B. G. Grebenshchikov, A method of constructing almost periodic solutions to a system of neutral type with linear delay, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1260–1270

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.606>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.197.8

April 26, 2023, 15:22:00

ОДИН МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Б. Г. Гребенщиков

Аннотация. Изучена возможность построения почти периодического решения для одной неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, являющимся линейной функцией аргумента (времени) при некоторых предположениях относительно правой части данной системы. Доказано, что это решение асимптотически устойчиво. Исследуется также проблема существования почти периодического решения у одной системы без нейтральных членов, при этом данное решение устойчиво.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.606

Ключевые слова: запаздывание, почти периодические решения, устойчивость.

1. Основные определения. Рассматриваем линейное нормированное пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой $\|w\| = \max_j \{w_j^\top\}$ (здесь w_j ($j = 1, 1, \dots, m$) — компоненты вектора w , $\top$ — значок транспонирования).

Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$ ($i, j = 1, \dots, m$) определим в соответствии с нормой вектора $[1]$, а именно

$$\|D\| = \max_i \sum_j |d_{ij}|. \quad (1.1)$$

В пользу такого выбора говорит то, что норма вектор-функции на отрезке определяется почти сходным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(t)$ называется *почти периодической в смысле Бора*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $l(\varepsilon)$ такое, что любой отрезок $[\vartheta, \vartheta + l]$ содержит по меньшей мере одно число T , для которого выполнено неравенство $|f(t + T) - f(t)| < \varepsilon$, $-\infty < t < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение $x(t, \phi(s), \phi'(s))$ системы дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием $\gamma(t) = (1 - \mu)t$ ($\mu = \text{const}$, $0 < \mu < 1$) нейтрального типа:

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + Rdx(\mu t)/dt, \quad (1.2)$$

определенное непрерывно дифференцируемой начальной вектор-функцией $\phi(s)$ ($s \in [\mu t_0, t_0]$), называется *устойчивым*, если существует постоянная величина $\widehat{C} > 0$ такая, что из условия ограниченности величины $\|\phi(s)\| + \|\phi'(s)\|$ следует неравенство $\|x(t, \phi(s), \phi'(s))\| < \widehat{C}$ ($t > t_0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если решение $x(t, \phi(s), \phi'(s))$ системы (1.2) наряду с устойчивостью обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, \phi(s), \phi'(s))\| = 0$, то такое решение называется *асимптотически устойчивым*.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную неоднородную систему нейтрального типа с линейным запаздыванием

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + Rdx(\mu t)/dt + f(t), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (2.1)$$

Здесь A, B, R — постоянные матрицы размера $m \times m$, $x(t)$ — m -мерная вектор-функция времени (аргумента) t ; $f(t)$ — m -мерная вектор-функция, непрерывная на полуоси $[0, +\infty)$.

Решение системы (2.1) определено начальной вектор-функцией $\phi(s)$, заданной на отрезке $[\mu t_0, t_0]$, имеющей (в соответствии с определением 2) непрерывную производную при $\mu t_0 < s \leq t_0$ [2, теорема 10.6]. Отметим, что системы с линейным запаздыванием встречаются в задачах механики, физики, биологии. В частности, при исследовании процесса колебаний токоприемника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом (при учете воздействия эластичной опоры) в [3] задача сводится к изучению поведения решения неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с линейным запаздыванием. Более сложная модель, приводящая к исследованию системы четвертого порядка, предложена в [4]. Если рассматривать колебания токоприемника при удалении локомотива от опоры, то возникают, в свою очередь, системы нейтрального типа с линейным запаздыванием. Задача прохождения токоприемником эластичной опоры имеет практическое применение при изучении устойчивости колебаний движущегося токоприемника и при определении износа контактного провода при различных скоростях движения локомотива, а также при различной величине силы нажатия ползца токоприемника на контактный провод. Учет эффекта последствия важен для правильного качественного и количественного описаний данных процессов.

Полагаем, что собственные значения λ матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедливо неравенство

$$\text{Re}(\lambda) < -\delta_1, \quad \delta_1 = \text{const}, \quad \delta_1 > 0. \quad (2.2)$$

Наряду с этим считаем, что собственные значения ρ матрицы $-A^{-1}B$ меньше единицы по модулю, т. е. справедлива оценка

$$|\rho| < \delta_2, \quad \delta_2 = \text{const}, \quad 0 < \delta_2 < 1. \quad (2.3)$$

Наконец, считаем, что оценка, подобная (2.3), справедлива и для собственных значений ν матрицы R , т. е.

$$|\nu| < \delta_3, \quad \delta_3 = \text{const}, \quad 0 < \delta_3 < 1. \quad (2.4)$$

Непрерывную вектор-функцию $f(t)$ считаем равномерно ограниченной, т. е. справедливо неравенство

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|f(t)\| \leq K, \quad K = \text{const}, \quad K > 0 \quad (2.5)$$

(в дальнейшем наложим еще некоторые ограничения на данную вектор-функцию).

3. Ограниченность решения линейной неоднородной системы.

Теорема 1. При выполнении неравенств (2.2)–(2.5) решение системы (2.1) ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду положительности запаздывания $\gamma(t)$ и ограниченности величины $\|\phi'(s)\|$ решение системы (2.1) существует [5, теорема существования и единственности]. Заменой $\tau = \ln(t)$ сведем систему (2.1) к следующей системе с постоянным запаздыванием $\sigma = -\ln(\mu)$ [2]:

$$dz(\tau)/d\tau = e^\tau [Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma) + \bar{f}(\tau)] + \mu R dz(\tau - \sigma)/d\tau, \quad \bar{f}(\tau) = f(e^\tau). \quad (3.1)$$

Известно [6], что при выполнении неравенств (2.2)–(2.4) решение $z^0(\tau)$ соответствующей однородной системы

$$dz^0(\tau)/d\tau = e^\tau [Az^0(\tau) + Bz^0(\tau - \sigma)] + \mu R dz^0(\tau - \sigma)/d\tau \quad (3.2)$$

удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$\|z^0(\tau)\| \leq \bar{M} e^{-\bar{\beta}(\tau - \tau_0)} \left[\sup_{\tau_0 - \sigma \leq s \leq \tau_0 + \sigma, 1 \leq i \leq m} \{|\bar{\phi}_i(s)|, |\bar{\phi}'_i(s)|\} \right], \quad (3.3)$$

$$z^0(s) = \bar{\phi}(s), \quad \tau_0 - \sigma \leq s \leq \tau_0,$$

$$\bar{M} = \text{const}, \quad \bar{M} > 0, \quad \bar{\beta} = \text{const}, \quad \bar{\beta} > 0.$$

Константы $\bar{M}, \bar{\beta}$ одни и те же при любых начальных значениях $\tau_0 \geq \tau_0^* > 0$.

Полагаем $z_{n+1}(\tau) = z(\tau + n\sigma)$, $z_0(\tau) = \bar{\phi}(\tau - \sigma)$, $\bar{f}_{n+1}(\tau) = \bar{f}(n\sigma + \tau)$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \sigma$. Тогда из системы (3.1) получаем счетную систему

$$dz_{n+1}(\tau)/d\tau = \mu^{-n} e^\tau [Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau) + \bar{f}_{n+1}(\tau)] + \mu R dz_n(\tau)/d\tau \quad (3.4)$$

на конечном промежутке $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$ при граничных условиях

$$z_{n+1}(\tau_0) = z_n(\tau_0 + \sigma). \quad (3.5)$$

Пусть $U_n(\tau, s) = \exp(\mu^{-n} A(e^\tau - e^s))$, $\tau_0 \leq s \leq \tau \leq \tau_0 + \sigma$. Представим решение неоднородной системы (3.4) в интегральном виде (виде Коши) [2]:

$$\begin{aligned} z_{n+1}(\tau) = & U_n(\tau, \tau_0) z_n(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) B z_n(s) \frac{e^s}{\mu^n} ds \\ & + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) \mu R dz_n(s)/ds + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) \bar{f}_{n+1}(s) \frac{e^s}{\mu^n} ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если ввести норму вектор-функции $z(\tau)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$ следующим образом [5]:

$$\|z(\tau)\|_\sigma = \sup_{\substack{\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \sigma, \\ 1 \leq i \leq m}} \{|z_i(\tau)|, |z'_i(\tau)|\}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_0 + \sigma],$$

то при такой нормировке имеем банахово пространство $C^1_{[\tau_0, \tau_0 + \sigma]}$ непрерывных функций, имеющих первую производную. В данном пространстве определим оператор сдвига $T_{n, \tau}$ (аналогично [7, гл. IV]):

$$\begin{aligned} T_{n, \tau} w(s) = & U_n(\tau, \tau_0) w(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) B w(s) \frac{e^s}{\mu^n} ds \\ & + \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) \mu R dw(s)/ds, \quad w(\tau) \in C^1_{[\tau_0, \tau_0 + \sigma]}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поскольку произведение операторов в банаховом пространстве определено [8, гл. 3], решение однородной дифференциально-разностной системы $z_{n+1}^0(\tau)$ (соответствующей системе (3.3)) имеет вид

$$z_{n+1}^0(\tau) = T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \cdots T_{1,s_1} T_0(s_0) z_0(s), \quad (3.8)$$

$$\tau_0 \leq s \leq s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq \tau \leq \tau_0 + \sigma.$$

Отметим некоторые свойства данного линейного оператора. Ввиду (2.2) справедливо следующее неравенство [1, гл. 1]:

$$\|U_n(\tau, s)\| \leq M \exp\left(\frac{-\delta_1}{\mu^n} A(e^\tau - e^s)\right), \quad M = \text{const}, \quad M > 1, \quad \tau_0 \leq s \leq \tau \leq \tau_0 + \sigma. \quad (3.9)$$

Из (3.7) следует, что

$$\|T_{n,\tau} w(s)\| \leq M \left(1 + \frac{\|B\|}{\delta_1} \sup_s \|w(s)\| + \mu^{n+1} \frac{\|R\|}{\delta_1 t_0} \sup_s \|w'(s)\|\right), \quad (3.10)$$

т. е. данный оператор $T_{n,\tau}$ равномерно ограничен [8, гл. 3]. Более точное свойство данного оператора вытекает из оценки (3.3), а именно

$$\left\| T_{n,\tau} \prod_{j=0}^{n-1} T_{j,s_j} z_0(s) \right\| \leq \bar{M} q^{n-1} \|z_0\|_\sigma, \quad q = \mu^{\bar{\beta}}. \quad (3.11)$$

Очевидно, решение неоднородного уравнения (3.6) можно представить как решение операторного уравнения

$$z_{n+1}(\tau) = T_{n,\tau} z_n(s) + I_n(\tau) \bar{f}_{n+1}(s), \quad (3.12)$$

где $I_n(\tau)$ — интегральный оператор [8, гл. 3], определенный следующим образом:

$$I_n(\tau) w(s) = \int_{\tau_0}^{\tau} U_n(\tau, s) w(s) \frac{e^s}{\mu^n} ds.$$

Отметим некоторые свойства этого оператора. Как следует из (3.2), для вектор-функции $F_n(\tau) = I_n(\tau) \bar{f}_{n+1}(s)$ справедлива оценка

$$\sup_{\tau} \|F_n(\tau)\| \leq \frac{MK}{\delta_1}, \quad (3.13)$$

отсюда оператор $I_n(\tau)$ равномерно ограничен. Далее, для выражения $dF_n(\tau)/d\tau$ имеем равенство

$$dF_n(\tau) d\tau = \frac{Ae^\tau}{\mu^n} F_n(\tau) + \frac{e^\tau}{\mu^n} \bar{f}_n(\tau). \quad (3.14)$$

Из уравнений (3.8), (3.11) следует равенство

$$\begin{aligned} z_{n+1}(\tau) &= T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \cdots T_{1,s_1} T_0(s_0) z_0(s) \\ &\quad + T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \cdots T_{1,s_1} I_0(s_1) \bar{f}_1(s) \\ &\quad + T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \cdots T_{2,s_2} I_1(s_2) \bar{f}_2(s) + \cdots + I_n(\tau) \bar{f}_{n+1}(s). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ввиду того, что справедлива оценка

$$\sup_{s_j} \|T_{j,s_j} I_{j-1}(s_j) \bar{f}_j(s)\| \leq \frac{M^2}{\delta_1} \left[1 + \frac{\|B\|}{\delta_1} + \frac{\|R\|}{t_0} \left(\frac{\|A\|}{\delta_1} + 1\right)\right] K = \bar{L}K$$

(она получается из соотношений (3.3), (3.10), (3.13) и (3.14)), имеем

$$\sup_{\tau} \|T_{n,\tau} T_{n-1,s_{n-1}} T_{n-2,s_{n-2}} \cdots T_{j,s_j} I_{j-1}(s_j) \bar{f}_j(s)\| \leq \overline{MLK} q^{n-j-1}.$$

Тогда из соотношения (3.15) вытекает неравенство

$$\sup_{\tau} \|z_{n+1}(\tau)\| \leq \overline{M} q^{n-1} \|z_0(\tau)\|_{\sigma} + \overline{LM} K (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2}) + \frac{MK}{\delta_1},$$

откуда получаем окончательную оценку любого n :

$$\sup_{\tau} \|z_{n+1}(\tau)\| \leq q^{n-1} \|z_0(\tau)\|_{\sigma} + \left[\frac{\overline{LM}}{1-q} + \frac{M}{\delta_1} \right] K, \quad (3.16)$$

из которой и следует утверждение теоремы 1.

4. Построение почти периодического решения. Пусть теперь $f(t) \in \Pi^{(k)}$, где $\Pi^{(k)}$ — пространство почти периодических вектор-функций, имеющих производные до порядка k [1, дополнение]. Полагаем, что в системе (1.1) начальная вектор-функция $\phi(s)$ тождественно нулевая, $\mu t_0 \leq s \leq t_0$.

Возникает вопрос о существовании почти периодического решения системы (1.1) и его вычисления.

Теорема 2. При выполнении неравенств (2.2)–(2.4) и условий, налагаемых на вектор-функцию $f(t)$, система (1.1) имеет при любых $0 < \mu < 1$ почти периодическое решение $\bar{x}(t)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Данное решение единственно и асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать почти периодическое решение $\bar{x}(t)$ методом последовательных приближений, полагая

$$dx_{n+1}(t)/dt = Ax_{n+1}(t) + Bx_n(\mu t) + R dx_n(\mu t)/dt + f(t), \quad x_0 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Очевидно, $x_1(t) = \bar{y}(t)$, где $\bar{y}(t)$ — почти периодическое решение неоднородной системы без запаздывающих членов

$$dy(t)/dt = Ay(t) + f(t). \quad (4.2)$$

Известно [1, дополнение], что данное (частное) решение системы (4.2) имеет вид

$$\bar{y}(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} f(s) ds. \quad (4.3)$$

Но производная $x'_1(t) = dx_1(t)/dt$ является почти периодической вектор-функцией и $x'_1(\mu t)$ также является почти периодической вектор-функцией [1, дополнение]. Последовательно интегрируя соотношения (4.1), найдем $x_2(t)$, и т. д.

Для доказательства сходимости последовательных приближений введем следующую вектор-функцию: $\Delta_{n+1}(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$. Очевидно, $\Delta_{n+1}(t)$ удовлетворяют дифференциально-разностным соотношениям

$$d\Delta_{n+1}(t)/dt = A\Delta_{n+1}(t) + B\Delta_n(\mu t) + R d\Delta_n(\mu t)/dt, \quad \Delta_1(t) = \bar{y}(t). \quad (4.4)$$

Отметим, что

$$dx(\theta(t))/dt = (dx(\theta(t))/d\theta) (d\theta(t)/dt),$$

тогда $d\Delta_n(\mu t)/dt = \mu d\Delta_n(\theta)/d\theta$.

Последовательно получаем из (4.4) следующие равенства:

$$\begin{aligned} d\Delta_1(t)/dt &= A\Delta_1(t) + f(t) = A\bar{y}(t) + f(t), \\ d\Delta_2(t)/dt &= A\Delta_2(t) + B\Delta_1(\mu t) + R[A\Delta_1(\mu t) + f(\mu t)], \\ d\Delta_3(t)/dt &= A\Delta_3(t) + B\Delta_2(\mu t) + R[A\Delta_2(\mu t) + B\Delta_1(\mu^2 t)] \\ &\quad + R^2[A\Delta_1(\mu^2 t) + f(\mu^2 t)], \dots \\ d\Delta_n(t)/dt &= A\Delta_n(t) + B\Delta_{n-1}(\mu t) + R[A\Delta_{n-1}(\mu t) + B\Delta_{n-2}(\mu^2 t)] \\ &\quad + R^2[A\Delta_{n-2}(\mu^2 t) + B\Delta_{n-3}(\mu^3 t)] + \dots + R^{n-1}[A\Delta_1(\mu^{n-1} t) + f(\mu^{n-1} t)] \quad (4.5) \end{aligned}$$

(здесь $R^2 = R \cdot R$, $R^n = R \cdot R^{n-1}$; правые части соотношений (4.5) уже не содержат «нейтральных» членов).

Ввиду того, что $f(t) \in \Pi^{(k+1)}$, ее производные также являются почти периодическими вектор-функциями. Тогда (следуя [9]), дифференцируя обе части последнего соотношения в (4.5) j раз ($1 \leq j \leq k$), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(j+1)}(t) &= A\Delta_n^{(j)}(t) + \mu^j B\Delta_{n-1}^{(j)}(\mu t) + \mu^j R A\Delta_{n-1}^{(j)}(\mu t) \\ &\quad + \mu^{2j} R B\Delta_{n-2}^{(j)}(\mu^2 t) + \mu^{2j} R^2 A\Delta_{n-2}^{(j)}(\mu^2 t) + \dots \\ &\quad + \mu^{(n-1)(j)} R^{n-1} [A\bar{y}^{(j)}(\mu^{n-1} t) + f^{(j)}(\mu^{n-1} t)] = A\Delta_n^{(j)}(t) + f_{n,k}(t). \quad (4.6) \end{aligned}$$

Отметим следующие факты. В правой части соотношения (4.6) члены, содержащие линейные запаздывания, являются почти периодическими вектор-функциями. Следовательно, вектор-функция $f_{n,k}(t)$ почти периодическая. Ввиду неравенства (2.2) справедлива оценка, аналогичная (3.9):

$$\|e^{A(t-s)}\| \leq M e^{-\delta_1(t-s)}, \quad t_0 \leq s < t. \quad (4.7)$$

Наконец, вследствие (2.4) имеем неравенство [7, гл. i]

$$\|R^j\| \leq M_1(\delta_3)^j, \quad M_1 = \text{const}, \quad M_1 > 1. \quad (4.8)$$

Пусть в (4.6) $j = k$. Рассмотрим систему (4.6). Считаем, что члены, содержащие R^i , $i = 1, 2, \dots$, являются «возмущениями». Полагая, что «порожденное» (вектор-функцией $f_{n,k}(t)$) почти периодическое решение соответствующей «невозмущенной» системы имеет вид, аналогичный (4.3), и учитывая оценки (4.7) и (4.8), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \sup_t \|\Delta_n^{(k)}(t)\| &\leq \frac{M\mu^k}{\delta_1} \|B\| \sup_t \|\Delta_{n-1}^{(k)}(t)\| + \frac{MM_1}{\delta_1} \|A\| \delta_3 \mu^k \sup_t \|\Delta_{n-1}^{(k)}(\mu t)\| \\ &\quad + \frac{MM_1}{\delta_1} \|B\| \delta_3 \mu^{2k} \sup_t \|\Delta_{n-2}^{(k)}(\mu^2 t)\| + \frac{MM_1}{\delta_1} \|A\| (\delta_3)^2 \mu^{2k} \sup_t \|\Delta_{n-2}^{(k)}(\mu^2 t)\| + \dots \\ &\quad + \frac{MM_1}{\delta_1} (\delta_3)^{n-1} \mu^{(n-1)k} [\sup_t \|A\| \|\Delta_1^{(k)}(\mu^{n-1} t)\| + \|f^{(k)}(\mu^{n-1} t)\|]. \end{aligned}$$

Полагаем

$$u_j = \mu^{kj} (\delta_3)^j \sup_t \|\Delta_j^{(k)}(\mu^j t)\|,$$

тогда из последнего неравенства получаем весьма грубую оценку

$$u_n < \hat{b}[u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_2 + u_1] + \hat{a}\bar{f}_k.$$

Здесь

$$\hat{b} = \frac{MM_1}{\delta_1\delta_3}\|B\| + \frac{MM_1}{\delta_1}\|A\|, \quad \hat{a} = \frac{MM_1}{\delta_1}, \quad \bar{f}_k = \sup_t \|f^{(k)}(t)\|.$$

Если теперь обозначить $v_{n+1} = \hat{b}[u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1] + \hat{a}\bar{f}_k$, то получим следующую цепь неравенств:

$$v_{n+1} - v_n = \hat{b}u_n \leq \hat{b}v_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда

$$v_{n+1} \leq (1 + \hat{b})v_n \leq (1 + \hat{b})^2v_{n-1} \leq \dots \leq (1 + \hat{b})^{n-1}v_2 = (1 + \hat{b})^{n-1}(\hat{b}u_1 + \hat{a}u'_1).$$

Но тогда

$$u_n \leq (1 + \hat{b})^{n-1}(\hat{b}u_1 + \hat{a}\bar{f}_k),$$

или, возвращаясь к прежним переменным ($\sup_t \|\Delta_j^{(k)}(\mu^j t)\|$), имеем следующую оценку:

$$\sup_t \|\Delta_n^{(k)}(t)\| \leq L_k(q_k)^n [\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|], \quad (4.9)$$

$$L_k = \text{const}, \quad L_k > 1, \quad q_k = \mu^k \delta_3(1 + \hat{b}).$$

Полагаем натуральное число k в (4.9) настолько большим, что справедливо неравенство

$$q_k < 1.$$

Тогда из (4.9) имеем предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t \|\Delta_n^{(k)}(t)\| = 0.$$

Докажем, что такое предельное равенство справедливо и для $\sup_t \|\Delta_n^{(j)}(t)\|$, $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Очевидно,

$$\Delta_{n+1}^{(k-1)}(t) = -\mu^{k-1}A^{-1}B\Delta_n^{(k-1)}(\mu t) + A^{-1}\Delta_{n+1}^{(k)}(t) - \mu^{k-1}A^{-1}R\Delta_{n+1}^{(k)}(\mu t) \quad (4.10)$$

(данное уравнение получается из исходного (4.6), если разрешить его относительно переменной $\Delta_{n+1}^{(k-1)}(t)$). Покажем (считая неоднородностью члены, содержащие величины $\Delta_{n+1}^{(k)}(t)$, $\Delta_{n+1}^{(k)}(\mu t)$), что решение неоднородной разностной системы (4.10) может быть представлено в следующем виде (аналог формулы вариации постоянных [7, гл. i]):

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(k-1)}(t) &= [-\mu^{k-1}A^{-1}B]^n \bar{y}^{(k-1)}(\mu^n t) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} [-\mu^{k-1}A^{-1}B]^{n-1-i} [A^{-1}\Delta_{i+2}^{(k)}(\mu^{n-1-i}t) - \mu^{k-1}A^{-1}R\Delta_{i+1}^{(k)}(\mu^{n-i}t)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В самом деле, из (4.10) последовательно имеем

$$\Delta_2^{(k-1)}(t) = -\mu^{k-1}A^{-1}B\bar{y}^{(k-1)}(\mu t) + A^{-1}[\Delta_2^{(k)}(t) - \mu^{k-1}R\Delta_1^{(k)}(\mu t)],$$

$$\begin{aligned} \Delta_3^{(k-1)}(t) &= -\mu^{k-1}A^{-1}B\Delta_2^{(k-1)}(\mu t) + A^{-1}[\Delta_3^{(k)}(t) - \mu^{k-1}R\Delta_2^{(k)}(\mu t)] \\ &= (-\mu^{k-1}A^{-1}B)^2 \bar{y}^{(k-1)}(\mu^2 t) - \mu^{k-1}A^{-1}BA^{-1}[\Delta_2^{(k)}(t) - \mu^{k-1}R\Delta_1^{(k)}(\mu t)] \end{aligned}$$

$$+ A^{-1} [\Delta_3^{(k)}(t) - \mu^{k-1} R \Delta_2^{(k)}(\mu t)].$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \Delta_4^{(k-1)}(t) &= (-\mu^{k-1} A^{-1} B)^3 \bar{y}(k-1)(\mu^3 t) \\ &\quad - \mu^{k-1} A^{-1} B A^{-1} [\Delta_3^{(k)}(\mu t) - \mu^{k-1} R \Delta_3^{(k)}(\mu t)] \\ &+ (\mu^{k-1} A^{-1} B)^2 A^{-1} [\Delta_2^{(k)}(\mu^2 t) - \mu^{k-1} R \Delta_2^{(k)}(t)] + A^{-1} [\Delta_4^{(k)}(t) - \mu^{k-1} R \Delta_4^{(k)}(\mu t)] \end{aligned}$$

и т. д.

Продолжая подобный процесс, получим для любых $\Delta_{n+1}^{(k-1)}(t)$ формулу (4.11).

Рассмотрим уравнение (4.11). Ввиду оценки (2.3) справедливо неравенство

$$\|(-A^{-1}B)^i\| \leq M_2(\delta_2)^i, \quad M_2 = \text{const}, \quad M_2 > 1. \quad (4.12)$$

Учитывая (4.8) и (4.12), из (4.11) получаем

$$\begin{aligned} \sup_t \|\Delta_n^{(k-1)}(t)\| &\leq M_2(\mu^{k-1}\delta_2)^n \sup_t \|\bar{y}^{(k-1)}(t)\| \\ &+ M_1 M_2 \sum_{i=0}^{n-1} [(\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i} \|A^{-1}\|(q_k + \|R\|)(q_k)^{i+1} [\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|\bar{f}^{(k)}(t)\|]]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Без ограничения общности считаем, что $q_k < \sqrt{\delta_2} = \hat{q}$, что всегда выполнимо при достаточно большом k . Первый член в правой части (4.13) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим поведение оставшихся членов. Очевидно,

$$(\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i}(\delta_2)^{0.5(i+1)} = (\mu^{k-1}\hat{q})^{n-1-i},$$

тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i}(\delta_2)^{0.5(i+1)} &= (\mu^{k-1}\hat{q})^n \left[\frac{1}{\mu^{k-1}\hat{q}} + \frac{1}{(\mu^{k-1}\hat{q})^2} + \dots + \frac{1}{(\mu^{k-1}\hat{q})^n} \right] \\ &= (\mu^{k-1}\hat{q})^n \frac{(\mu^{k-1}\hat{q})^{-n-1} - 1}{(\mu^{k-1}\hat{q})^{-1} - 1} < \frac{(\hat{q})^n}{1 - \mu^{k-1}\hat{q}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M_1 M_2 \sum_{i=0}^{n-1} [(\mu^{k-1}\delta_2)^{n-1-i} \|A^{-1}\|(q_k + \|R\|)(q_k)^{i+1} (\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|\bar{y}^{(k+1)}(t)\|)] \\ < \frac{M_1 M_2 \|A^{-1}\|(q_k + \|R\|)(\hat{q})^n}{1 - \mu^{k-1}\hat{q}} (\sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.13), (4.14) получаем более грубую оценку

$$\begin{aligned} \sup_t \|\Delta_n^{(k-1)}(t)\| &\leq L_{k-1}(\sqrt{\delta_2})^n [\sup_t \|\bar{y}^{(k-1)}(t)\| + \sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|], \\ L_{k-1} &= \text{const}, \quad L_{k-1} > 1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Если рассмотреть уравнение

$$\Delta_{n+1}^{(k-2)}(t) = -\mu^{k-2} A^{-1} B \Delta_n^{(k-2)}(\mu t) + A^{-1} \Delta_{n+1}^{(k-1)}(t) - \mu^{k-2} A^{-1} R \Delta_{n+1}^{(k-1)}(\mu t), \quad (4.16)$$

то, принимая во внимание только что полученную оценку (4.15), методами, аналогичными использованными нами, получим из (4.16) очередное неравенство

$$\begin{aligned} \sup_t \|\Delta_n^{(k-2)}(t)\| &\leq L_{k-2}(\sqrt{\delta_2})^n [\sup_t \|\bar{y}^{(k-2)}(t)\| + \sup_t \|\bar{y}^{(k-1)}(t)\| \\ &\quad + \sup_t \|\bar{y}^{(k)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\|], \quad L_{k-2} = \text{const}, \quad L_{k-2} > 1, \end{aligned} \quad (4.17)$$

и т. д. В итоге приходим к окончательной оценке

$$\begin{aligned} \sup_t \|\Delta_n(t)\| &\leq L_0(\sqrt{\delta_2})^n \left[\sum_{i=1}^k \sup_t \|\bar{y}^{(i)}(t)\| + \sup_t \|f^{(k)}(t)\| \sup_t \|\bar{y}(t)\| \right], \quad (4.18) \\ L_0 &= \text{const}, \quad L_0 > 1, \end{aligned}$$

откуда и вытекает сходимость последовательных приближений.

Как следует из теоремы 1, любое решение неоднородной системы (1.1) ограничено. Известно [1, дополнение], что пределом $\hat{x}(t)$ равномерно сходящейся последовательности почти периодических вектор-функций $\{x_n(t)\}$ является также почти периодическая вектор-функция. Данное решение $\hat{x}(t)$ единственно. Действительно, пусть есть еще одно почти периодическое решение $\hat{x}_1(t)$. Разность этих решений $\bar{\Delta}(t) = \hat{x}(t) - \hat{x}_1(t)$ также почти периодическое решение, удовлетворяющее соответствующему однородному уравнению. Но тогда ввиду неравенств (2.2)–(2.4) для этого решения справедливо предельное равенство [6] $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Delta}(t) = 0$; противоречие. Следовательно, $\bar{\Delta}(t)$ не является почти периодической вектор-функцией и единственным почти периодическим решением является построенное выше методом последовательных приближений решение $\hat{x}(t)$. Оно асимптотически устойчиво, поскольку, представив решение $x(t, \phi(t))$ в виде суммы частного почти периодического решения неоднородной системы (1.1) и решения $x^0(t, \phi(t))$ однородной системы, сведем исследование к анализу асимптотических свойств соответствующей однородной системы [5, гл. ii].

Теорема 2 доказана.

5. Существование почти периодического решения для некоторых систем без нейтральных членов. Рассмотрим неоднородную систему без нейтральных членов:

$$dy(t)/dt = Ay(t) + By(\mu t) + f(t), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (5.1)$$

Предполагаем, что справедлива оценка (2.2) и наряду с этим устойчива (но не асимптотически) разностная система

$$y_{n+1} = -A^{-1}By_n. \quad (5.2)$$

Условия устойчивости разностной системы (5.2) приведены, например, в [7, гл. i].

Рассмотрим достаточные условия существования почти периодического решения у системы (5.1) в этом случае. Вначале докажем одну лемму для оценки решения соответствующей однородной системы.

Лемма. При выполнении условий, налагаемых на собственные числа λ (оценка (2.2)), решение однородной системы

$$d\hat{y}(t)/dt = A\hat{y}(t) + B\hat{y}(\mu t), \quad (5.3)$$

определенное кусочно непрерывной начальной вектор-функцией $\phi(s)$, устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем обе части системы (5.3). Получаем систему вида

$$d\hat{y}'(t)/dt = A\hat{y}'(t) + \mu B\hat{y}'(\mu t), \quad t > \frac{t_0}{\mu}; \quad \hat{y}'(t) = d\hat{y}(t)/dt. \quad (5.4)$$

Известно [5, гл. ii], что при $t > \frac{t_0}{\mu}$ решение системы (5.4) существует. Очевидно, что собственные значения ρ_μ «вырожденной» матрицы $-\mu A^{-1}B$ меньше единицы по модулю. В [10] методами, несколько отличающимися от использованных нами при доказательстве оценки (4.18) (с учетом (3.3)), доказано неравенство

$$\|\hat{y}'(t)\| \leq \widehat{M}_1 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\beta} \sup_{\mu t_0 \leq s \leq \mu^{-1}t_0} \|y(s)\|, \quad (5.5)$$

$$\widehat{M}_1 = \text{const}, \quad \widehat{M}_1 > 1, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > 0.$$

Рассмотрим поведение решения системы (5.3), учитывая оценку (5.5).

Из равенства (5.3) имеем неоднородное разностное уравнение

$$\hat{y}(t) = -A^{-1}B\hat{y}(\mu t) + A^{-1}\hat{y}'(t). \quad (5.6)$$

Считая величину $\hat{y}'(t)$ неоднородностью, запишем решение системы (5.6), используя аналог формулы вариации постоянных:

$$\hat{y}(t) = (-A^{-1}B)^n \hat{y}(\mu^n t) - \sum_{j=0}^{n-1} (-A^{-1}B)^j A^{-1} \hat{y}'(\mu^j t), \quad t \in (t_0 \mu^{1-n}, t_0 \mu^{-n}]. \quad (5.7)$$

Ввиду того, что разностная система (5.2) устойчива, для любого $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство [7, гл. i]

$$\|(-A^{-1}B)^n\| \leq \widehat{M}, \quad \widehat{M} = \text{const}, \quad \widehat{M} > 1,$$

тогда из (5.3), (5.7) имеем оценку

$$\hat{y}_n \leq \widehat{M} y_0 + \|A^{-1}\| \widehat{M} \sum_{j=0}^{n-1} y'_j < \widehat{M} \widehat{M}_1 \left[\frac{\|A^{-1}\| + \|A\| + \|B\|}{q(1-q)} \right] \sup_t \|y_0\|,$$

$$\hat{y}_n = \sup_{t \in (\mu^{1-n}t_0, \mu^{-n}t_0]} \|\hat{y}(t)\|, \quad y'_j = \sup_{t \in (\mu^{1-j}t_0, \mu^{-j}t_0]} \|y'(t)\|, \quad q = \mu^\beta, \quad 0 < q < 1. \quad (5.8)$$

Из (5.8) следует устойчивость системы (5.3). Лемма доказана.

Рассмотрим проблему существования почти периодического решения у системы (5.1). Ввиду того, что разностная система устойчива, но не асимптотически, строить почти периодическое решение методами, изложенными выше, не представляется возможным. Однако существует почти периодическое решение $\bar{y}'(t)$ системы (5.4).

Теорема 3. При ограниченности величины $\left\| \int_{t_0}^t \bar{y}'(s) ds \right\|$ система (5.1) допускает почти периодическое решение $\bar{y}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку собственные числа λ матрицы A удовлетворяют оценке (2.2), а собственные числа ρ_μ матрицы $-\mu A^{-1}B$ — оценке (2.3),

строим почти периодическое решение системы (5.4) $\bar{y}'(t)$. Ввиду того, что $\left\| \int_{t_0}^t \bar{y}'(s) ds \right\|$ ограничен, величина $\int_{t_0}^t \bar{y}'(s) ds$ является почти периодической вектор-функцией [1, дополнение], следовательно, система (5.1) допускает почти периодическое решение, которое является устойчивым, но не асимптотически.

Теорема доказана.

Следует заметить, что при этом данное почти периодическое решение может оказаться и не единственным. В самом деле, пусть $B = -A$. Тогда любое выражение $\bar{y}(t) + \bar{h}$ ($\bar{h}$ — постоянный вектор размерности m) является почти периодическим решением системы (5.8).

Отметим, что автор продолжает исследования систем, начатые ранее в [6, 11, 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. Fox L., Mayers D. F., Ockendon J. R., Tayler A. B. On functional differential equation // Inst. Math. Appl. 1972. V. 8. P. 271–307.
4. Ockendon J., Tayler A. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 322. P. 447–468.
5. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
6. Гребенщиков Б. Г. Об устойчивости стационарных систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием, линейно зависящим от времени // Изв. вузов. Математика. 1991. № 7. С. 69–71.
7. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
8. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
9. Kato T., McLeod J. B. The functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ and generalisation // Lect. Notes Math. 1972. V. 280. P. 308–313.
10. Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И. Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 5. С. 751–758.
11. Гребенщиков Б. Г. Построение почти периодических решений для одной системы с линейным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 786–795.
12. Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И. Почти периодические решения одной квазилинейной системы с линейным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 768–773.

Поступила в редакцию 4 июля 2018 г.

После доработки 30 августа 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Гребенщиков Борис Георгиевич
Уральский федеральный университет,
кафедра прикладной математики энергетического института,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
b.g.grebenshchikov@urfu.ru