A. A. Borovkov, Integro-local theorems in boundary crossing problems for compound renewal processes, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1229–1246

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.604>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.197.8

April 26, 2023, 09:46:46

ИНТЕГРО–ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. А. Боровков

Аннотация. Найдена точная асимптотика вероятности того, что момент пересечения траекторией обобщенного процесса восстановления произвольной удаленной границы принадлежит заданному малому интервалу времени. В качестве важного элемента доказательства получены предельные теоремы для условного распределения скачков процесса при фиксированном конце траектории обобщенного процесса восстановления.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.604

Ключевые слова: обобщенный процесс восстановления, большие отклонения, граничные задачи, момент пересечения удаленной границы, интегро-локальные теоремы, условное распределение скачков, задача о разорении.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $\xi = (\tau, \zeta)$, $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1), \dots$, где $\tau > 0$. Обозначим

$$T_n := \sum_{j=1}^n \tau_j, \quad Z_n := \sum_{j=1}^n \zeta_j \quad \text{при } n \geq 1, \quad T_0 = Z_0 = 0.$$

Пусть при $t \geq 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : T_k > t\}, \quad \nu(t) := \max\{k \geq 0 : T_k \leq t\} = \eta(t) - 1. \quad (1.1)$$

Рассмотрим обобщенные процессы восстановления (ОПВ)

$$Z(t) := Z_{\nu(t)}, \quad Y(t) := Z_{\eta(t)}, \quad t \geq 0,$$

и обозначим

$$a_\tau = \mathbf{E}\tau, \quad a_\zeta = \mathbf{E}\zeta, \quad a = \frac{a_\zeta}{a_\tau}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}Z(t) \sim ta, \quad \mathbf{E}Y(t) \sim ta \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Везде, если не оговорено противное, будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде:

$$[\mathbf{C}] \quad \mathbf{E}e^{v|\xi|} < \infty \quad \text{при некотором } v > 0.$$

Работа выполнена при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.3 (проект № 0314–2016–0008), а также гранта РФФИ (проект 18–01–00101а).

Кроме того, мы будем предполагать, что случайный вектор $\xi = (\tau, \zeta)$ является *нерешетчатым*.

В основе результатов этой работы лежат интегро-локальные предельные теоремы для ОПВ, установленные в [1], т. е. утверждения о точной асимптотике интегро-локальных вероятностей

$$\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x]), \quad (1.2)$$

где $\Delta[x]$ есть полуинтервал $\Delta[x] := [x, x + \Delta)$, $\Delta = \Delta_T \rightarrow 0$ достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$ (сокращенно $\Delta = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$), $\alpha = x/T$ принадлежит некоторому компактному множеству (отрезку) K , которое будет определено ниже.

Чтобы сформулировать нужные утверждения, нам понадобится ряд предварительных сведений. Положим

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, \quad \mathcal{A} = \{(\lambda, \mu) : \mathbf{A}(\lambda, \mu) < \infty\}$$

и введем в рассмотрение так называемую базовую функцию $A(\mu)$, которая определяется равенством

$$A(\mu) := -\sup\{\lambda : A(\lambda, \mu) \leq 0\}.$$

Если

$$\mathbf{A}(\lambda, \mu) > 0 \quad \text{при всех } (\lambda, \mu) \in \partial\mathcal{A}, \quad (1.3)$$

то $A(\mu)$ — единственное решение уравнения (относительно λ)

$$\mathbf{A}(-\lambda, \mu) = 0, \quad (1.4)$$

которое является аналитическим. В общем случае обозначим через (μ_-, μ_+) максимальный интервал, содержащий точку $\mu = 0$, на котором функция $A(\mu)$ аналитична. Этот интервал всегда непустой, так как $\mathbf{A}(0, 0) = 0$ (т. е. $A(0) = 0$) и функция $\mathbf{A}$ аналитична в окрестности точки $(0, 0)$.

Рассмотрим далее преобразование Лежандра $D(\alpha)$ над функцией $A(\mu)$:

$$D(\alpha) = \sup_{\mu} (\alpha\mu - A(\mu)). \quad (1.5)$$

Положим

$$\alpha_- = A'(\mu_- + 0), \quad \alpha_+ = A'(\mu_+ - 0).$$

Тогда область (α_-, α_+) является областью аналитичности функции $D(\alpha)$. В широких предположениях функция $D(\alpha)$ является функцией уклонений ОПВ $Z(t)$. В правой части (1.5) суп достигается в точке $\mu(\alpha)$, которая является единственным решением уравнения

$$A'(\mu) = \alpha$$

(функция $A(\mu)$ выпукла и, стало быть, $A'(\mu)$ монотонна), так что

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) + \lambda(\alpha), \quad \text{где } \lambda(\alpha) = -A(\mu(\alpha)).$$

Свойства функций $A(\mu)$, $D(\alpha)$, $\mu(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$ детально изучены в [1, 2].

Чтобы определить нужный нам компакт K , нам понадобится еще так называемое «запретное» множество (β_-, β_+) . Если $\lambda_+ = \sup\{\lambda : \mathbf{E} e^{\lambda\tau} < \infty\} \geq D(0)$, то это множество пусто. Условие $\lambda_+ \geq D(0)$ является весьма широким, оно выполнено, например, если выполнено хотя бы одно из следующих условий (см. [2]).

1. Множество $\mathcal{A}^{<0} := \{(\lambda, \mu) : \mathbf{A}(\lambda, \mu) < 0\}$ вложено в полуплоскость $\lambda \leq \lambda_+$ (это всегда так, если τ и ζ независимы).

2. $\mathbf{E}\zeta = 0$.

3. Либо $\lambda_+ = \infty$, либо функция $\mathbf{E}e^{\mu\zeta}$ всюду конечна.

Если же $\lambda_+ < D(0)$, то, как показано в [1, лемма 2.1], функция $\lambda(\alpha)$ достигает своего максимума в точке $\alpha = 0$, $\lambda(0) = D(0)$. Она возрастает при $\alpha < 0$ и убывает при $\alpha > 0$, $\lambda(a) = 0$. Запретная область $[\beta_-, \beta_+]$ определяется как максимальный отрезок, на котором $\lambda(\alpha) \geq \lambda_+$.

Можно показать также, что если $a > 0$ и m_+ — максимальное решение уравнения $A(\mu) = -\lambda_+$, то $\beta_+ = A'(m_+)$. Аналогичное утверждение верно при $a < 0$ (см. [1]).

Появление «запретного» множества $[\beta_-, \beta_+]$ связано с тем, что при $\lambda_+ < D(0)$ в области уклонений $\alpha \in [\beta_-, \beta_+]$ определяющую роль начинают играть большие скачки τ . Например, при $\lambda_+ < D(0)$, $\ln \mathbf{P}(\tau > T) \sim -\lambda_+ T$,

$$\ln \mathbf{P}(Z(T) \in T\Delta[0]) \geq \ln \mathbf{P}(\tau > T) \sim -T\lambda_+ \gg -TD(0) \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

в то время как правая часть в (1.6) описывает асимптотику левой части в случае $\lambda_+ \geq D(0)$. Вне отрезка $[\beta_-, \beta_+]$ асимптотика $\ln \mathbf{P}(Z(T) \in T\Delta[\alpha])$ описывается как $-TD(\alpha)$.

Компакт K , который нам потребуется в приведенных ниже интегро-локальных теоремах, мы определим как отрезок

$$K \subset (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+],$$

содержащий окрестность точки $\alpha = a$.

Положим

$$\zeta(t) = \zeta_{\eta(t)}, \quad \gamma(t) = T - T_{\nu(T)}, \quad \chi(T) = T_{\eta(t)} - T,$$

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2), \quad B(u, v, \mathbf{w}) = \{\gamma(T) \geq u, \chi(T) \geq v, \zeta(T) \in \mathbf{w}\}.$$

Теорема 1.1 [1]. Пусть $\xi = (\tau, \zeta)$ — нерешетчатый случайный вектор, $\alpha = x/T \in K$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x]; B(u, v, \mathbf{w})) \\ &= \frac{\Delta}{\sqrt{T}} C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} I_Z(\alpha, u, v, \mathbf{w}) (1 + o(1)) + O(e^{-T(D(\alpha) + \varepsilon)}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$I_Z(\alpha, u, v, \mathbf{w}) := \int_u^\infty e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{P}(\tau > y + v, \zeta \in \mathbf{w}) dy, \quad C(\alpha) := C(1, \alpha),$$

$C(\theta, \alpha)$ — положительная непрерывная в конусе $\mathcal{D} := \{(\theta, \alpha) : \alpha/\theta \in (\alpha_-, \alpha_+)\}$ функция, определенная в соотношении (4.5) в [1], $\Delta = \Delta_T$ сходится к 0 достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$, остаточные члены $o(1)$ и $O(\cdot)$ равномерны по $\alpha \in K$, $u \leq u_0$ и всем $v \geq 0$, $\mathbf{w}$; здесь $u_0 < \infty$ — произвольная постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В дополнение к результатам [1] нетрудно показать, что если вместо события $B(u, v, \mathbf{w})$ рассматривать в (1.7) событие $\bar{B}(u, v, \mathbf{w}) = \{\gamma(T) < u, \chi(T) \geq v, \zeta(T) \in \mathbf{w}\}$, $u \leq u_0$, то компакт K можно расширить до любого отрезка из (α_-, α_+) (запретное множество исчезает), а множитель $I_Z(\alpha, u, v, \mathbf{w})$ следует заменить на $\int_0^u e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{P}(\tau > y + v, \zeta \in \mathbf{w}) dy$.

**§ 2. Пределные теоремы
для условного распределения скачков
при фиксированном конце траектории**

2.1. Основная теорема. Аналогичная задача для случайных блужданий рассматривалась в [3, §3.1]. Как и в теореме 1.1, мы будем предполагать, что нормированное уклонение $\alpha = x/T$ принадлежит компакту $K \subset (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]$, под которым будем понимать отрезок, содержащий окрестность точки $\alpha = a$. Обозначим через ${}^\alpha\xi$ преобразование Крамера над ξ в точке $(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$, т. е. случайный вектор с распределением

$$\mathbf{P}({}^\alpha\xi \in dv) = e^{\lambda(\alpha)v_{(1)} + \mu(\alpha)v_{(2)}} \mathbf{P}(\xi \in dv), \quad v = (v_{(1)}, v_{(2)}),$$

так что существует плотность ${}^\alpha p(v)$ распределения ${}^\alpha\xi$ относительно распределения ξ :

$${}^\alpha p(v) := \frac{\mathbf{P}({}^\alpha\xi \in dv)}{\mathbf{P}(\xi \in dv)} = e^{\lambda(\alpha)v_{(1)} + \mu(\alpha)v_{(2)}} \quad (2.1)$$

(напомним, что $\mathbf{A}(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) = 0$). При произвольном фиксированном целом $m \geq 1$ обозначим через K_ξ произвольный компакт из $\mathbb{R}^{2m}$. Пусть далее $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$, $v_i \in \mathbb{R}^2$ и $1 \leq k_1 \leq \dots < k_m$ — произвольный набор индексов.

Теорема 2.1. Пусть ζ — нерешетчатая случайная величина и выполнено условие [C], $\alpha = x/T$. Тогда плотность

$$p_{T,x}(\vec{v}) := \frac{\mathbf{P}(\vec{\xi} \in d\vec{v} \mid Z(T) \in \Delta[x])}{\mathbf{P}({}^\alpha\vec{\xi} \in d\vec{v})} \quad (2.2)$$

условного распределения $\vec{\xi} = (\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_m})$ при условии $\{Z(T) \in \Delta[x]\}$ относительно распределения ${}^\alpha\vec{\xi} = ({}^\alpha\xi_1, \dots, {}^\alpha\xi_m)$, где ${}^\alpha\xi_j$ — независимые копии ${}^\alpha\xi$, сходится при $T \rightarrow \infty$ к 1 равномерно по $\alpha \in K$, $\vec{v} \in K_\xi \subset \mathbb{R}^{2m}$, $\Delta \in [\Delta_T, \Delta_0]$. Здесь $\Delta_T = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$ (т. е. $\Delta_T \rightarrow 0$ достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$), $\Delta_0 > 0$ — любое фиксированное число.

Такое же утверждение справедливо и для набора (для вектора $\vec{\xi}$) случайных индексов $\nu(T) - k_1, \dots, \nu(T) - k_m$ при $k_1 \geq 0$.

Из доказательства теоремы будет видно, что можно брать конечные наборы и других индексов, расположенных между 1 и $\nu(T)$.

Теорема 2.1 означает сходимост по вариации условных распределений $\vec{\xi}$ при условии $\{Z(T) \in \Delta[x]\}$ к распределению ${}^\alpha\vec{\xi}$. В частности, из нее вытекает

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для любых борелевских множеств $B_1, \dots, B_m$ из $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_m \in B_m \mid Z(T) \in \Delta[x]) = \prod_{i=1}^m \mathbf{P}({}^\alpha\xi_i \in B_i) + \varepsilon_T, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ равномерно по $\alpha \in K$, $\Delta \in [\Delta_T, \Delta_0]$.

В дальнейшем главную часть в правой части (2.3) мы будем называть «предельным распределением» при $T \rightarrow \infty$, хотя это не совсем корректно, так как значение $\alpha \in K$ может зависеть от T . Такого же соглашения мы будем придерживаться и в ряде других аналогичных случаях. Формально термин «предельное распределение» в (2.3) оправдан лишь в тех случаях, когда $\alpha \rightarrow \alpha_0 \in K$ при $T \rightarrow \infty$ и α в правой части (2.3) заменено на α_0 . Более корректно было бы

в соотношениях (2.3) говорить о «близких распределениях». Эта более точная терминология была введена и использовалась в § 3.3 в [4] при изучении аналогичных задач для случайных блужданий. Однако мы, чтобы сделать изложение более кратким, ниже будем следовать (не совсем корректно) названному выше соглашению о понимании слов «предельное распределение».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Обозначим

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i = (t, z).$$

Тогда при $t \leq t_0 < T$

$$\begin{aligned} p_{T,x}^0(\vec{\mathbf{v}}) &:= \frac{\mathbf{P}(\vec{\xi} \in d\vec{\mathbf{v}} \mid Z(T) \in \Delta[x])}{\mathbf{P}(\vec{\xi} \in d\vec{\mathbf{v}})} = \frac{\mathbf{P}(\vec{\xi} \in d\vec{\mathbf{v}}, Z(T) \in \Delta[x])}{\mathbf{P}(\vec{\xi} \in d\vec{\mathbf{v}})\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x])} \\ &= \frac{\mathbf{P}(Z(T-t) \in \Delta[x-z])}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x])}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу теоремы 1.1

$$\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x]) = \frac{\Delta}{\sqrt{T}} C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})(1 + o(1)), \quad (2.5)$$

где $\alpha = x/T$, $C(\alpha)$ — положительная непрерывная функция на K ,

$$I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R}) = \int_0^\infty e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{P}(\tau > y) dy,$$

$\Delta = \Delta_T = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in K$.

Положим

$$\alpha_m := \frac{x-z}{T-t} = \alpha - \frac{z}{T} + \frac{\alpha t}{T} + O(T^{-2}).$$

Так как $\alpha_m = \alpha + o(1)$ при $T \rightarrow \infty$ и функция $C(\alpha)$ в теореме 1.1 есть положительная непрерывная функция от α , то, применяя эту теорему к числителю и знаменателю в (2.4), получим

$$p_{T,x}^0(\vec{\mathbf{v}}) = \frac{I_Z(\alpha_m, 0, 0, \mathbb{R})}{I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})} \exp\{-(T-t)D(\alpha_m) + TD(\alpha)\}(1 + o(1)). \quad (2.6)$$

Поскольку $\mathbf{v} \in K_\xi$, то $t \leq t_0$, $|z| \leq z_0$ при некоторых t_0, z_0 и

$$D(\alpha_m) = D\left(\alpha - \frac{z}{T} + \frac{\alpha t}{T} + O(T^{-2})\right) = D(\alpha) + \mu(\alpha)\left(\frac{\alpha t}{T} - \frac{z}{T}\right) + O(T^{-2}),$$

где остаточный член равномерен по $\mathbf{v} \in K_\xi$ при $T \rightarrow \infty$. Поэтому

$$p_{T,x}^0(\vec{\mathbf{v}}) = \exp\{tD(\alpha) - \mu(\alpha)(\alpha t - z)\}(1 + o(1)). \quad (2.7)$$

Так как $D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A(\mu(\alpha))$, то в (2.7) выражение в фигурных скобках равно

$$z\mu(\alpha) + t(D(\alpha) - \alpha\mu(\alpha)) = z\mu(\alpha) - tA(\mu(\alpha)) = z\mu(\alpha) + t\lambda(\alpha).$$

Кроме того,

$$\frac{I_Z(\alpha_m, 0, 0, \mathbb{R})}{I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})} \rightarrow 1 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Поэтому в силу (2.1), (2.8)

$$p_{T,x}^0(\vec{v}) = \prod_{i=1}^m \frac{\mathbf{P}(\alpha \xi_i \in d\mathbf{v}_i)}{\mathbf{P}(\xi_i \in d\mathbf{v}_i)} (1 + o(1)) = \frac{\mathbf{P}(\alpha \vec{\xi} \in d\vec{v})}{\mathbf{P}(\vec{\xi} \in d\vec{v})} (1 + o(1)),$$

$$p_{T,x}(\vec{v}) = p_{T,x}^0(\vec{v}) \frac{\mathbf{P}(\vec{\xi} \in d\vec{v})}{\mathbf{P}(\alpha \vec{\xi} \in d\vec{v})} = 1 + o(1),$$

где остаточный член равномерен по $\alpha \in K$, $\vec{v} \in K_{\xi}$.

Доказательство второго утверждения теоремы повторяет приведенные выше рассуждения. Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В соответствии с теоремой 1.1 предельное условное распределение $\vec{\xi}$ при условии $\{Z(T) \in \Delta[x], B(u, v, \mathbf{w})\}$ останется таким же, как в теореме 2.1. Действительно, вместо множителя $I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})$ в (2.5) теперь появится множитель $I_Z(\alpha, u, v, \mathbf{w})$. Если он не равен нулю, то отношение множителей этого вида

$$\frac{I_Z(\alpha_m, u, v, \mathbf{w})}{I_Z(\alpha, u, v, \mathbf{w})}$$

(это аналог соотношения (2.6)) сходится, как и в (2.8), к 1 при $T \rightarrow \infty$ и все проведенные в доказательстве теоремы 2.1 выкладки сохраняются.

Очевидно, что «предельное» условное распределение $\vec{\xi}$ будет таким же и в том случае, если событие $B(u, v, \mathbf{w})$ (см. теорему 1.1) заменить событием о принадлежности вектора $(\gamma(T), \chi(T), \zeta(T))$ произвольному параллелепипеду положительной меры, порожденной распределением

$$\frac{I_Z(\alpha, u, v, \mathbf{w})}{I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R})}.$$

Если параллелепипед ограничен по u , то в соответствии с замечанием 1.1 в качестве компакта K в теореме 2.1 можно брать любой отрезок из (α_-, α_+) .

Все изложенное, конечно же, распространяется и на векторы $\vec{\xi}$ со случайными индексами, названными во втором утверждении теоремы 2.1.

Утверждение, аналогичное теореме 2.1, можно установить и для распределения $\vec{\xi}$ при условии $\{Y(T) \in \Delta[x]\}$. Но основной интерес в приложениях представляют процессы $Z(t)$. Кроме того, формулировки утверждений, аналогичных теореме 2.1, и других для ОПВ $Y(t)$ выглядят более сложно (см. [1]). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением главным образом процессов $Z(t)$.

2.2. О распределении вектора $\alpha \xi$. Преобразование Лапласа над распределением $\alpha \xi$ имеет вид

$${}^{\alpha}\mathbf{A}(\lambda, \mu) := \ln \mathbf{E} e^{\langle \alpha \xi, (\lambda, \mu) \rangle} = \mathbf{A}(\lambda + \lambda(\alpha), \mu + \mu(\alpha)).$$

Базовая функция ${}^{\alpha}A(\mu)$, соответствующая скачкам $\alpha \xi$ в окрестности точки $(0, 0)$, есть решение (со знаком минус) уравнения $\mathbf{A}(\lambda + \lambda(\alpha), \mu + \mu(\alpha)) = 0$, т. е.

$${}^{\alpha}A(\mu) = \lambda(\alpha) + A(\mu + \mu(\alpha)),$$

так что ${}^{\alpha}A(0) = 0$. Среднее значение процесса ${}^{\alpha}Z(t)$ со скачками $\alpha \xi$ на единицу времени асимптотически эквивалентно значению

$${}^{\alpha}a := {}^{\alpha}A'(0) = A'(\mu(\alpha)) = \alpha \quad (2.9)$$

(напомним, что $\mu(\alpha)$ есть функция, обратная к $A'(\mu)$). Дисперсия ${}^{\alpha}Z(t)$ на единицу времени асимптотически эквивалентна

$${}^{\alpha}\sigma^2 = A''(\mu(\alpha)).$$

§ 3. Интегро-локальные теоремы для времени первого прохождения траекторией ОПВ высокого уровня

Обозначим

$$\eta_Z(x) := \min\{t : Z(t) > x\}, \quad \chi_Z(x) = Z(\eta_Z(x)) - x.$$

Предметом изучения в этом разделе будет асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in \delta[T], \chi_Z(x) \in \Delta[v]) \quad \text{при } \alpha = \frac{x}{T} > a + \varepsilon$$

и некотором $\varepsilon > 0$. Чтобы сформулировать основное утверждение, введем в рассмотрение ОПВ ${}^\alpha Y(t)$, как ОПВ $Y(t)$, определенный в § 1, но со скачками $({}^\alpha \tau, -{}^\alpha \zeta)$, где, как и прежде, $({}^\alpha \tau, {}^\alpha \zeta) = {}^\alpha \xi$:

$${}^\alpha Y(t) = -{}^\alpha Z_{\eta(t)}, \quad {}^\alpha Z_n = \sum_{j=1}^n {}^\alpha \zeta_j,$$

${}^\alpha \zeta_j$ — независимые копии ${}^\alpha \zeta$. В силу (2.9)

$$\mathbf{E} {}^\alpha Y(t) \sim -{}^\alpha at = -\alpha t \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Поэтому для ${}^\alpha \bar{Y} = \sup_{t \geq 0} {}^\alpha Y(t)$ при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ имеем

$$\mathbf{P}({}^\alpha \bar{Y} \leq -v) > 0$$

при $v > 0$ таких, что $\mathbf{P}(\zeta_1 < -v) > 0$ (напомним, что ${}^\alpha Y(0) = -{}^\alpha \zeta_1$).

Теорема 3.1. Пусть $\xi = (\tau, \zeta)$ — нерешетчатый вектор, $\alpha = x/T > a + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_Z(x) \in \delta[T], \chi_Z(x) \in \Delta[v]) \\ = \mathbf{P}(Z(T + \delta) \in \Delta[x + v], \gamma(T + \delta) < \delta) \mathbf{P}({}^\alpha \bar{Y} \leq -v)(1 + o(1)) \\ = \frac{\Delta \delta C(\alpha)}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha) - v\mu(\alpha)} \mathbf{P}({}^\alpha \bar{Y} \leq -v)(1 + o(1)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $C(\alpha)$ — положительная непрерывная функция, определенная в теореме 1.1, $\Delta = \Delta_T = \bar{o}(1)$, $\delta = \delta_T = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in K \cap [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$; компакт K определен перед теоремой 1.1.

В соответствии с замечанием 1.1 здесь в качестве компакта K можно брать любой отрезок из (α_-, α_+) , содержащий точку a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$B_{Z,T} = \{\eta_Z(x) \in \delta[T], \chi_Z(x) \in \Delta[v]\}.$$

ОЦЕНКА $\mathbf{P}(B_{Z,T})$ СНИЗУ. Положим $\bar{Z}(T) = \max_{0 \leq t \leq T} Z(t)$. Тогда

$$B_{Z,T,\gamma} := \{\bar{Z}(T + \delta - \gamma(T + \delta) - 0) \leq x, Z(T + \delta) \in x + \Delta[v], \gamma(T + \delta) < \delta\} \subset B_{Z,T}. \quad (3.2)$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(B_{Z,T}) \geq \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma}). \quad (3.3)$$

ОЦЕНКА СВЕРХУ. Имеем

$$B_{Z,T} = \{Y(T) \in x + \Delta(v), \chi(T) < \delta, \bar{Z}(T + \chi(T) - 0) \leq x\}, \quad (3.4)$$

т. е. событие $B_{Z,T}$ измеримо относительно σ -алгебры, порожденной процессом $Y(T)$ до марковского момента $\eta(T)$ включительно, так что события $B_{Z,T}$ и случайная величина $\tau_{\eta(T)+1}$ независимы. С другой стороны, в силу (3.4)

$$\begin{aligned} & B_{Z,T} \cap \{\tau_{\eta(T)+1} \geq \delta\} \\ & \subset \{Z(T+\delta) \in x + \Delta[v], \gamma(T+\delta) < \delta, \bar{Z}(T+\delta - \chi(T+\delta) - 0) \leq x\} = B_{Z,T,\gamma}; \\ & \mathbf{P}(B_{Z,T})\mathbf{P}(\tau \geq \delta) \leq \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как в дальнейшем в качестве δ мы будем рассматривать последовательность $\delta = \delta_T \rightarrow 0$ (достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$), то $\mathbf{P}(\tau \geq \delta) = 1 + o(1)$ при $T \rightarrow \infty$ и в силу (3.3), (3.5)

$$\mathbf{P}(B_{Z,T}) = \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma})(1 + o(1)) \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{Z,T,\gamma}) &= \mathbf{P}(Z(T+\delta) \in \Delta[x+v], \gamma(T+\delta) < \delta) \\ &\times \mathbf{P}(\bar{Z}(T+\delta - \gamma(T+\delta) - 0) \leq x | Z(T+\delta) \in \Delta[x+v], \gamma(T+\delta) < \delta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как

$$I_Z(\alpha, 0, 0, \mathbb{R}) - I_Z(\alpha, \delta, 0, \mathbb{R}) = \int_0^\delta e^{\lambda(\alpha)y} \mathbf{P}(\tau > y) dy \sim \delta$$

при $\delta \rightarrow 0$ и

$$TD\left(\frac{x+v}{T}\right) = TD(\alpha) + \mu(\alpha)v + o(1)$$

при $T \rightarrow \infty$, то асимптотика первого сомножителя в правой части (3.7) в силу теоремы 1.1 совпадает с асимптотикой произведения

$$\frac{\Delta\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha) - v\mu(\alpha)}$$

(ср. с (3.1)).

Покажем теперь, что второй сомножитель в правой части (3.7) асимптотически эквивалентен $\mathbf{P}({}^\alpha\bar{Y} \leq -v)$. При этом наше изложение доказательства будет отчасти схематичным, поскольку (а) оно весьма прозрачно и следует той же схеме, которая использовалась в [3, § 3.3] при доказательстве аналогичного факта для случайных блужданий, (б) переход к более детальному изложению существенных трудностей не вызывает.

В силу теоремы 2.1 и замечания 2.1 условное распределение скачков $\xi_{\nu(T+\delta)}, \xi_{\nu(T+\delta)-1}, \dots, \xi_{\nu(T+\delta)-m-1}$ при условии $\{Z(T+\delta) \in \Delta[x+v], \gamma(T+\delta) < \delta\}$ будет иметь «предельное» условное распределение, совпадающее с распределением $({}^\alpha\xi_1, \dots, {}^\alpha\xi_m)$, где ${}^\alpha\xi_j$ независимы. Если рассматривать процесс $Z(t)$ в обратном направлении от точки $T+\delta - \gamma(T+\delta)$, т. е. процесс $Z(T+\delta - \gamma(T+\delta) - u)$, $u > 0$, то на событии $\{{}^\alpha\bar{Y} \leq -v\}$ он будет начинаться с отрицательного скачка $-{}^\alpha\zeta_1 \leq -v$. На первых m «шагах» предельный процесс в обратном направлении ${}^\alpha Y(u)$ будет иметь вид процесса $Y(u)$ со скачками $({}^\alpha\tau_1, -{}^\alpha\zeta_1), \dots, ({}^\alpha\tau_m, -{}^\alpha\zeta_m)$. Выбором большого m вероятность $\mathbf{P}({}^\alpha\bar{Z}_m \leq -v)$, где ${}^\alpha\bar{Z}_m = \max_{k \leq m} \sum_{j=1}^k ({}^\alpha\zeta_j)$, может быть сделана сколь угодно близкой к $\mathbf{P}({}^\alpha\bar{Y} \leq -v)$, ${}^\alpha\bar{Y} = \sup_{u \geq 0} {}^\alpha Y(u)$. Другими словами, выбором N вероятность $\mathbf{P}({}^\alpha\bar{Y}(N) \leq -v)$, где ${}^\alpha\bar{Y}(N) = \max_{u \leq N} {}^\alpha Y(u)$, может быть сделана сколь угодно близкой к $\mathbf{P}({}^\alpha\bar{Y} \leq -v)$.

Остается установить, что условная вероятность пересечь процессу $Z(t)$ границу x на интервале времени $(0, T + \delta - M)$ при условии $\{Z(T + \delta) \in \Delta[x + v], \gamma(T + \delta) < \delta\}$ пренебрежимо мала при больших M . Точнее, нам достаточно установить пренебрежимо малость при больших T , M и $T - M$ условной вероятности

$$\begin{aligned} P^{cond} &:= \mathbf{P}(\eta_Z(x) < T - M \mid Z(T) \in \Delta[x + v], \gamma(T) < \delta) \\ &= \frac{\mathbf{P}(\eta_Z(x) < T - M, Z(T) \in \Delta[x + v], \gamma(T) < \delta)}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x + v], \gamma(T) < \delta)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Положим $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots, N$; $h[t] := [t, t + h)$, считая $N = \frac{T-M}{h}$ целым числом. Так как $\eta_Z(x)$ — марковский момент, числитель в правой части (3.8) равен

$$\sum_{k=0}^N \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{P}(\eta_Z(x) \in dt) \mathbf{P}(Z^*(T - t) \in \Delta[x + v], \gamma(T - t) < \delta), \quad (3.9)$$

где процесс Z^* устроен так же, как Z , и не зависит от Z . В силу теоремы 1.1 второй множитель в (3.9) можно заменить на

$$\mathbf{P}(Z(T - t_k) \in \Delta[x + v], \gamma(T - t_k) < \delta)(1 + \varepsilon_h),$$

где $\varepsilon_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, так что полученное выражение отличается от $\mathbf{P}(Z(T - t_k) \in \Delta[x + v])$ множителем $\delta(1 + o(1))$ при малых δ . Последнее высказывание относится и к знаменателю в (3.8). В итоге получаем, что при малых h , δ

$$P^{cond} = \sum_{k=0}^N \frac{\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in h[t_k]) \mathbf{P}(Z(T - t_k) \in \Delta[x + v])(1 + o(1))}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x + v])}. \quad (3.10)$$

Числители в (3.8), (3.10) означают вероятность пучка «искривленных» траекторий (проходящих выше точки $(T - M, x)$), соединяющих точку $(0, 0)$ с окрестностью точки $(T, x + v)$. Знаменатель в этих соотношениях равен вероятности всех траекторий, соединяющих названные области, в том числе «прямолинейные», наиболее вероятные траектории. Это означает, что числитель в (3.8), (3.10) в силу строгой выпуклости функции D экспоненциально (по M) меньше знаменателя, так что вероятность P^{cond} мала при больших M . Чтобы получить явную оценку для P^{cond} , заметим, что так как $\eta_Z(x)$ — марковский момент, то следующий за ним горизонтальный скачок τ^* не зависит от предыстории и распределен как τ . Поэтому

$$\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in h[t_k], \tau^* > h) = \mathbf{P}(\eta_Z(x) \in h[t_k]) \mathbf{P}(\tau > h).$$

С другой стороны,

$$\{\eta_Z(x) \in h[t_k], \tau^* > h\} \subset \{Z(t_{k+1}) > x\}$$

и, стало быть, для h таких, что $\mathbf{P}(\tau > h) > 1/2$, получаем

$$\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in h[t_k]) \leq \frac{\mathbf{P}(Z(t_{k+1}) > x)}{\mathbf{P}(\tau > h)} \leq 2\mathbf{P}(Z(t_{k+1}) > x).$$

Поэтому в силу (3.10)

$$P^{cond} \leq \sum_{k=0}^N \frac{2\mathbf{P}(Z(t_{k+1}) > x) \mathbf{P}(Z(T - t_k) \in \Delta[x + v])}{\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x + v])} (1 + o(1)). \quad (3.11)$$

Остается воспользоваться асимптотическими представлениями для всех элементов правой части в (3.11), которые можно извлечь из теоремы 1.1. Мы представляем это читателю. Теорема 3.1 доказана.

Обозначим

$$P_\alpha(v) = \mathbf{P}({}^\alpha\bar{Y} < v), \quad J_\alpha(v) = \int_0^v e^{-v\mu(\alpha)} P_\alpha(-u) du.$$

Положим в теореме 3.1 $v = v_k = k\Delta$, $k = 0, 1, \dots$, и просуммируем полученные соотношения по k от 0 до $N = v/\Delta$ (считаем N целым). В левой части получим вероятность $\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in \delta[T], \chi_Z(x) < v)$, а в правой — значение

$$\frac{\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha)} \sum_{k=0}^N \Delta e^{-v_k\mu(\alpha)} P_\alpha(-v_k)(1 + o(1)),$$

где интегральная сумма соответствует интервалу $J_\alpha(v)$. Мы получили

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_Z(x) \in \delta[T], \chi_Z(x) < v) = \frac{\delta C(\alpha)}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha)} J_\alpha(v)(1 + o(1)), \quad (3.12)$$

где $\delta = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$, остаточный член равномерен по $\alpha \in K \cap \{\alpha \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

В связи со следствием 3.1 представляет интерес

Лемма 3.1. Интеграл $J_\alpha(\infty)$ сходится при всех $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$P_\alpha(-u) < \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \geq u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_\alpha(\infty) &< \int_0^\infty e^{-u\mu(\alpha)} \int_u^\infty \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \in dt) du = \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-u\mu(\alpha)} du \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \in dt) \\ &= \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-t\mu(\alpha)})}{\mu(\alpha)} \mathbf{P}({}^\alpha\zeta \in dt) = \frac{1}{\mu(\alpha)} (\mathbf{P}({}^\alpha\zeta > 0) - \mathbf{E}(e^{-\mu(\alpha){}^\alpha\zeta}; {}^\alpha\zeta \geq 0)), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\mathbf{E}(e^{-\mu(\alpha){}^\alpha\zeta}; {}^\alpha\zeta \geq 0) \leq \mathbf{E}e^{-\mu(\alpha){}^\alpha\zeta} = \mathbf{A}(\lambda(\alpha), 0) < \infty,$$

так как $\alpha \notin [\beta_-, \beta_+]$ и, следовательно, $\lambda(\alpha) < \lambda_+$.

Если α отделено от a и, стало быть, $|\mu(\alpha)| > \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, то, очевидно, $J_\alpha(\infty) < \infty$. Если $\alpha \rightarrow a$ при $T \rightarrow \infty$, то $\mu(\alpha) \rightarrow 0$ и

$$J_\alpha(\infty) \rightarrow \mathbf{E}({}^\alpha\zeta; {}^\alpha\zeta \geq 0) < \infty,$$

так как ${}^\alpha\zeta$ удовлетворяет условию Крамера. Лемма 3.1 доказана.

§ 4. Интегро-локальные теоремы в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления

4.1. Интегро-локальные теоремы в первой граничной задаче. Из доказательства теоремы 3.1 видно, что ее утверждение может быть обобщено на время

$$\eta_{Z,g} = \min\{t : Z(t) > g_T(t)\} \quad (4.1)$$

первого прохождения траекторией ОПВ произвольной удаленной границы $g_T(t)$, где $g_T(t)$ — функция, зависящая от растущего параметра T , такая, что $x := g_T(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$. Например, функция

$$g_T(t) = Tg(t/T), \quad (4.2)$$

где $g(u)$ — фиксированная функция такая, что $g(1) > 0$, обладает этим свойством.

Не ограничивая общности, будем изучать асимптотику того, что пересечение границы g_T произойдет в окрестности точки $t = T$, при этом будем предполагать, что функции $g_T(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

(а) Функция $g_T(t)$ асимптотически линейна в окрестности точки $t = T$, т. е. для любого фиксированного $N > 0$, некоторого $g' < \alpha$ и $T \rightarrow \infty$ выполняется

$$g_T(t) = x + (t - T)g' + o(1) \quad \text{при } |t - T| \leq N, \quad \alpha = \frac{x}{T} \in K. \quad (4.3)$$

Если, например, функция $g_T(t)$ имеет вид (4.2) и дифференцируема в точке $t = 1$, то $g' = g'(1)$.

(б) В области $t \leq T - N$ при некотором $r' < g'$ выполняется

$$g_T(t) \geq x + r'(t - T) > 0. \quad (4.4)$$

Отметим, что если в этих условиях $g' < 0$, то возникает качественно новая возможность, состоящая в том, что процесс $Z(t)$ может пересечь границу $g_T(t)$ не только вертикальным, но и горизонтальным скачком.

Обозначим через $A^\uparrow$ ($A^\rightarrow$) событие, состоящее в том, что пересечение границы $g_T(t)$ процессом $Z(T)$ произошло вертикальным (горизонтальным) скачком. Мы найдем асимптотику вероятностей

$$\mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^\uparrow) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^\rightarrow) \quad (4.5)$$

и тем самым асимптотику вероятностей

$$\mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \Delta[T]) = \mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^\uparrow) + \mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \Delta[T], A^\rightarrow)$$

при $T \rightarrow \infty$. На самом деле будут изучены вероятности более информативных событий, чем в (4.5).

1. Начнем с вероятностей пересечения границы вертикальным скачком.

Положим

$$\chi_{Z,g} := Z(\eta_{Z,g}) - g_T(\eta_{Z,g}).$$

Теорема 4.1. Пусть ξ — нерешетчатый вектор, $\alpha = \frac{x}{T} > a + \varepsilon$ и выполнены условия (а), (б) при некоторых $g' < \alpha - \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \delta[T], A^\uparrow, \chi_{Z,g} \in \Delta[v]) \\ = \mathbf{P}(Z(T + \delta) \in \Delta[x + v], \gamma(T + \delta) < \delta) P_{\alpha, g'}(-v)(1 + o(1)) \\ = \frac{\Delta \delta C(\alpha)}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha) - v\mu(\alpha)} P_{\alpha, g'}(-v)(1 + o(1)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$P_{\alpha, g'}(-v) := \mathbf{P}(\sup_{t \geq 0} ({}^\alpha Y(t) + g't) \leq -v), \quad (4.7)$$

$\Delta = \Delta_T = \bar{o}(1)$, $\delta = \delta_T = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in K \cap [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$; компакт K определен перед теоремой 1.1.

Если $g' \geq 0$, то $\mathbf{P}(A^\dagger \mid \eta_{Z, g} \in \Delta[T]) = 1$ и событие $A^\dagger$ под знаком вероятности в (4.6) можно убрать. Полагая $v = v_k = k\Delta$ и суммируя вероятности (4.6) по полуинтервалам $\Delta[v_k]$ при $k = 0, 1, \dots$, получим

Следствие 4.1. При выполнении условий теоремы 4.1

$$\mathbf{P}(\eta_{Z, g} \in \delta[T]) = \frac{\delta C(\alpha) P_{\alpha, g'}}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha)} (1 + o(1)),$$

где

$$P_{\alpha, g'} = \int_0^\infty e^{-v\mu(\alpha)} P_{\alpha, g'}(-v) dv. \quad (4.8)$$

Доказательство теоремы 4.1. Условия теоремы 4.1 таковы, что они позволяют получить нужное утверждение путем незначительной модификации рассуждений в доказательстве теоремы 3.1. Мы предоставляем это читателю. В ряде соотношений доказательства теоремы 3.1 процесс $Z(t)$ надо заменить процессом $Z(t) + g't$ со сносом $g't$. Например, в определении события $B_{Z, T, \gamma}$ в (3.2) событие $\{\bar{Z}(T + \delta - \gamma(T + \delta) - 0) \leq x\}$ следует заменить событием

$$\left\{ \sup_{t < T + \delta - \gamma(T + \delta)} (Z(t) + g't) \leq x \right\}.$$

Доказательство малости условной вероятности $\mathbf{P}(\eta_{Z, g} < T - M \mid Z(T) \in \Delta[x + v])$ при больших M (ср. с (3.8), (3.10)) вытекает из условия (b) и вложения

$$\{\eta_{Z, g} < T - M\} \in \{\eta_{Z^{(q)}}(x + qT) < T - M\} \quad \text{при } q = -r',$$

где $Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt$. Дальнейшие оценки следуют рассуждениям (3.8)–(3.10), но для процесса $Z^{(q)}(t)$ и границы $x + qT$, $q = -r'$.

2. **ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАНИЦЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СКАЧКОМ.** Перейдем теперь к случаю $g' < 0$, когда возможно пересечение границы $g_x(t)$ горизонтальным скачком.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1, $g' < 0$, $\lambda_+ > D(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\eta_{Z, g} \in \delta[T], A^-, \chi(T) > v) \\ &= \frac{\delta |g'|}{\sqrt{T}} C(\alpha) e^{-TD(\alpha)} \int_0^\infty e^{\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}(\tau > u + v) P_{\alpha, g'}(-g'u) du (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\delta = \delta_T = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$, остаточный член равномерен по $\alpha \in K \cap [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$, вероятность $P_{\alpha, g'}(-v)$ определена в (4.7).

Условие $\lambda_+ > D(0)$ введено для упрощения доказательства. Оно не является ограничительным.

Доказательство теоремы 4.2. При $g' < 0$ имеем

$$g_T(T) - g_T(T + \delta) \sim -\delta g' > 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Обозначим

$$\Delta_g(x) = (g_T(T + \delta), g_T(T) = x].$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \delta[T], A^-, \chi(T) > v) \\ &= \int_0^T \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x), \gamma(T) \in du, \chi(T) > v, B_T(u)) + P_{\delta[T]}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$B_T(u) = \left\{ \sup_{t \leq T-u} (Z(t) - g_T(t)) \leq 0 \right\}, \quad P_{\delta[T]} \leq \mathbf{P}(Z(T + \delta) \in \Delta_g[x], \gamma(T + \delta) < \delta).$$

При $v > 0$, $\delta < v$ слагаемое $P_{\delta[T]}$ в правой части (4.11) исчезает, так как событие $\{\chi(T) > \delta, \gamma(T + \delta) < \delta\}$ пусто при $\delta < v$.

Оценку первого слагаемого в правой части (4.11) разобьем на несколько этапов.

I. Аналогично предыдущему находим, что условная вероятность события $B_T(u)$ при условии $\{Z(T) \in \Delta_g(x), \gamma(T) \in du, \chi(T) > v\}$ при каждом фиксированных u и v асимптотически эквивалентна при $T \rightarrow \infty$ вероятности события $P_{\alpha, g'}(-g'u)$ ($g_T(T - u) - x - g'u \sim -g'u$ при небольших u). Поэтому при фиксированном M

$$\begin{aligned} J_0^M &:= \int_0^M \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x), \gamma(T) \in du, \chi(T) > v, B_T(u)) \\ &\sim \int_0^M \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x), \gamma(T) \in du, \chi(T) > v) P_{\alpha, g'}(-g'u). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Далее, так как функция $P_{\alpha, g'}(-g'u)$ возрастает по u , можно оценивать интеграл снизу суммами

$$\sum_{u_k \leq M} \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x), \gamma(T) \in \delta[u_k], \chi(T) > v) P_{\alpha, g'}(-g'u_k), \quad (4.13)$$

где $u_k = k\delta$, $k = 0, \dots, N = T/\delta$ (считаем, что N — целое число). В силу теоремы 1.1 и (4.10) при $u_k < M$ и большом фиксированном M

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x), \gamma(T) \in \delta[u_k], \chi(T) > v) \\ &= \frac{\delta |g'| C(\alpha)}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha)} [I_Z(\alpha, u, v, \mathbb{R}) - I_Z(\alpha, u + \delta, v, \mathbb{R})] (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где

$$I_Z(\alpha, u, v, \mathbb{R}) - I_Z(\alpha, u + \delta, v, \mathbb{R}) \sim \delta e^{\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}(\tau > u + v)$$

при $\delta \rightarrow 0$ (пусть для простоты функция $\mathbf{P}(\tau > u)$ непрерывна).

Возвращаясь к (4.12), (4.13), находим

$$J_0^M \geq \frac{\delta |g'| C(\alpha)}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha)} \int_0^M e^{\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}(\tau > u + v) P_{\alpha, g'}(-g'u) du (1 + o(1)). \quad (4.14)$$

Если в (4.13) заменить $P_{\alpha, g'}(-g'u_k)$ на $P_{\alpha, g'}(-g'u_{k+1})$, то получим оценку сверху для J_0^M , которая приводит к оценке с той же правой частью, что и в (4.14). Ясно также, что выбором M интеграл в правой части (4.14) может быть сделан сколь угодно близким к интегралу от 0 до ∞ , так что при больших M правая часть в (4.14) асимптотически эквивалентна правой части в (4.9).

II. Оценим теперь сверху интеграл (см. (4.11), (4.12))

$$\int_M^{T^*} \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in du, \chi(T) > v, B_T(u)),$$

где T^* таково, что значение $\alpha^* := \frac{x}{T^*} \sim c^* \alpha$, $c^* > 1$, $\alpha^* \in K$, по-прежнему удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1 для α . Этот интеграл не превосходит интеграла

$$J_M^{T^*} := \int_M^{T^*} \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in du, \chi(T) > v), \quad (4.15)$$

который мы аналогично предыдущему будем приближать суммами

$$\sum_{u_k \in [M, T^*]} \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in \delta[u_k], \chi(T) > v), \quad (4.16)$$

где для k -го слагаемого P_k имеем

$$\begin{aligned} P_k &:= \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in \delta[u_k], \chi(T) > v) \\ &= \mathbf{P}(Z(T - u_k) \in \Delta_g(x], \gamma(T - u_k) < \delta, \chi(T - u_k) > u_k + v). \end{aligned}$$

Обозначим

$$A_{T,k} = \{Z(T - u_k) \in \Delta_g(x], \gamma(T - u_k) < \delta\}. \quad (4.17)$$

Тогда

$$P_k = \mathbf{P}(A_{T,k}) \mathbf{P}(\chi(T - u_k) > u_k + v \mid A_{T,k}),$$

где второй множитель в правой части равен

$$\mathbf{P}(\chi(T - u_k) > u_k + v \mid \gamma(T - u_k) < \delta) \leq \mathbf{P}(\tau > u_k + v). \quad (4.18)$$

Поэтому по теореме 1.1 при $\alpha_k = \frac{x}{T - u_k}$

$$P_k \leq \frac{|g'| \delta^2 C(\alpha_k)}{\sqrt{T - u_k}} e^{-(T - u_k) D(\alpha_k)} \mathbf{P}(\tau > u_k + v) (1 + o(1)).$$

Здесь

$$(T - u_k) D(\alpha_k) = T \mathbf{D}(1 - \rho_k, \alpha) \quad \text{при } \rho_k = \frac{u_k}{T},$$

где $\mathbf{D}(t, \alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \partial \mathcal{A}^{<0}} (\lambda t + \mu \alpha)$, $\mathbf{D}(1, \alpha) = D(\alpha)$ (см. [1]). В силу выпуклости функции $\mathbf{D}(t, \alpha)$ и равенства $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(t, \alpha) = \lambda(\alpha/t)$ (см. [1])

$$\mathbf{D}(1 - \rho_k, \alpha) \geq D(\alpha) - \rho_k \lambda(\alpha) \quad (4.19)$$

и, стало быть, при всех k

$$(T - u_k) D(\alpha_k) \geq T D(\alpha) - u_k \lambda(\alpha),$$

$$\begin{aligned} \sum_{u_k \in [M, T^*]} P_k &< \frac{|g'| \delta e^{-TD(\alpha)}}{\sqrt{T-T^*}} \sum_{u_k \in [M, T^*]} \delta C(\alpha_k) e^{u_k \lambda(\alpha)} \mathbf{P}(\tau > u_k + v)(1 + o(1)) \\ &= \frac{c|g'| \delta e^{-TD(\alpha)}}{\sqrt{T-T^*}} \int_M^\infty e^{u \lambda(\alpha)} \mathbf{P}(\tau > u + v) du (1 + o(1)) \quad (4.20) \end{aligned}$$

при некотором c . Так как $\lambda_+ > D(0)$, то $\lambda(\alpha) < \lambda_+$ и интеграл в (4.20) сходится к 0 при $M \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$J_M^{T^*} = o(J_0^M) \quad \text{при } M \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty.$$

III. Оценим далее

$$J_{T^*}^{(1-\varepsilon)T} = \int_{T^*}^{(1-\varepsilon)T} \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in du, \chi(T) > v)$$

при малом фиксированном $\varepsilon > 0$. Как и в п. II доказательства, воспользуемся приближением интеграла суммами и неравенством (4.18), в силу которого (см. (4.18), (4.19))

$$P_k \leq \mathbf{P}(A_{T,k}) \mathbf{P}(\tau > u_k + v).$$

Для получения требуемой оценки сверху для

$$\Sigma_* := \sum_{u_k \in [(1-\varepsilon)T, T^*]} P_k$$

воспользуемся более грубыми, чем в п. II, подходами. В силу ПБУ для ОПВ в случае $\lambda_+ > D(0)$ при $T \rightarrow \infty$ имеем

$$\ln \mathbf{P}(A_{T,k}) \leq \ln \mathbf{P}(Z(T - u_k) \in \Delta_g(x]) \leq -(T - u_k)D\left(\frac{x}{T - u_k}\right)(1 + o(1))$$

и в силу (4.19) аналогично предыдущему

$$\ln \mathbf{P}(A_{T,k}) \leq -T(1 - \rho_k)D\left(\frac{\alpha}{1 - \rho_k}\right) = -T\mathbf{D}(1 - \rho_k, \alpha) \leq -TD(\alpha) + u_k \lambda(\alpha),$$

$$\Sigma_* \leq \frac{c}{\delta} e^{-TD(\alpha)} \int_{T^*}^{(1-\varepsilon)T} e^{u \lambda(\alpha)} \mathbf{P}(\tau > u + v) du$$

при некотором $c < \infty$. Так как $\lambda(\alpha) < \lambda_+ - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, то

$$\Sigma_* \leq \frac{ce^{-TD(\alpha)}}{\delta} e^{-\varepsilon_1 T}$$

при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Таким образом, значение интеграла $J_{T^*}^{(1-\varepsilon)T}$ пренебрежимо мало по сравнению с J_0^M .

IV. Оценим

$$\begin{aligned} J_{(1-\varepsilon)T}^T &= \int_{(1-\varepsilon)T}^T \mathbf{P}(Z(T) \in \Delta_g(x], \gamma(T) \in du) \\ &\leq \mathbf{P}(\bar{Z}(\varepsilon T) > x) \mathbf{P}(\tau > (1 - \varepsilon)T). \quad (4.21) \end{aligned}$$

В силу теоремы 3.1 в [3] при всех $\alpha > 0$ и достаточно малом ε выполняется

$$\mathbf{P}(\bar{Z}(\varepsilon T) > x) \leq \exp \left\{ -\varepsilon TD \left(\frac{x}{\varepsilon T} \right) + o(T) \right\}$$

при $T \rightarrow \infty$, где в силу (4.19)

$$\varepsilon TD \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \right) = T\mathbf{D}(\varepsilon, \alpha) \geq TD(\alpha) - T\lambda(\alpha)(1 - \varepsilon).$$

Вместе с (4.21) это дает

$$J_{(1-\varepsilon)T}^T \leq e^{-TD(\alpha) + \lambda(\alpha)(1-\varepsilon)T + o(T)} \mathbf{P}(\tau > (1 - \varepsilon)T) \leq e^{-TD(\alpha) - \varepsilon_1 T}$$

при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Это вновь доказывает пренебрежимую малость значения рассматриваемого интеграла по сравнению с J_0^M .

V. Остается оценить (см. (4.11))

$$P_{\delta|T} \leq \mathbf{P}(Z(T + \delta) \in \Delta_g(x), \gamma(T + \delta) < \delta).$$

В силу теоремы 1.1

$$P_{\delta|T} \leq \frac{c\delta^2}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha)} = o(J_0^M)$$

при $\delta \rightarrow 0$ и некотором $c < \infty$.

Полученные оценки доказывают (4.9). Теорема 4.2 доказана.

4.2. Интегро-локальные теоремы в задаче о вероятности разорения в теории страхования. Задача о вероятности разорения страховой компании состоит в следующем. Пусть $T_1, T_2, \dots$ — моменты наступления крупных выплат по страховым случаям, а $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — размеры этих выплат соответственно. Пусть далее r — средняя «скорость» поступлений страховых взносов (суммы, поступающие в компанию от страхователей за единицу времени). Тогда если x — начальный капитал компании, то ее капитал в момент t будет примерно равен $x + rt - Z(t)$. Это значит, что если

$$\inf_{t \leq T} (x + rt - Z(t)) < 0, \quad (4.22)$$

то компания к моменту T разорится. Задача состоит в отыскании приближений для вероятности разорения и распределения времени разорения (если таковое произойдет). Это есть классическая задача о разорении. Ей посвящено значительное количество работ, включая монографии (см., например, [5–8]).

Введем в рассмотрение ОПВ $Z^{(q)}(t)$ с линейным сносом qt :

$$Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt,$$

и «обычный» ОПВ (без сноса) $Z^{[q]}(t)$, управляемый скачками $(\tau, \zeta^{(q)})$:

$$\zeta^{(q)} = \zeta + q\tau,$$

так что $Z^{(q)}(T_k) = Z^{[q]}(T_k)$. Ясно, что если $q \leq 0$, то

$$\bar{Z}^{(q)}(T) := \max_{t \leq T} Z^{(q)}(t) = \bar{Z}^{[q]}(T)$$

и $\eta_{Z^{(q)}}(x) = \eta_{Z^{[q]}}(x)$ есть момент разорения компании (несобственная случайная величина). Таким образом, задача о пересечении высокого уровня x процессом

$Z^{(q)}$ со сносом qt при $q \leq 0$ сводится к той же задаче для «обычного» ОПВ $Z^{[q]}$ со скачками $(\tau, \zeta^{(q)})$.

Далее, событие (4.22) можно при $q = -r < 0$ записать в виде

$$\{\bar{Z}^{(q)}(T) > x\} = \{\bar{Z}^{[q]}(T) > x\}$$

и, кроме того,

$$\{\eta_{Z^{(q)}}(x) < T, \chi_{Z^{(q)}}(x) < v\} = \{\eta_{Z^{[q]}}(x) < T, \chi_{Z^{[q]}}(x) < v\}.$$

Для отыскания вероятностей этих событий понадобятся интегро-локальные вероятности

$$\mathbf{P}(\eta_{Z^{[q]}}(x) \in \delta[T], \chi_{Z^{[q]}}(x) < v). \quad (4.23)$$

Они найдены в следствии 3.1. Чтобы воспользоваться этим следствием, надо «пересчитать» множители $C(\alpha)$, $J_\alpha(v)$ и функцию $D(\alpha)$ для вектора $(\tau, \zeta^{(q)})$. Для этого достаточно найти базовую функцию $A^{(q)}(\mu)$, соответствующую управляющему вектору $(\tau, \zeta^{(q)})$. Имеем

$$\mathbf{A}^{(q)}(\lambda, \mu) := \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta^{(q)}} = \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu(\zeta + q\tau)} = \mathbf{A}(\lambda + q\mu, \mu).$$

Отсюда и из определения базовой функции находим

$$A^{(q)}(\mu) = q\mu + A(\mu) \quad (4.24)$$

(например, в области аналитичности $\mathbf{A}^{(q)}(-A^{(q)}(\mu), \mu) = \mathbf{A}(-q\mu - A(\mu) + q\mu, \mu) = 0$). Применяя к $A^{(q)}(\mu)$ преобразование Лежандра, получаем $D^{(q)}(\alpha) = D(\alpha - q)$. Отметим, что последнее соотношение, а вместе с ним и (4.24) можно получить также из принципа больших уклонений для процесса $Z^{(q)}(t)$ (см. [2]; мы используем обозначение $Z^{(q)}$, так как оно использовалось в [2]).

Таким образом, искомую асимптотику вероятностей (4.23) можно получить с помощью леммы 3.1, но при этом приходится «пересчитывать» названные выше функции в правой части (3.12).

Другая возможность найти асимптотику (4.23) состоит в использовании результатов § 4. При этом «пересчитывать» придется не функции, а лишь параметр α . Действительно, вероятность разорения за время T , равная

$$\mathbf{P}(\sup_{t \leq T} (Z(t) - rt) > x),$$

есть вероятность пересечения ОПВ $Z(t)$ границы

$$g_T(t) = x + rt = x^{(r)} + r(t - T) \quad \text{при } x^{(r)} = x + rT. \quad (4.25)$$

Ясно, что такая граница удовлетворяет условиям (а), (б) (см. (4.3), (4.4)) при $g' = r$. В этих условиях вместо x и α следует использовать параметры $x^{(r)}$ и $\alpha^{(r)} = x^{(r)}/T = \alpha + r > r$ соответственно. Такие параметры исключают возможность пересечения границы горизонтальным скачком. При этом

$$\eta_{Z^{(q)}}(x) = \eta_{Z, g} \quad \text{при } q = -r.$$

Чтобы получить содержательное утверждение, мы будем предполагать, что значения $\alpha = x/T$ и $\alpha^{(r)} - a$ отделены от 0.

Из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.2. Пусть ξ — нерешетчатый вектор, $r > a$, $\alpha = x/T > \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \delta[T], \chi_{Z,g} \in \Delta[v]) = \frac{\Delta\delta C(\alpha^{(r)})}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha^{(r)}) - v\mu(\alpha^{(r)})} P_{\alpha^{(r)},r}(-v)(1 + o(1)),$$

где $\Delta = \Delta_T = \bar{o}(1)$, $\delta = \delta_T = \bar{o}(1)$ при $T \rightarrow \infty$, остаточный член $o(1)$ равномерен по $\alpha \in K \cap \{\alpha^{(r)} \geq \varepsilon\}$.

Из следствия 4.1 вытекает

Следствие 4.3. При выполнении условий следствия 4.2

$$\mathbf{P}(\eta_{Z,g} \in \delta[T]) = \frac{\delta C(\alpha^{(r)}) P_{\alpha^{(r)},r}}{\sqrt{T}} e^{-TD(\alpha^{(r)})} (1 + o(1)),$$

где множитель $P_{\alpha,r}$ определен в (4.8).

Отыскание интегральных вероятностей $\mathbf{P}(\eta_{Z,g} > T)$ с помощью полученных утверждений будет произведено в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I, II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 491–514; № 4. С. 731–750.
2. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших уклонений для конечномерных распределений обобщенных процессов восстановления // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 36–64.
3. Боровков А. А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2013.
4. Боровков А. А. Принципы больших уклонений в граничных задачах для обобщенных процессов восстановления // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 562–595.
5. Asmussen S., Albrecher H. Ruin probabilities. Singapore: World Sci., 2010.
6. von Bahr B. Ruin probabilities expressed in terms of ladder height distributions // Scand. Actuar. J. 1974. N 4. P. 190–204.
7. Drekić S., Willmot G. E. On the density and moments of the time of ruin with exponential claims // Astin Bull. 2003. V. 33, N 1. P. 11–21.
8. Asmussen S. Approximations for the probability of ruin within finite time // Scand. Actuar. J. 1984. P. 31–57.

Поступила в редакцию 27 августа 2019 г.

После доработки 26 сентября 2019 г.

Принята к публикации 18 октября 2019 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru