau}{p(\tau-\tau_*+p)} > 0.$$

Тогда вследствие предположений $r_i < \delta < 1$ имеем

$$S_1 = \sum_i \xi_i^q r_i^{\tau(1-\frac{q-m}{p})-m\frac{\tau_*}{p}} \leq \sum_i \xi_i^q \leq \left(\sum_i \xi_i^p \right)^{\frac{q}{p}} = \|h\|_{L_p(\bigcup_i Q_i)}^{\frac{q}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

СЛУЧАЙ 2. Пусть $q < p$. Тогда справедливы следующие элементарные тождества:

$$\tau \left(1 - \frac{q-m}{p} \right) - m \frac{\tau_*}{p} = \tau \left(1 - \frac{q}{p} \right) + (\tau - \tau_*) \frac{m}{p} \geq \tau \left(1 - \frac{q}{p} \right).$$

Следовательно,

$$S_1 = \sum_i \xi_i^q r_i^{\tau(1-\frac{q-m}{p})-m\frac{\tau_*}{p}} \leq \sum_i \xi_i^q r_i^{\tau(1-\frac{q}{p})}$$

(неравенство Гёльдера)

$$\leq \left(\sum_i \xi_i^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_i r_i^\tau \right)^{1-\frac{q}{p}} \leq C \|h\|_{L_p(\bigcup_i Q_i)}^{\frac{q}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Итак для обоих случаев 1 и 2 установлено, что $\Phi(E) \leq \omega(\delta)$, где функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию $\omega(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow 0$. Тем самым доказано требуемое равенство $\Phi(E) = 0$.

Доказательство для случаев, когда функция v принадлежит пространству Гёльдера $C^{k,\alpha+}$ или некоторому пространству Соболева — Лоренца, следует той же схеме с использованием двух простых фактов:

$$|\nabla^k v(x) - \nabla^k v(y)| \leq \omega(r) \cdot |x - y|^\alpha \quad \text{для } |x - y| < r$$

с $\omega(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, если $v \in C^{k,\alpha+}$ или $v \in C^k$ (т. е. при $\alpha = 0$);

$$\sum_i \|h\|_{L_{p,1}(Q_i)}^p \rightarrow 0 \text{ при } \sum_i \ell(Q_i)^\tau \leq C, \quad \sup_i \ell(Q_i) \rightarrow 0,$$

для любой (фиксированной) функции $h \in L_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, где снова Q_i представляют собой семейства неперекрывающихся n -мерных промежутков (см. (2.2)). Поскольку нет никаких существенных отличий или трудностей в реализации этих аргументов, опускаем детали.

Доказательства нестрогих N -свойств в теоремах 1.6–1.8 базируются на тех же самых оценках с очевидными упрощениями в вычислениях. Более того, справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Используя те же аргументы и оценки, легко проверить, что в случае утверждений нестрогих N -свойств в теоремах 1.1–1.3 имеет место неравенство

$$\mathcal{H}^\sigma(v(E)) < \infty, \text{ когда } E \subset Z'_v = \{x \in \tilde{Z}_{v,m} \setminus A_v : |\nabla v(x)| \leq 1\} \text{ с } \mathcal{H}^\tau(E) < \infty.$$

Более того, в силу тех же причин и теоремы 5.4 из [15] для случаев утверждений нестрогих N -свойств в теоремах 1.6–1.8 справедливы неравенства

$$\mathcal{H}^\mu(E \cap v^{-1}(y)) < \infty \text{ для } \mathcal{H}^q\text{-п. в. } y \in v(E), \text{ когда } E \subset Z'_v \text{ с } \mathcal{H}^\tau(E) < \infty.$$

Благодарности. Завершающая стадия работы над статьей прошла во время визита М. В. Коробкова в Университет провинции Кампания им. Луиджи Ванвители (Италия) в 2019 г., проходившего при поддержке фонда GNAMPA, и М. В. Коробков очень благодарен за оказанное гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morse A. P. The behavior of a function on its critical set // Ann. of Math. 1939. V. 40. P. 62–70.
2. Sard A. The measure of the critical values of differentiable maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1942. V. 48. P. 883–890.
3. Whitney H. A function not constant on a connected set of critical points // Duke Math. J. 1935. V. 1. P. 514–517.
4. Ferone A., Korobkov M. V., Roviello A. On Luzin N -property and uncertainty principle for the Sobolev mappings // Anal. PDE. 2019. V. 12, N 5. P. 1149–1175.
5. Bates S. M., Moreira C. De nouvelles perspectives sur le théorème de Morse–Sard // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2001. V. 332, N 1. P. 13–17.
6. De A. Moreira C. G. T. Hausdorff measures and the Morse–Sard theorem // Publ. Mat. 2001. V. 45. P. 149–162.
7. Norton A. A critical set with nonnull image has large Hausdorff dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 296. P. 367–376.
8. Дубовицкий А. Я. О множестве точек вырождения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 1. С. 27–36.
9. Federer H. Geometric measure theory. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1969.
10. Yomdin Y. The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings // Math. Ann. 1983. V. 264, N 4. P. 495–515.

11. Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P. Sard's theorem for mappings in Hölder and Sobolev spaces // Manuscripta Math. 2005. V. 118. P. 383–397.
12. Kučera M. Hausdorff measures of the set of critical values of functions of the class $C^{k,\lambda}$ // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1972. V. 13, N 2. P. 333–350.
13. Stein E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1970. (Princeton Math.; Ser 30).
14. Alberti G. Generalized N -property and Sard theorem for Sobolev maps // Rend. Lincei Mat. Appl. 2012. V. 23. P. 477–491.
15. Hajlasz P., Korobkov M. V., Kristensen J. A bridge between Dubovitskii–Federer theorems and the coarea formula // J. Funct. Anal. 2017. V. 272, N 3. P. 1265–1295.
16. Дубовицкий А. Я. О структуре множеств уровня дифференцируемых отображений n -мерного куба в k -мерный куб // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21, № 3. С. 371–408.
17. Hajlasz P., Zimmermann S. The Dubovitskii–Sard theorem in Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. 2017. V. 66, N 2. P. 705–723.
18. De Pascale L. The Morse–Sard theorem in Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. 2001. V. 50, N 3. P. 1371–1386.
19. Ferone A., Korobkov M. V., Roviello A. On some universal Morse–Sard type theorem. 2018. arXiv:1706.05266.
20. Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J. On the Morse–Sard property and level sets of Sobolev and BV-functions // Rev. Mat. Iberoam. 2013. V. 29, N 1. P. 1–23.
21. Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J. On the Morse–Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$ // J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal). 2015. V. 2015, N 700. P. 93–112.
22. Korobkov M. V., Kristensen J. On the Morse–Sard theorem for the sharp case of Sobolev mappings // Indiana Univ. Math. J. 2014. V. 63, N 6. P. 1703–1724.
23. Korobkov M. V., Kristensen J. The trace theorem, the Luzin N - and Morse–Sard properties for the sharp case of Sobolev–Lorentz mappings // J. Geom. Anal. 2018. V. 28, N 3. P. 2834–2856.
24. Evans L. C., Gariepy R. F. Measure theory and fine properties of functions. Boca Raton, FL: CRC Press, 1992. (Stud. Adv. Math.).
25. Malý J. Advanced theory of differentiation — Lorentz spaces. 2003. <https://www.scribd.com/document/291534463/Advanced-Diff-Theory-Jan-Maly>.
26. Романов А. С. Об абсолютной непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1147–1156.
27. Swanson D. Pointwise inequalities and approximation in fractional Sobolev spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 2002. V. 149, N 2. P. 147–174.

Поступила в редакцию 21 февраля 2019 г.

После доработки 21 февраля 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Фероне Адель

Университет провинции Кампания им. Луиджи Ванвители,
ул. Линкольна, 5, Касерта 81100, Италия
Adele.FERONE@unicampania.it

Коробков Михаил Вячеславович

Фуданский Университет,
ул. Хандан 220, Шанхай 200433, Китай;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru

Ровиелло Алба

Университет провинции Кампания им. Луиджи Ванвители,
ул. Линкольна 5, Касерта 81100, Италия
alba.roviello@unicampania.it