Yu. S. Volkov, Study of the convergence of interpolation processes with splines of even degree, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1247–1259

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.605>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.205.19.152

April 26, 2023, 06:26:12

ИЗУЧЕНИЕ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ СПЛАЙНОВ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Ю. С. Волков

Аннотация. Изучается сходимость процессов интерполяции полиномиальными сплайнами четной степени по Субботину. Доказано, что вопрос о хорошей обусловленности системы уравнений для построения интерполяционного сплайна через коэффициенты разложения k -й производной по В-сплайнам эквивалентен вопросу сходимости процесса интерполяции для k -й производной сплайна в классе функций с непрерывной k -й производной.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.605

Ключевые слова: сплайн четной степени по Субботину, интерполяция, алгоритмы построения, сходимость, норма проектора, обусловленность.

1. Введение

Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах сетки Δ : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ известны значения $f_i = f(x_i)$ некоторой функции $f(x)$. Рассмотрим задачу интерполяции заданных значений полиномиальным сплайном s четной степени $2m$ минимального дефекта, т. е. гладкости C^{2m-1} . Классическим сплайном для решения такой задачи является сплайн по Субботину, узлы которого расположены строго посередине между точками интерполяции, т. е.

$$\delta: a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N < \xi_{N+1} = b, \quad \xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2, \quad i = 1, \dots, N,$$

есть сетка узлов сплайна. Искомый сплайн s является результатом действия оператора интерполяции $\mathcal{S}$ из пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C[a, b]$ в пространство сплайнов степени $2m$ с узлами на сетке δ гладкости C^{2m-1} , обозначаемое через $\mathbb{S}_{2m} = \mathbb{S}_{2m}(\delta)$.

Для однозначного определения интерполяционного сплайна $s = \mathcal{S}f$ нужны какие-либо дополнительные условия. Будем считать, что на концах отрезка $[a, b]$ заданы по m значений младших производных, а именно

$$s^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(a), \quad s^{(\nu)}(b) = f^{(\nu)}(b), \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (1)$$

В этом случае выполнены условия Шёнберга — Уитни [1] и оператор интерполяции $\mathcal{S}$ однозначно определен. Интерполяционные сплайны по Субботину именно с такими краевыми условиями называем *полными* по аналогии со сплайнами нечетной степени [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314–2016–0013) и при частичной финансовой поддержке РФФИ и ННАО (проект № 19–51–12008).

Конструкцию интерполяционного сплайна четной степени с рассматриваемым взаимным расположением сеток Δ (точек интерполяции) и δ (узлов сплайна) называем *интерполяционным сплайном по Субботину*, так как она впервые была рассмотрена в 1967 г. Ю. Н. Субботиным [3]. Распространена также другая конструкция интерполяционных сплайнов четной степени, называемая *сплайном по Марсдену* и впервые изученная Марсденом [4]. В ней, наоборот, точки интерполяции выбираются посередине между заданными узлами сплайна, и в настоящей работе она не рассматривается. Хотя обе конструкции интерполяционных сплайнов четной степени по Субботину и по Марсдену совершенно различны, они тесно связаны между собой (см. [5, 6]).

В задаче интерполяции полным сплайном удобно считать, что обе сетки Δ и δ расширены влево и вправо необходимым количеством кратных узлов, совпадающих с концами отрезка $[a, b]$:

$$\dots = x_{-2} = x_{-1} = x_0, \quad x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots$$

Нас интересует вопрос о сходимости процессов интерполяции: при каких условиях $s^{(k)}$ сходится к $f^{(k)}$ для любой функции $f \in C^k[a, b]$, $0 \leq k \leq 2m$? Такой вопрос поставлен Шёнбергом [7, с. 187] на первой конференции по сплайн-аппроксимации в 1963 г. для сплайнов нечетной степени. С историей вопроса о сходимости процессов сплайн-интерполяции, основных этапах проведения исследований, результатах и связанных аспектах более подробно можно познакомиться в обзоре [8].

В задаче Шёнберга говорится о минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции ($f \in C^k[a, b]$) для сходимости производных, однако при этом для задания краевых условий (1) может и не существовать нужного количества производных, так как допускается $k < m$. В этом случае недостающие значения производных будем заменять произвольными числовыми значениями, сохраняя те же обозначения. Покажем, что такое задание недостающих производных на концах не оказывает влияния на сходимость k -й производной.

Под сходимостью процессов интерполяции для самих сплайнов или производных, а именно под сходимостью $s^{(k)}$ к $f^{(k)}$ ($0 \leq k \leq 2m$) понимаем сходимость в равномерной норме, т. е. $\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $|\Delta| \rightarrow 0$, где $|\Delta| = \max_i (x_{i+1} - x_i)$. Как обычно, для любой функции g , заданной на отрезке $[a, b]$, полагаем $\|g\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{a \leq x \leq b} |g(x)|$.

Вопрос о сходимости процессов интерполяции эквивалентен вопросу об ограниченности норм соответствующих операторов интерполяции, т. е. возможность оценки величины

$$\|\mathcal{S}\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|s\|_{L_\infty}}{\|f\|_{L_\infty}}$$

некоторой константой, не зависящей от количества N и расположения узлов сетки Δ , равносильна сходимости интерполяционных сплайнов $s = \mathcal{S}f$ к непрерывной функции f на любой последовательности сеток Δ при $|\Delta| \rightarrow 0$, поскольку

$$\operatorname{dist}(f, \mathbb{S}_{2m}) \leq \|s - f\|_{L_\infty} \leq (1 + \|\mathcal{S}\|) \operatorname{dist}(f, \mathbb{S}_{2m}),$$

где $\operatorname{dist}(f, \mathbb{S}_{2m}) = \inf_{\sigma \in \mathbb{S}_{2m}} \|f - \sigma\|_{L_\infty}$ — расстояние от f до пространства сплайнов $\mathbb{S}_{2m}(\delta)$.

Для производных рассматриваем оператор $\mathcal{S}^{(k)}$, сопоставляющий производной интерполируемой функции $f^{(k)}$ соответствующую производную интерполяционного сплайна $s^{(k)}$, а именно $\mathcal{S}^{(k)} f^{(k)} = (\mathcal{S} f)^{(k)}$ (при $k = 0$ считаем $\mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{S}$). Аналогично

$$\text{dist}(f^{(k)}, \mathbb{S}_{2m-k}) \leq \|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty} \leq (1 + \|\mathcal{S}^{(k)}\|) \text{dist}(f^{(k)}, \mathbb{S}_{2m-k}).$$

Ранее автором был предложен [9, 10] подход к построению интерполяционных сплайнов нечетной степени, состоящий в нахождении коэффициентов разложения производных искомым сплайнов по В-сплайнам, который затем был перенесен на сплайны четной степени по Субботину и по Марсдену [6]. Были выписаны системы линейных уравнений относительно таких коэффициентов, изучены свойства матриц этих систем. Установлены оценки величины функции погрешности и производных через нормы обратных матриц выписанных систем уравнений. Таким образом, возможность «хорошей» оценки такой нормы обратной матрицы независимо от сетки позволяет установить соответствующую сходимость интерполяционного процесса. Наоборот, расходимость процесса интерполяции на какой-либо последовательности сеток означает плохую обусловленность связанной матрицы [11, 12].

В литературе изучению задачи Шёнберга [7, с. 187] о сходимости процессов интерполяции уделено определенное внимание (см. обзор [8]), однако исследование, связанные с надежностью, обусловленностью методов построения интерполяционных сплайнов, проводятся, в основном, для сплайнов невысоких степеней. Даже существует ошибочное мнение, что если матрица системы уравнений вполне неотрицательна (все миноры неотрицательны), то она численно хорошо обусловлена. В точности это отмечено, например, в монографии Шумейкера [13, с. 167], одного из ведущих специалистов не только по теории сплайнов, но и по вычислительным алгоритмам, связанным с их построением, относительно коллокационной матрицы, возникающей при разложении интерполяционного сплайна по В-сплайнам. Вполне неотрицательность этой матрицы известна еще с 1968 г. [14, с. 527], и у нее есть ряд важных и полезных в практическом плане свойств. В частности, решение системы уравнений с такой матрицей методом исключения Гаусса не требует выбора главного элемента [15], т. е. выбор главного элемента не увеличивает точности решения, но тем не менее эта матрица может быть плохо обусловлена, что впервые было отмечено для кубических сплайнов в [11, с. 144]. Отметим, что упомянутая выше монография Шумейкера, выдержала уже три издания без существенных изменений и устранения указанной некорректности. Относительно новая монография этого же автора [16], полностью посвященная вычислительным аспектам построения сплайнов, не затрагивает вопросов возможной плохой обусловленности решаемых систем уравнений.

Автором был поставлен вопрос: можно ли из сходимости процесса интерполяции и в каких случаях говорить о хорошей обусловленности матрицы связанной системы уравнений и оценке нормы ее обратной независимо от сетки? Такое исследование было проведено для сплайнов нечетной степени и установлено, что возможность оценки независимо от сетки норм обратных матриц предложенных ранее систем уравнений для определения коэффициентов разложения какой-либо производной определяемого сплайна эквивалентна сходимости процесса сплайн-интерполяции для соответствующих производных [17]. В настоящей работе мы развиваем наш подход и получаем аналогичные результаты для интерполяционных сплайнов четной степени по Субботину.

2. В-сплайны и их основные свойства

Сплайны, являющиеся решением рассматриваемых задач интерполяции, не задаются явно. Чтобы их построить, нужно определить какие-либо параметры сплайнов путем решения систем линейных уравнений. В [6] в качестве определяемых параметров рассмотрены коэффициенты разложения производных искомого сплайна по В-сплайнам.

Приведем краткие сведения о В-сплайнах, которые можно найти, например, в [11, 13, 18–20].

Сплайн с носителем из r последовательных интервалов разбиения

$$T : \dots \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_l \leq \dots, \quad t_i < t_{i+r},$$

называется *В-сплайном* степени $r - 1$ (порядка r) на сетке T . На каждом таком носителе В-сплайн определяется однозначно с точностью до нормирующего множителя. Распространены В-сплайны с двумя нормировками, определяемые равенствами

$$N_{i,r,T}(x) = (t_{i+r} - t_i)(\cdot - x)_+^{r-1}[t_i, \dots, t_{i+r}], \quad (2)$$

$$M_{i,r,T}(x) = \frac{r}{t_{i+r} - t_i} N_{i,r,T}(x). \quad (3)$$

Здесь $g[t_i, \dots, t_{i+r}]$ обозначает разделенную разность r -го порядка от функции $g(x)$ по точкам $t_i, \dots, t_{i+r}$ разбиения T .

Любой сплайн σ степени $r - 1$ при $x \in [t_j, t_l]$, $j \leq i$, $i + r \leq l$, единственным образом может быть представлен через В-сплайны

$$\sigma(x) = \sum_{i=1-r}^{l-1} \alpha_i N_{i,r,T}(x).$$

Отметим ряд свойств, которыми обладают В-сплайны. Для рассматриваемых В-сплайнов $N_{i,r,T}$ или $M_{i,r,T}$ выполняются соотношения

$$\sum_{j=i-r+1}^i N_{j,r,T}(x) \equiv 1 \quad \text{для } x \in [t_i, t_{i+1}], \quad (4)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+r}} M_{i,r,T}(\tau) d\tau = 1. \quad (5)$$

Свойства (4) и (5) послужили основанием для названий *L_∞ -нормализованные* (или просто *нормализованные*) для В-сплайнов $N_{i,r,T}$ и соответственно *L_1 -нормализованные* для $M_{i,r,T}$.

Для разделенной разности r -го порядка функции $g \in W_1^r$ по значениям аргумента $x = t_i, \dots, t_{i+r}$ справедливо равенство

$$g[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+r}] = \frac{1}{r!} \int_{t_i}^{t_{i+r}} M_{i,r,T}(\tau) g^{(r)}(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Приведем неравенства, характеризующие обусловленность базиса из В-сплайнов, а именно, существуют положительные константы $D_{r,\infty}$ и $D_{r,1}$, зависящие только от r , такие, что

$$D_{r,\infty}^{-1} \|\mathbf{b}\|_\infty \leq \max_{x \in [t_j, t_l]} \left| \sum_{i=1-r}^{l-1} b_i N_{i,r,T}(x) \right| \leq \|\mathbf{b}\|_\infty, \quad (7)$$

$$D_{r,1}^{-1} \|\mathbf{b}\|_1 \leq \int_{t_j}^{t_l} \left| \sum_{i=1-r}^{l-1} b_i M_{i,r,T}(\tau) \right| d\tau \leq \|\mathbf{b}\|_1 \quad (8)$$

для любых векторов $\mathbf{b} = (b_{1-r}, b_{2-r}, \dots, b_{l-1})^T$. Здесь $\|\mathbf{b}\|_p$ означает p -норму вектора $\mathbf{b}$.

3. Системы определяющих уравнений для построения сплайнов

Любой сплайн на сетке δ степени $2m$ может быть представлен в виде

$$s(x) = \sum_{i=-2m}^N \alpha_i N_{i,2m+1,\delta}(x). \quad (9)$$

Условия интерполяции и заданные значения производных на концах отрезка приводят к системе уравнений относительно коэффициентов $\alpha_{-2m}, \dots, \alpha_N$. Для сплайнов нечетной степени $2m-1$ известно [21, 22], что по m первых и последних коэффициентов могут быть найдены по явным формулам. Это же справедливо и в нашем случае при интерполяции сплайном по Субботину степени $2m$.

Теорема 1. Для интерполяционного сплайна по Субботину степени $2m$ справедливы формулы

$$\alpha_{j-2m} = \sum_{r=0}^j \frac{(2m-r)!}{(2m)!} \text{sym}_r^j(\xi_1 - \xi_0, \dots, \xi_j - \xi_0) f^{(r)}(a), \quad (10)$$

$$\alpha_{N-j} = \sum_{r=0}^j \frac{(2m-r)!}{(2m)!} \text{sym}_r^j(\xi_N - \xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+1-j} - \xi_{N+1}) f^{(r)}(b), \quad (11)$$

где $j = 0, \dots, m$ и

$$\text{sym}_r^j(t_1, \dots, t_m) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq j} t_{i_1} \cdot \dots \cdot t_{i_r}$$

— элементарные симметрические многочлены нескольких переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой коэффициент разложения (9) может быть представлен [23] как значение функционала де Бора — Фикса

$$\alpha_i = \sum_{r=0}^{2m} (-1)^{2m-r} \psi_{i,2m}^{(2m-r)}(\tau_i) s^{(r)}(\tau_i) \quad (12)$$

с $\tau_i \in (\xi_i, \xi_{i+n+1})$,

$$\psi_{i,2m}(x) := \frac{1}{(2m)!} (\xi_{i+1} - x) \cdot \dots \cdot (\xi_{i+2m} - x). \quad (13)$$

Функция $\psi_{i,2m}$ (13) может быть переписана в виде

$$\psi_{i,2m}(x) = \frac{1}{(2m)!} \text{sym}_{2m}^{2m}(\xi_{i+1} - x, \dots, \xi_{i+2m} - x),$$

а ее производные — в виде

$$\psi_{i,2m}^{(r)}(x) = (-1)^r \frac{r!}{(2m)!} \text{sym}_{2m-r}^{2m}(\xi_{i+1} - x, \dots, \xi_{i+2m} - x).$$

Получаем формулы, связывающие коэффициенты разложения по В-сплайнам и производные этого сплайна, в виде

$$\alpha_i = \sum_{r=0}^{2m} \frac{(2m-r)!}{(2m)!} \text{sym}_r^{2m}(\xi_{i+1} - \tau_i, \dots, \xi_{i+2m} - \tau_i) s^{(r)}(\tau_i) \quad (14)$$

для любой точки τ_i из (ξ_i, ξ_{i+2m+1}) .

Если взять в качестве точки τ_i крайние точки сетки δ , а именно $\tau_i = \xi_0$, то соотношения (14) можно записать для индексов $i = -2m, \dots, 0$. Чтобы в случае кратных дополнительных узлов точка τ_i принадлежала (ξ_i, ξ_{i+2m+1}) , считаем, что $\tau_i = \xi_0 + 0$. Тогда некоторые аргументы элементарных симметрических функций в (14) обратятся в 0, поэтому, используя [21, 22] и тот факт, что

$$\text{sym}_r^{2m}(t_1, \dots, t_{2m-1}, 0) = \text{sym}_r^{2m-1}(t_1, \dots, t_{2m-1})$$

при $r < 2m$, получаем, что выражения (14) принимают вид

$$\alpha_i = \sum_{r=0}^{2m+i} \frac{(2m-r)!}{(2m)!} \text{sym}_r^{2m+i}(\xi_1 - \xi_0, \dots, \xi_{i+2m} - \xi_0) s^{(r)}(\xi_0)$$

при $i = -2m, \dots, -m$. В частности, первый коэффициент α_{-2m} равен просто значению сплайна в точке a . Ясно, что на правом конце ситуация подобная. $\square$

Матрица системы уравнений относительно остальных неизвестных имеет вид

$$\mathbf{A} = (N_{j, 2m+1, \delta}(x_i))_{i,j}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = -m+1, \dots, N-m-1.$$

В [6] в качестве определяемых параметров рассмотрены коэффициенты разложения k -й производной искомого интерполяционного сплайна по Субботину по В-сплайнам

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-2m+k}^N \alpha_i^{(k)} N_{i, 2m+1-k, \delta}(x). \quad (15)$$

Были получены системы линейных уравнений для нахождения неизвестных параметров $\alpha_i^{(k)}$, $i = -2m+k, \dots, N$. Приведем их здесь.

Если $k \leq m$, то в соответствии с теоремой 1 по $m+1-k$ первых и последних параметров могут быть найдены по явным формулам

$$\alpha_{j-2m+k}^{(k)} = \sum_{r=k}^{j+k} \frac{(2m-r)!}{(2m-k)!} \text{sym}_{r-k}^j(\xi_1 - \xi_0, \dots, \xi_j - \xi_0) f^{(r)}(a), \quad (16)$$

$$\alpha_{N-j}^{(k)} = \sum_{r=k}^{j+k} \frac{(2m-r)!}{(2m-k)!} \text{sym}_{r-k}^j(\xi_N - \xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+1-j} - \xi_{N+1}) f^{(r)}(b), \quad (17)$$

где $j = 0, \dots, m-k$. Для нахождения остальных неизвестных, которые можно записать в виде вектора $\boldsymbol{\alpha}_k = (\alpha_{-m+1}^{(k)}, \dots, \alpha_{N-m+k-1}^{(k)})^T$, получена система из $N+k-1$ уравнений

$$\mathbf{A}_k \boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{c}^k \quad (18)$$

с матрицей $\mathbf{A}_k = (a_{i,j}^k)$ размером $(N+k-1) \times (N+k-1)$ и вектором правой части $\mathbf{c}^k = (c_1^k, \dots, c_{N+k-1}^k)^T$. Элементы матрицы $\mathbf{A}_k$ определяются формулами

$$a_{i,j}^k = \int_{C_{i,j}^k} M_{i-k,k,\Delta}(\tau) N_{j-m, 2m+1-k, \delta}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, \dots, N+k-1,$$

а вектор правой части системы имеет компоненты

$$\begin{aligned}
 c_i^k &= k!f[x_{i-k}, \dots, x_i] \\
 &\quad - \sum_{j=-2m+k}^{-m} \alpha_j^{(k)} \int_{C_{i,j+m}^k} M_{i-k,k,\Delta}(\tau) N_{j,2m+1-k,\delta}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, m, \\
 c_i^k &= k!f[x_{i-k}, \dots, x_i], \quad i = m+1, \dots, N+k-m-1, \\
 c_i^k &= k!f[x_{i-k}, \dots, x_i] \\
 &\quad - \sum_{j=N+k-m}^N \alpha_j^{(k)} \int_{C_{i,j+m}^k} M_{i-k,k,\Delta}(\tau) N_{j,2m+1-k,\delta}(\tau) d\tau, \\
 &\quad i = N+k-m, \dots, N+k-1.
 \end{aligned}$$

В приведенных формулах промежутками интегрирования $C_{i,j}^k$ являются пересечения носителей В-сплайнов, произведение которых стоит под знаком интеграла,

$$C_{i,j}^k = \text{supp } M_{i-k,k,\Delta} \cap \text{supp } N_{j-m,2m+1-k,\delta} = [x_{i-k}, x_i] \cap [\xi_{j-m}, \xi_{j+m+1-k}],$$

в частности, $C_{i,j}^k = \emptyset$ при $|i-j| \geq m+1$ и, следовательно, значения интегралов равны нулю, матрица $\mathbf{A}_k$ ленточная с шириной ленты $2m+1$.

Отметим, что при $k=0$ элементы матрицы $\mathbf{A}_0$ являются элементами матрицы $\mathbf{A}$ и $\alpha_i^{(0)} = \alpha_i$.

Если $k > m$, то из системы уравнений

$$\mathbf{A}_k \boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{c}^k, \quad (19)$$

подобной по структуре системе (18), находятся уже все необходимые определяющие параметры $\boldsymbol{\alpha}_k = (\alpha_{-2m+k}^{(k)}, \dots, \alpha_N^{(k)})^T$. В этом случае элементами матрицы $\mathbf{A}_k = (a_{i,j}^k)$ размером $(N+2m-k+1) \times (N+2m-k+1)$ являются

$$a_{i,j}^k = \int_{D_{i,j}^k} M_{i-m-1,k,\Delta}(\tau) N_{j-2m+k-1,2m+1-k,\delta}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, \dots, N+2m-k+1,$$

а вектор правой части $\mathbf{c}^k = (c_1^k, \dots, c_{N+2m-k+1}^k)^T$ имеет компоненты

$$c_i^k = k!f[x_{i-m-1}, \dots, x_{i-m+k-1}], \quad i = 1, \dots, N+2m-k+1.$$

Здесь также промежутками интегрирования $D_{i,j}^k$ являются пересечения носителей В-сплайнов, произведение которых стоит под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}
 D_{i,j}^k &= \text{supp } M_{i-m-1,k,\Delta} \cap \text{supp } N_{j-2m+k-1,2m+1-k,\delta} \\
 &= [x_{i-m-1}, x_{i-m+k-1}] \cap [\xi_{j-2m+k-1}, \xi_j],
 \end{aligned}$$

аналогично $D_{i,j}^k = \emptyset$ при $|i-j| \geq m+1$, следовательно, матрица $\mathbf{A}_k$ также ленточная с шириной ленты $2m+1$.

Приведенные здесь системы уравнений (18), (19) составляют основу подхода к построению интерполяционных сплайнов четной степени по Субботину через нахождение коэффициентов разложений искомого сплайна или его производных по В-сплайнам [6].

4. Норма проектора при интерполяции по Субботину

Пусть линейный оператор интерполяции P , т. е. проектор, действует на линейном нормированном пространстве X в S (образ X при действии оператором P — линейное подпространство S пространства X). С каждым процессом интерполяции, задаваемым оператором P , связано множество интерполяционных условий Φ , являющееся линейным подпространством линейных функционалов на X , так что $\sigma = Pf$ — единственный элемент из S , удовлетворяющий условию: $\phi\sigma = \phi f$ для всех $\phi \in \Phi$.

Известна формула нормы проектора [2], использующая множество интерполяционных условий:

$$\|P\| = \sup_{\sigma \in S} \inf_{\phi \in \Phi} \frac{\|\phi\| \|\sigma\|}{|\phi\sigma|}. \quad (20)$$

Пусть $\{\sigma_i\}$ и $\{\phi_i\}$ — базисы для S и Φ соответственно. Тогда формула становится такой:

$$\|P\| = \sup_{\beta} \inf_{\mathbf{b}} \frac{\left\| \sum_i b_i \phi_i \right\| \left\| \sum_j \beta_j \sigma_j \right\|}{\left| \sum_{i,j} b_i \phi_i \sigma_j \beta_j \right|},$$

где векторы $\mathbf{b}$ и β состоят из компонент (b_i) и (β_i) соответственно.

Если выбранные базисы в S и Φ хорошо обусловлены, т. е. для любых векторов $\mathbf{b}$ и β имеют место неравенства

$$m_\phi \|\mathbf{b}\|_1 \leq \left\| \sum_i b_i \phi_i \right\| \leq M_\phi \|\mathbf{b}\|_1, \quad (21)$$

$$m_\sigma \|\beta\|_\infty \leq \left\| \sum_j \beta_j \sigma_j \right\| \leq M_\sigma \|\beta\|_\infty, \quad (22)$$

где m_σ , M_σ , m_ϕ , M_ϕ — некоторые положительные константы, то

$$m_\sigma m_\phi \|\mathbf{A}_{\sigma\phi}^{-1}\|_\infty \leq \|P\| \leq M_\sigma M_\phi \|\mathbf{A}_{\sigma\phi}^{-1}\|_\infty \quad (23)$$

с матрицей $\mathbf{A}_{\sigma\phi} = (\phi_i \sigma_j)$, поскольку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\sigma\phi}^{-1}\|_\infty &= \sup_{\beta} \frac{\|\beta\|_\infty}{\|\mathbf{A}_{\sigma\phi}\beta\|_\infty} = \sup_{\beta} \frac{\|\beta\|_\infty}{\sup_{\mathbf{b}} \left| \sum_i (\mathbf{A}_{\sigma\phi}\beta)_i b_i \right| / \|\mathbf{b}\|_1} \\ &= \sup_{\beta} \inf_{\mathbf{b}} \frac{\|\mathbf{b}\|_1 \|\beta\|_\infty}{|\mathbf{b}^T \mathbf{A}_{\sigma\phi} \beta|} = \sup_{\beta} \inf_{\mathbf{b}} \frac{\|\mathbf{b}\|_1 \|\beta\|_\infty}{\left| \sum_{i,j} b_i \phi_i \sigma_j \beta_j \right|}. \end{aligned}$$

Как обычно, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ означает max-норму, согласованную с ∞ -нормой $\|\mathbf{b}\|_\infty$ вектора $\mathbf{b}$.

В нашем случае P — это оператор интерполяции $\mathcal{S}$ для полного сплайна четной степени $2m$ по Субботину. В качестве S выступает пространство $\mathbb{S}_{2m}(\delta)$ сплайнов степени $2m$ на сетке δ гладкости C^{2m-1} .

Если интерполируемая функция f более гладкая, например $f \in C^k[a, b]$, $1 \leq k \leq 2m$ ($f \in L_\infty[a, b]$ при $k = 2m$), то будем рассматривать и операторы $\mathcal{S}^{(k)}$, связывающие $f^{(k)}$ с соответствующей производной сплайна $s^{(k)}$ ($\mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{S}$). Это тоже проекторы, и они действуют на пространствах $\mathbb{S}_{2m-k}(\delta)$ тождественно.

Наша цель — показать связь величин норм операторов $\mathcal{S}^{(k)}$ или сходимости процессов интерполяции с величинами норм матриц предложенных ранее методов построения интерполяционных сплайнов четной степени по Субботину.

Изучим структуру множеств интерполяционных условий в рассматриваемой задаче интерполяции полным сплайном четной степени $2m$ по Субботину, задаваемой операторами $\mathcal{S}^{(k)}$. Помимо значений функции в точках сетки нужны еще производные на краях отрезка $f^{(\nu)}(a)$, $f^{(\nu)}(b)$, $\nu = 1, \dots, m$. Соответствующие операторам $\mathcal{S}^{(k)}$ множества интерполяционных условий будем обозначать через Φ^k ($\Phi^0 = \Phi$). В качестве базиса в Φ естественно взять линейные функционалы $\phi_i^0 = \phi_i = \delta_{x_i}$, где δ_t — δ -функция Дирака, сосредоточенная в точке t (обобщенная функция), и функционалы $\delta_a^{(j)}$, $\delta_b^{(j)}$, задающие краевые условия (1), т. е. $\delta_t^{(j)} f = f^{(j)}(t)$. При $k > 0$ определим функционалы

$$\phi_i^k f^{(k)} = f[x_i, \dots, x_{i+k}],$$

которые в соответствии со свойством (6) можно брать в качестве элементов базиса множества интерполяционных условий Φ^k , т. е.

$$\phi_i^k f^{(k)} = \int_{x_i}^{x_{i+k}} f^{(k)}(\tau) M_{i,k,\Delta}(\tau) d\tau.$$

Ясно, что при $k > m$ для формирования базиса Φ^k достаточно только функционалов ϕ_i^k , $i = -m, \dots, N + m - k$. Здесь учтено, что сетка Δ расширена необходимым количеством дополнительных кратных узлов в обе стороны.

Норма произвольного элемента ϕ^k из Φ^k есть просто L_1 -норма некоторого сплайна степени $k - 1$ с узлами на сетке Δ . Действительно, если

$$\phi^k = \sum_{i=-m}^{N+m-k} b_i \phi_i^k$$

для некоторого набора коэффициентов $\mathbf{b} = (b_{-m}, \dots, b_{N+m-k})^T$, то

$$\begin{aligned} \|\phi^k\| &= \sup_{f^{(k)} \in L_\infty} \frac{|\phi^k f^{(k)}|}{\|f^{(k)}\|_{L_\infty}} \\ &= \sup_{f^{(k)} \in L_\infty} \left| \int_a^b f^{(k)}(\tau) \left[\sum_{i=-m}^{N+m-k} b_i M_{i,k,\Delta}(\tau) \right] d\tau \right| / \|f^{(k)}\|_{L_\infty} \\ &= \int_a^b \left| \sum_{i=-m}^{N+m-k} b_i M_{i,k,\Delta}(\tau) \right| d\tau = \left\| \sum_{i=-m}^{N+m-k} b_i M_{i,k,\Delta} \right\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу условий (8) выполнены неравенства (21) хорошей обусловленности выбранного базиса для Φ^k при $k > m$.

Базис $\{\sigma_i\}$ в пространстве $\mathbb{S}_{2m-k}(\delta)$ выберем также хорошо обусловленный, из L_∞ -нормализованных В-сплайнов на сетке δ , удовлетворяющий условиям (7). В соответствии с формулой (20) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^{(k)}\| &= \sup_{s_k \in \mathbb{S}_{2m-k}(\delta)} \inf_{\phi^k \in \Phi^k} \frac{\|\phi^k\| \|s_k\|_{L_\infty}}{|\phi^k s_k|} \\ &= \sup_{\beta} \inf_b \frac{\left\| \sum_{i=-m}^{N+m-k} b_i M_{i,k,\Delta} \right\|_{L_1} \left\| \sum_{j=-2m+k}^N \beta_j N_{j,2m+1-k,\delta} \right\|_{L_\infty}}{\left| \sum_{i,j} b_i \left[\int_a^b M_{i,k,\Delta}(\tau) N_{j,2m+1-k,\delta}(\tau) d\tau \right] \beta_j \right|}. \end{aligned}$$

В силу неравенств (8) приходим к оценке (23) для операторов $\mathcal{S}^{(k)}$, $k > m$, с матрицей $\mathbf{A}_{\sigma\phi}$, совпадающей с точностью до перестановок строк и столбцов (что не влияет на ее ∞ -норму) с матрицей системы (19) относительно коэффициентов разложения k -й производной сплайна по нормализованным В-сплайнам

$$D_{k,1}^{-1} D_{2m+1-k,\infty}^{-1} \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_{\infty} \leq \|\mathcal{S}^{(k)}\| \leq \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_{\infty} \quad (24)$$

при $k = m+1, \dots, 2m$.

Рассмотрим теперь случай $k \leq m$. Поскольку нас интересует сходимость $s^{(k)}$ к $f^{(k)}$ при минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции $f \in C^k[a, b]$, может оказаться, что функция f не имеет производных в точках a и b порядка выше k , которые необходимы для задания краевых условий. Ранее были установлены оценки сходимости [6, теорема 3] через норму обратной матрицы системы уравнений (18), показывающие, что сходимость не зависит от концевых значений производных порядка выше k , т. е. отсутствующие значения производных на концах можно задавать произвольными числовыми значениями и нет необходимости требовать повышенной гладкости функции f в точках a и b . Считаем, что производные порядка выше k на концах заданы произвольными числовыми значениями. Таким образом, принимая во внимание теорему 3 из [6], для установления эквивалентности ограниченности норм проектора $\mathcal{S}^{(k)}$ и матрицы $\mathbf{A}_k^{-1}$ достаточно установить лишь левое неравенство (24) для $k \leq m$, т. е. получить оценку нормы проектора снизу.

С этой целью вместо операторов $\mathcal{S}^{(k)}$ рассмотрим операторы $\widehat{\mathcal{S}}^{(k)}$, которые образуются от операторов $\widehat{\mathcal{S}}^k$ так же, как и $\mathcal{S}^{(k)}$ от $\mathcal{S}$, а именно

$$\widehat{\mathcal{S}}^{(k)} f^{(k)} = (\widehat{\mathcal{S}}^k f)^{(k)}.$$

Операторы $\widehat{\mathcal{S}}^k$ отличаются от $\mathcal{S}$ лишь тем, что

$$(\widehat{\mathcal{S}}^k f)^{(\nu)}(a) = (\widehat{\mathcal{S}}^k f)^{(\nu)}(b) = 0, \quad \nu = k, \dots, m.$$

Ясно, что

$$\|\widehat{\mathcal{S}}^{(k)}\| \leq \|\mathcal{S}^{(k)}\|. \quad (25)$$

Множество интерполяционных условий $\widehat{\Phi}^k$ для проектора $\widehat{\mathcal{S}}^{(k)}$ задается теми же функционалами ϕ_i^k , $i = -k+1, \dots, N-1$, т. е.

$$\phi_i^k f^{(k)} = f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \int_{x_i}^{x_{i+k}} f^{(k)}(\tau) M_{i,k,\Delta}(\tau) d\tau,$$

выбираемыми в качестве базиса $\widehat{\Phi}^k$. Чтобы воспользоваться формулой (20), надо выбрать базис в некотором подпространстве $\widehat{\mathbb{S}}_{2m-k}(\delta)$ пространства $\mathbb{S}_{2m-k}(\delta)$, определяемом условиями такими, что для любого $\sigma \in \widehat{\mathbb{S}}_{2m-k}(\delta)$ имеет место

$$\sigma^{(\nu)}(a) = \sigma^{(\nu)}(b) = 0, \quad \nu = 0, \dots, m-k.$$

Оказывается, базисом в $\widehat{\mathbb{S}}_{2m-k}(\delta)$ будут являться В-сплайны

$$N_{i,2m+1-k,\delta}, \quad i = -m+1, \dots, N-m+k-1.$$

Действительно, для любого сплайна $\sigma \in \widehat{\mathbb{S}}_{2m-k}(\delta)$, представленного в базисе из L_{∞} -нормализованных сплайнов

$$\sigma(x) = \sum_{i=-2m+k}^N a_i N_{i,2m+1-k,\delta}(x),$$

коэффициенты a_i при $i = -2m + k, \dots, -m$ и $i = N - m + k, \dots, N$ в силу формул (16) и (17) обращаются в 0.

Ввиду свойств (7) и (8) выбранные базисы в $\widehat{\mathbb{S}}_{2m-k}(\delta)$ и $\widehat{\Phi}^k$ хорошо обусловлены, а матрица $\mathbf{A}_{\sigma\phi}$ совпадает с матрицей $\mathbf{A}_k$ системы уравнений (18).

Таким образом, согласно (23) при $k = 0, \dots, m$ имеем

$$D_{k,1}^{-1} D_{2m+1-k,\infty}^{-1} \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_{\infty} \leq \|\widehat{\mathcal{F}}^{(k)}\| \leq \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_{\infty}.$$

Последние неравенства с учетом неравенств (24), (25) и теоремы 3 из [6] позволяют сформулировать теорему.

Теорема 2. Пусть для любого $k = 0, \dots, 2m$ на последовательности сеток $\{\Delta\}$ с условием $|\Delta| \rightarrow 0$ последовательность $\{s\}$ полных сплайнов четной степени $2m$ по Субботину интерполирует функцию $f \in C^k[a, b]$ с краевыми условиями (1). Последовательность $s^{(k)}$ сходится равномерно к $f^{(k)}$ тогда и только тогда, когда существует число K такое, что для всех матриц $\mathbf{A}_k$ последовательности систем (18) при $k = 0, \dots, m$ или (19) при $k = m + 1, \dots, 2m$ выполнено $\|\mathbf{A}_k^{-1}\|_{\infty} \leq K$.

Следствие. Для любого $k = 0, \dots, 2m$ в условиях теоремы 2 справедливы неравенства

$$c \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_{\infty} \leq \|\mathcal{S}^{(k)}\| \leq C \|\mathbf{A}_k^{-1}\|_{\infty}$$

с константами c и C , зависящими только от m и k , но не от N или Δ .

5. Заключение

Отметим, что для классических интерполяционных сплайнов нечетной степени $2m - 1$ установлено [25, 26], что безусловная сходимость (без ограничений на последовательность сеток) имеет место только для двух средних производных $k = m - 1, m$. Для остальных производных доказано [27, 12], что возможна расходимость, для сходимости нужны ограничения на расположение узлов последовательности сеток. Обычно рассматривают ограничения на величины глобальной

$$R_{\Delta} = \frac{|\Delta|}{\min_i (x_{i+1} - x_i)}$$

или локальной

$$\rho_{\Delta} = \max_{|i-j|=1} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{j+1} - x_j}$$

сеточных характеристик. Например, в терминах глобальной характеристики достаточно, чтобы на последовательности сеток величина R_{Δ} оставалась ограниченной, а в терминах локальной характеристики найдены лишь величины $\rho_{2m-1}^{(k)}$, $k = 0, \dots, m - 2, m + 1, \dots, 2m - 1$, такие, что на последовательности сеток с $\rho_{\Delta} \geq \rho_{2m-1}^{(k)}$ возможна расходимость для k -й производной [12, 28].

Для сплайнов четной степени какие-либо общие результаты по сходимости отсутствуют, изучены лишь параболические сплайны ($m = 1$), для них безусловная сходимость имеет место только при $k = 1, 2$ [29]. Есть предположение, что в общем случае сплайнов произвольной четной степени $2m$ по Субботину ситуация будет похожа на сплайны нечетной степени, а именно, безусловная сходимость будет иметь место только при $k = m, m + 1$. Это предположение автором доказано для случая сплайнов четвертой степени ($m = 2$) при $k = 3$ и опубликовано в [30].

В [6] показано, что интерполяционные сплайны четной степени $2m$ двух разных конструкций по Субботину и по Марсдену в вопросах сходимости тесно связаны между собой, например, оценка k -й производной функции погрешности сплайна по Субботину и оценка $(2m - k)$ -й производной функции погрешности сплайна по Марсдену выражаются через нормы одной и той же матрицы $\|A_k^{-1}\|_\infty$ и $\|(A_k^T)^{-1}\|_\infty$, которые в силу результатов Демко [24] могут быть ограничены одной и той же величиной. Поэтому равномерная сходимость производных $s^{(k)}$ к $f^{(k)}$ при $f \in C^k[a, b]$ для сплайна s по Субботину на какой-либо последовательности сеток эквивалентна сходимости производных $s^{(2m-k)}$ к $f^{(2m-k)}$ при $f \in C^{2m-k}[a, b]$ для сплайна s по Марсдену на той же последовательности сеток.

Отметим, что разработка эффективных методов вычисления и оценки норм обратных матриц является наиболее актуальным вопросом в задачах исследования сходимости процессов сплайн-интерполяции. Например, легко получить нужную оценку для матриц с диагональным преобладанием [31]. Однако для сплайнов степеней выше второй и третьей системы уравнений построения сплайнов не имеют диагонального преобладания и этот метод уже не работает. При изучении сходимости интерполяции сплайнами нечетной степени де Бор [32] обнаружил, что возникающая матрица является вполне неотрицательной, и предложил способ оценки норм обратных матриц такого класса. Автором доказана [6] вполне неотрицательность наших матриц A_k для всех k . Вычислению нормы матрицы, обратной к вполне неотрицательной матрице, посвящена и работа [33].

ЛИТЕРАТУРА

1. Schoenberg I. J., Whitney A. On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74, N 2. P. 246–259.
2. de Boor C. Bounding the error in spline interpolation // SIAM Rev. 1974. V. 16, N 4. P. 531–544.
3. Субботин Ю. Н. О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 63–70.
4. Marsden M. Quadratic spline interpolation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80, N 5. P. 903–906.
5. Волков Ю. С., Шевалдин В. Т. Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
6. Волков Ю. С. Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.
7. On approximation theory: Proc. conf. Oberwolfach, 1963 / P. L. Butzer, J. Korevaar, eds. ISNM, 5. Basel: Birkhäuser, 1964.
8. Волков Ю. С., Субботин Ю. Н. 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
9. Волков Ю. С. О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычислительные системы. Т. 159: Сплайн-функции и их приложения. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. С. 3–18.
10. Волков Ю. С. Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34.
11. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
12. Волков Ю. С. Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени // Вычислительные системы. Т. 106: Приближение сплайнами. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. С. 41–56.
13. Schumaker L. L. Spline functions: basic theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2007.
14. Karlin S. Total positivity. Stanford: Stanford Univ. Press, 1968. V. 1.

15. de Boor C., Pinkus A. Backward error analysis for totally positive linear systems // Numer. Math. 1977. V. 27, N 4. P. 485–490.
16. Schumaker L. L. Spline functions: computational methods. Philadelphia: SIAM, 2015.
17. Волков Ю. С. Сходимость процессов сплайн-интерполяции и обусловленность систем уравнений построения сплайнов // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 4. С. 87–102.
18. де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
19. de Boor C. Splines as linear combinations of B-splines. A survey // Approxim. Theory II: Proc. / Int. Symp., Austin, 1976. New York: Acad. Press, 1976. P. 1–47.
20. DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive approximation. Berlin: Springer-Verl., 1993.
21. Волков Ю. С. О нахождении полного интерполяционного сплайна через B-сплайны // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 334–338.
22. Volkov Yu. S. Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via B-spline basis // Cent. Eur. J. Math. 2012. V. 10, N 1. P. 352–356.
23. de Boor C., Fix G. J. Spline approximation by quasiinterpolants // J. Approx. Theory. 1973. V. 8, N 1. P. 19–45.
24. Demko S. Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14, N 4. P. 616–619.
25. Shadrin A. Yu. The L_∞ -norm of the L_2 -spline projector is bounded independently of the knot sequence: A proof of de Boor's conjecture // Acta Math. 2001. V. 187, N 1. P. 59–137.
26. Волков Ю. С. О сходимости процесса интерполяции для производных полного сплайна // Укр. мат. вісн. 2012. Т. 9, № 2. С. 278–296.
27. de Boor C. On bounding spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. V. 14, N 3. P. 191–203.
28. Волков Ю. С. Об осцилляционных матрицах в задачах сплайн-интерполяции // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 3. С. 51–53.
29. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
30. Волков Ю. С. Сходимость интерполяционных сплайнов четвертой степени // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 67–74.
31. Ahlberg J. H., Nilson E. N. Convergence properties of the spline fit // J. Soc. Ind. Appl. Math. 1963. V. 11, N 1. P. 95–104.
32. de Boor C. On the convergence of odd-degree spline interpolation // J. Approx. Theory. 1968. V. 1, N 4. P. 452–463.
33. Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.

Поступила в редакцию 30 января 2019 г.

После доработки 15 апреля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Волков Юрий Степанович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090
volkov@math.nsc.ru