M. V. Zubkov, I. Sh. Kalimullin, A. G. Mel'nikov, A. N. Frolov, Punctual copies of algebraic structures, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1271–1285

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.607>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.135.184

April 26, 2023, 09:05:14

УДК 510.5

ПУНКТУАЛЬНЫЕ КОПИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

М. В. Зубков, И. Ш. Калимуллин,
А. Г. Мельников, А. Н. Фролов

Аннотация. Оценивается сложность построения пунктуальной «онлайн» копии алгебраической структуры. Установлены общая верхняя оценка, а также оптимальные оценки для классов булевых алгебр, абелевых p -групп и линейных порядков. Кроме того, развитые здесь методы применяются для решения открытой проблемы Монталбана (2013) о копируемых линейных порядках.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.607

Ключевые слова: примитивная рекурсия, вычислимые структуры, онлайн теория моделей.

1. Введение

Работа является частью программы исследований [1–4], основная задача которой — систематическое изучение алгоритмов с ограниченным поиском в алгебраическом контексте. Несмотря на то, что Цензер и Реммел [5–7] применяли алгоритмы с ограниченным поиском и ранее в качестве технического средства изучения полиномиальных структур, как независимая теория данная тематика начала свое развитие с работы И. Ш. Калимуллина, А. Г. Мельникова и К. М. Нг [1]. Отметим также, что П. Е. Алаев недавно и независимо начал систематическое исследование алгоритмов с ограниченным поиском [8–10].

Основная идея этого подхода может быть описана неформально следующим образом. Многие алгоритмы на алгебраических структурах, описанные в литературе [11–13], существенным образом опираются на оператор неограниченного поиска. Однако нетрудно заметить, что в любом эффективном алгоритме (например, полиномиальном) оператор поиска и все циклы можно ограничить. Возникает естественный вопрос: можно ли, основываясь на известных неограниченных алгоритмах, предъявить алгоритмическое решение с ограниченным поиском?

Замечателен тот факт, что зачастую построение решения с ограниченным поиском, или *примитивно рекурсивного* решения, достаточно, чтобы обойти наиболее существенные препятствия на пути к решению эффективному. Например, известно, что всякий общерекурсивный линейный порядок изоморфен

М. В. Зубков поддержан грантом РНФ № 18–11–00028. И. Ш. Калимуллин поддержан Министерством науки и высшего образования РФ (проект № 1.451.2016/1.4). А. Г. Мельников поддержан грантом Marsden Fund of New Zealand. А. Н. Фролов поддержан грантом Президента РФ МД-2721.2019.1.

полиномиально-вычислимому линейному порядку [14]. Как замечено в [1], доказательство Григорьева описывает построение порядка примитивно рекурсивного, т. е. Григорьев концентрируется на элиминации бесконечных поисков и условных неограниченных циклов; полиномиальность полученного представления — это не более чем наблюдение. С другой стороны, чтобы доказать, что полиномиального представления нет, нередко легче доказать, что нет представления примитивно рекурсивного [1, 7]. Основываясь на накопленном опыте, И. Ш. Калимуллин, А. Г. Мельников и К. М. Нг [1] кроме всего прочего предложили систематически изучать проблему примитивно рекурсивной представимости алгебраических структур в естественных классах. Основное понятие здесь — *вовне примитивно рекурсивная структура* [1], или *пунктуально вычисляемая структура* [4], которая определяется следующим образом. Говорят, что бесконечная счетная структура *пунктуально вычислима* (punctually computable), если ее носитель — это множество всех натуральных чисел, а все операции и предикаты примитивно рекурсивны. Язык структуры обычно конечен, бесконечные языки, как правило, не рассматриваются. Отметим, что выбор множества всех натуральных чисел как носителя неравносителен предположению, что носитель — примитивно рекурсивное подмножество натуральных чисел [1]. (Как было замечено П. Е. Алаевым [10], если структура не локально конечна, то из примитивно рекурсивной представимости над подмножеством следует пунктуальная представимость.)

Напомним, что если в определении требовать лишь общерекурсивности (вычислимости по Тьюрингу) операций и предикатов, то получим классическое понятие вычислимой (конструктивной) структуры, восходящее к А. И. Мальцеву [15] и Рабину [16]. Какие вычисляемые структуры имеют пунктуальные представления? Недавно в [3] было доказано, что индексное множество пунктуально представимых структур Σ_1^1 -полно, а значит, общего универсального рецепта здесь нет и быть не может. Однако есть надежда получить позитивные удовлетворительные результаты в достаточно широких естественных классах. Например, всякая вычисляемая булева алгебра имеет пунктуальную копию; аналогична ситуация и для абелевых p -групп, а также некоторых других классов структур [1, 17]. Однако все известные доказательства подобного рода неравномерны в следующем смысле. Они разбиваются на несколько подслучаев в зависимости от типа изоморфизма данной структуры. В каждом из таких случаев построение пунктуальной копии опирается на некоторую специфическую стратегию, которая существенно использует свойство структуры в данном конкретном случае. Например, если абелева p -группа имеет бесконечный цоколь, то построение использует бесконечность цоколя [1]. Если цокль конечен, то имеется полный список всех таких p -групп, каждая из которых имеет пунктуальное представление. В булевых алгебрах спрашивается, есть ли безатомный элемент [1]. В линейных порядках рассматривается четыре случая (поясним позднее).

Еще в ранних работах Цензора и Реммеля [18] затрагивался вопрос сложности изоморфизма вычислимой структуры на ее полиномиальную (в нашей теории, пунктуальную) копию, если таковая копия есть. В данной работе также изучен этот вопрос на естественных классах и получены оптимальные оценки; доказано также, что общей гиперарифметической верхней грани на сложность изоморфизма нет (теорема 4). Оба подхода — через равномерность и через сложность изоморфизма — предлагают некоторую меру сложности построения

пунктуальной копии по данной вычислимой структуре, даже если известно, что такое представление есть. Ниже увидим, что, несмотря на техническое родство, подходы в известной степени независимые.

Перейдем к изложению результатов статьи. Как отмечалось выше, в теореме 4 будет доказано, что верхней гиперарифметической оценки на сложность изоморфизма нет, а основной результат из [3] влечет, что гиперарифметической оценки для равномерности по индексам также не существует. Первые два результата ниже показывают «ортогональность» подходов через изоморфизм и через индексы.

Теорема 1. (1) Существует равномерная процедура, которая по индексу вычислимой булевой алгебры с бесконечным числом атомов выдает индекс ее пунктуальной копии.

(2) Всякая вычислимая булева алгебра $0''$ -изоморфна пунктуальной, причем $0''$ — оценка оптимальная¹⁾.

Теорема 2. (1) Существует $0''$ -равномерная процедура, которая по индексу вычислимой бесконечной абелевой r -группы выдает индекс ее пунктуальной копии, причем $0''$ — оценка оптимальная.

(2) Всякая бесконечная вычислимая абелева r -группа вычислимо изоморфна пунктуальной.

Доказательство теоремы 2 не составляет большого труда, однако может потребовать некоторого опыта работы с такими группами. Комбинаторная сложность доказательства теоремы 1 несколько выше. Вопрос получения точной оценки для индексов произвольных булевых алгебр оставим открытым.

Несколько другая ситуация оказалась с бесконечными линейными порядками. Здесь уже ни изоморфизм, ни равномерность не будут вычислимыми. Как отмечалось ранее, доказательство Григорьева [14] рассматривает четыре случая, причем грубая оценка сверху дает $0^{(4)}$ для равномерности построения, но эту оценку удалось улучшить и доказать ее оптимальность.

Теорема 3. (1) Существует $0^{(3)}$ -равномерная процедура, которая по индексу вычислимого линейного порядка выдает индекс его пунктуальной копии, причем $0^{(3)}$ — оценка оптимальная.

(2) Всякий бесконечный вычислимый линейный порядок $0''$ -изоморфен пунктуальному, причем $0''$ — оценка оптимальная.

Отметим, что в доказательстве оптимальности $0^{(3)}$ в п. (1) теоремы удалось избежать использования метода $0^{(3)}$ -приоритета; однако на ранних стадиях анализа его использование казалось совершенно неизбежным.

Особо отметим неожиданную связь полученных результатов с изучением копируемых и диагонализующих классов счетных алгебраических структур, предпринятым Монталбаном в [19]. В связи с изучением низких представлений алгебраических структур Монталбан в этой работе ввел теоретико-игровые понятия копируемости и диагонализующести. Неформально класс структур диагонализуем, если по всякому данному представителю класса можно равномерно построить структуру из этого класса, ей не изоморфную; в противном случае класс называется копируемым. Процесс копирования-диагонализации Монталбан представляет в виде бесконечной игры двух игроков; формальные

¹⁾Оптимальность в п. (2) теоремы 1 достигается в классе алгебр с бесконечным числом атомов.

определения можно найти в [19]. Если игрокам позволяет использовать n скачков, то получим понятия n -диагонализированного и n -копируемого класса. Монталбан доказал, что линейные порядки 4-копируемы и 2-диагонализированы [19, леммы 7.2, 7.4], а также отметил, что неизвестно, являются ли линейные порядки 3-копируемыми или 3-диагонализированными.

Из доказательства п. (1) теоремы 3 следует, что линейные порядки 3-копируемы²⁾. Тем самым полученный результат решает проблему Монталбана, причем в сильном смысле: копирование примитивно рекурсивно. Кроме того, оказалось, что доказательство точности оценки в п. (1) теоремы 3 технически схоже с доказательством 2-диагонализированности линейных порядков в [19]. Оба доказательства опираются на стратегию Джокуша — Соара [20]. Однако [19] содержит лишь набросок доказательства; кроме того, между нашей тематикой и изучением диагонализированных классов все-таки имеются существенные отличия. Поэтому мы приведем полное доказательство, но уже в терминах пунктуальных представлений. Адаптация теоремы 1 влечет, что булевы алгебры с бесконечным числом атомов копируемы, а доказательство теоремы 2 показывает, что абелевы p -группы 2-копируемы и 1-диагонализированы. Кроме того, адаптация доказательства теоремы 4 приводит к построению ∞ -копируемого класса, являющегося α -диагонализированным для каждого вычислимого ординала α . Насколько нам известно, все эти результаты новые.

Нам неизвестно, можно ли установить некоторые формальные связи между нашей программой исследований субрекурсивных структур и теорией Монталбана [19]. Например, можно ли найти достаточно широкое условие на класс, при котором копируемость влечет существование пунктуальной копии? Оставим этот и подобные вопросы открытыми для будущих исследований.

2. Булевы алгебры

2.1. Доказательство п. (1) теоремы 1. ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Будем строить пунктуальное представление $\mathcal{P}$ булевой алгебры $\mathcal{B}$ и также попытаемся построить Δ_2^0 -отображение

$$\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}.$$

Ослабим определение изоморфизма и допустим, чтобы ψ -прообраз атома $\mathcal{B}$ мог быть суммой конечного числа атомов в $\mathcal{P}$. Известно, что любые две булевы алгебры с бесконечным числом атомов, изоморфные в таком слабом смысле, изоморфны также и в обычном смысле [21]. На каждом шаге будем работать с аппроксимацией ϕ отображения ψ и будем полагать, что $\psi = \lim_s \phi[s]$ — частичное Δ_2^0 -отображение. Такое отображение расходится на безатомных элементах; изоморфизм на безатомных идеалах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{P}$ будет строиться внешним образом без помощи отображения ψ .

Строим $\mathcal{P}$ следующим образом. Будем заменять один элемент из $\mathcal{B}$ множеством элементов, пока ждем роста $\mathcal{B}$. Как только $\mathcal{B}$ снова выросла, пытаемся найти стабильный ψ -образ для лишних элементов, которые добавили в $\mathcal{P}$; образ должен быть атомом. Можно не найти подходящего атома. Чтобы избежать данный плохой сценарий, расщепляем каждый лишний элемент на два каждый раз, когда меняем его образ в $\mathcal{B}$. Если этот процесс повторяется бесконечное число раз, то $\mathcal{B}$ имеет безатомный элемент в идеале, контролируемом

²⁾ Данное утверждение получено независимо Харрисоном и Трейнером (не опубликовано).

стратегией. Но тогда лишние элементы войдут в соответствующую безатомную часть $\mathcal{P}$.

ФОРМАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что в эффективном перечислении $(\mathcal{B}_s)_{s \in \omega}$ булевой алгебры $\mathcal{B}$ либо ровно один атом в $\mathcal{B}_{s-1}$ расщепляется в $\mathcal{B}_s$ на два атома, либо $\mathcal{B}_{s-1} = \mathcal{B}_s$. Если c — атом в $\mathcal{B}_{s-1}$, который расщепляется в $\mathcal{B}_s$, то говорим, что c *s-расщепляется*, а также назовем s *расщепляющим шагом* для c , или просто *расщепляющим шагом*, если знание c не нужно. Будет удобно использовать в.п. бинарное порождающее дерево [22] вместо $\mathcal{B}$ самой по себе.

СТРАТЕГИЯ КОПИРОВАНИЯ. Предположим, что элемент $x \in \mathcal{B}$ *s-расщепляется*. Пусть

$$x = x_1 \oplus x_2.$$

Тогда выбираем $y \in \mathcal{P}$ так, чтобы $\phi(y) = x$ и y не был в любой *очереди* (будет определено позднее), и расщепляем y на (непересекающуюся) сумму y_1 и y_2 . Откладываем определение ϕ на y_1 и y_2 . На каждом шаге $t > s$, который не является расщепляющим ни для какого элемента, образуем больше атомов под y дальнейшим расщеплением y_1 и y_2 . Продолжаем расщепление до тех пор, пока следующий расщепляющий шаг s' не будет найден. В зависимости от того, где произошло новое расщепление — в (x) или в его дополнении, на шаге s' алгебра (x) имеет $k = 3$ или $k = 2$ атомов соответственно. Тогда выберем любые k атомов в (y) и отобразим их в k атомов в (x) под действием ϕ , но не определяем ϕ на оставшихся атомах $z_0, \dots, z_n$ в (y) . Эти оставшиеся атомы (если они есть) теперь образуют *очередь x-последователей*, которой будет присвоена собственная *стратегия построения изоморфизма* (будет описана ниже), задачей которой будет найти стабильное определение ϕ на этих оставшихся атомах, если это возможно.

СТРАТЕГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА. Каждая стратегия ассоциирована со своей очередью $z_0, z_1, \dots, z_n$ *x-последователей*. Стратегия выбирает наименьший (относительно естественного уровня-за-уровнем численного индексирования в дереве $\mathcal{B}$) элемент a под x , который в настоящий момент выглядит как атом, т. е. является атомом в $\mathcal{B}_s$. Назовем a *свидетелем стратегии*. Когда такой a найден, определяем $\phi(z_i) = a$ для всех $i \leq n$. На остальных генераторах ниже y (где y такой же, как в базовой стратегии копирования, описанной выше) положим ϕ равным изоморфизму $(y - \bigoplus_{i \leq n} z_i)$ на (x) . (Здесь $u - v$ означает дополнение $v \wedge u$ в (u) .)

СТРАТЕГИЯ УПЛОТНЕНИЯ. Каждая стратегия ассоциирована со своей очередью $z_0, z_1, \dots, z_n$ *x-последователей*. Стратегия расщепляет каждый атом (из своей очереди) на два новых атома каждый раз, когда стратегия построения изоморфизма выбирает новый ϕ -образ для очереди.

ПРИОРИТЕТНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ. Стратегии копирования не будут иметь приоритета и не могут быть инициализированы. Назначаем каждой стратегии построения изоморфизма определенный приоритет в конструкции; этот приоритет зависит от этапа, на котором была введена соответствующая очередь (чем раньше она была сформирована, тем выше ее приоритет). Стратегия построения изоморфизма может быть инициализирована и может изменить свою очередь (см. ниже).

Стратегия уплотнения также может быть инициализирована в том смысле, что она будет «убита», если ее соответствующая очередь переопределена.

ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ И МОДИФИКАЦИЯ ОЧЕРЕДИ. Как отмечено выше, только стратегия построения изоморфизма может быть инициализирована. Предположим, что есть две стратегии построения изоморфизма I' и I , очереди которых следуют за x' и x соответственно, где x' расположен под x . Как увидим ниже, I' должна иметь более низкий приоритет, чем I . Если I обнаруживает, что ее свидетель не является атомом, инициализируем I' и объединяем ее очередь с очередью I . Это выполняется до того, как I выбирает нового свидетеля. Инициализированная стратегия никогда не начинает работу снова. То же самое делаем для стратегии уплотнения, естественно ассоциированной с I' .

КОНСТРУКЦИЯ. На каждом расщепляющем шаге позволяем стратегии построения изоморфизма переопределять ϕ , если это необходимо. Как объяснено выше, если стратегия построения изоморфизма I , очередь которой следует за x , вынуждена изменить ее свидетеля, то сначала инициализируем все стратегии с более низкими приоритетами, работающие ниже x , расщепляем каждый атом на два в очереди (согласно стратегии уплотнения) и только тогда позволяем стратегии I действовать. Разрешаем стратегии копирования действовать в соответствии с ее инструкциями между расщепляющими шагами.

ВЕРИФИКАЦИЯ. Предположим, что стратегия I действовала несколько раз. Может существовать только конечное число других стратегий построения изоморфизма $I', I'', \dots$, очереди которых следуют за элементами $x', x'', \dots$, расположенными ниже x . Если текущий свидетель I расщепляется, то стратегии $I', I'', \dots$ инициализируются и все их очереди добавляются к очереди I . После этого каждый атом в новой очереди расщепляется. Очередь I будет аккумулировать все лишние атомы, которые добавили ниже y , по сравнению с x . Следовательно, стратегия может корректно определить $\phi(z_j) = a$ для всех $j \leq m$, где a — новый свидетель и $z_1, \dots, z_m$ — новые атомы, и затем определить ϕ как изоморфизм $(y - \bigoplus_{i \leq m} z_i)$ на (x) .

Работая с вершины дерева вниз, анализируем поведение ϕ по индукции. Если отображение $\phi(y) = x$ уже стабилизировалось и (x) содержит атом a , который еще не был использован стратегиями с более высоким приоритетом, то стратегия, следующая за x , никогда не вынудит изменений ϕ в $(y - a)$. С другой стороны, если не существует такого a ниже x , то стратегия, следующая за x , будет инициализироваться раз за разом. Это возможно, только если (x) безатомна. В этом случае каждый атом в очереди стратегии также будет расщепляться снова и снова и, следовательно, идеал (y) также будет построен безатомным. Определим $\psi(y)$ как $\lim_s \phi(y)[s]$, если предел определен. Иначе определим ψ , используя любой алгебраический изоморфизм между соответствующим безатомным элементом в $\mathcal{B}$ и в $\mathcal{P}$. Как упомянуто выше, старый результат Реммеля [21] влечет, что $\mathcal{P} \cong \mathcal{B}$. Легко видеть, что $\mathcal{P}$ пунктуальна. $\square$

2.2. Доказательство п. (2) теоремы 1. Сначала установим верхнюю границу. Заметим, что доказательство, содержащееся в [1], и доказательство теоремы 1(1) оба дают наивную верхнюю оценку Δ_4^0 , так как при переходе от почти изоморфизма к изоморфизму в атомной булевой алгебре может потребоваться два дополнительных скачка в общем случае, что дает верхнюю оценку $0'''$ для ψ в обозначениях теоремы 1(1).

Однако более тщательный анализ случаев позволяет установить точную верхнюю границу Δ_3^0 следующим образом. Если $\mathcal{B}$ имеет безатомный элемент, то изоморфизм на пунктуальном представлении может быть сделан вычисли-

мым. Просто продолжаем строить безатомный идеал, ожидая новых элементов в $\mathcal{B}$. Аналогично если некоторый элемент 1-атомный, т. е. его главный идеал изоморфен алгебре интервалов ω , то $\mathcal{P}$ можно сделать $0''$ -изоморфным $\mathcal{B}$. Для этого вычислимо копируем $\mathcal{B}$ всюду, кроме 1-атома, тогда как идеал, порожденный фиксированным 1-атомом, сопоставляется с соответствующим быстро аппроксимированным идеалом в $\mathcal{P}$ с помощью $0''$ (здесь, конечно, хватило бы и $0'$).

Поэтому можно с уверенностью предположить, что $\mathcal{B}$ бесконечна, атомна, но не имеет 1-атомов. Эквивалентно любой бесконечный идеал $\mathcal{B}$ можно разбить на атом и два бесконечных подыдеала. Каждая такая алгебра изоморфна $\text{Int}(\eta \cdot 2)$ члнчным построением. Кроме того, изоморфизм можно построить $0''$ -вычислимо. Все, что нужно для этого знать, порождает ли элемент бесконечный идеал, а если идеал конечен, то должны иметь возможность находить все атомы под элементом. Очевидно, что $0''$ способен отвечать на подобные вопросы. Мак-Кой [23], возможно, первым тщательно проверил и опубликовал этот факт, но авторы подозревают, что это наблюдение было известно задолго до этого. Остается заметить, что $\text{Int}(\eta \cdot 2)$ имеет пунктуальное представление. Это дает п. (1) теоремы.

Остальная часть доказательства посвящена оптимальности оценки $0''$. Будем строить «плохую» вычислимую $\mathcal{B}$, которая не Δ_2^0 -изоморфна любой пунктуальной булевой алгебре. Эффективно перечисляем все потенциальные аппроксимации частичных Δ_2^0 -отображений. Объясним, как диагонализировать против $\phi = \lim_s \psi[s]$, включая возможность, когда $(\psi(x)[s])_s$ расходится для некоторого x . Без ограничения общности последовательность $(\psi(x)[s])_{x,s}$ может быть выбрана равномерно примитивно рекурсивной.

СТРАТЕГИЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИИ ПРОТИВ $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$.

- Вычислить $\psi(x)[s]$ и $\psi(\bar{x})[s]$.
- Подождем, пока значение $\psi(x)[s]$ или $\psi(\bar{x})[s]$ будет больше, чем текущий размер $\mathcal{B}$. Если вместо этого обнаружим, что $\psi(x)[s] \vee \psi(\bar{x})[s] \neq 1_{\mathcal{P}}$, то ничего не делаем.
- Без ограничения общности $\psi(x)[s]$ содержит больше элементов, чем поместили в $\mathcal{B}$ до сих пор. Тогда объявим (x) конечным в $\mathcal{B}$ и ограничим его рост.
- Если ψ изменяется на x , то уберем ограничение и перезапустим стратегию.

В общей конструкции стратегии будут помещены на дерево стратегий, которое будет иметь вид $\{inf, win\}^\omega$. Здесь inf соответствует случаю, когда аппроксимация продолжает меняться, в то время как win является финальной выигрышной совокупностью всех остальных возможных сценариев. Будет также глобальная стратегия, которая на каждом этапе разбивает каждый не ограниченный никакими стратегиями элемент $\mathcal{B}$. Глобальная стратегия не будет помещена на дерево.

Конструкция представляет собой стандартную Π_2^0 -конструкцию на дереве со стандартными понятиями инициализации и истинного пути. Отметим только, что стратегии должны выбирать своих свидетелей с достаточно большими свежими индексами так, что на каждом этапе хотя бы один элемент булевой алгебры не ограничен. (В противном случае можно в конечном итоге построить конечную булеву алгебру.) Элементарные детали предоставим читателю.

3. Абелевы p -группы

3.1. Доказательство п. (2) теоремы 2. Из [1] следует, что всякая бесконечная редуцированная абелева p -группа вычислимо изоморфна пунктуальной. Анализ случаев, содержащийся в [1], иллюстрирует, что необходимо рассмотреть два основных случая.

В первом случае цокль группы бесконечен. Тогда независимо от того, редуцирована она или нет, процедура остается равномерной и изоморфизм вычислимый. (Напомним, что цокль представляет собой совокупность всех элементов, имеющих порядок p . Он образует подгруппу и может рассматриваться как векторное пространство над конечным полем Z_p . Идея состоит в том, что цокль группы должен быть бесконечным, и, таким образом, можно построить его очень быстро, медленно сопоставляя его с цоклем данной копии. Подробнее см. [1].)

Во втором случае, когда цокль конечен, имеем дело с прямой суммой конечного числа циклических и квазициклических групп. Каждая такая группа вычислимо категорична [24] и имеет пунктуальную копию. Таким образом, по крайней мере изоморфизм остается и в этом случае вычислимым.

3.2. Доказательство п. (1) теоремы 2. Покажем, что различие между двумя существенными случаями, описанными в п. (2) теоремы 2, требует не более двух скачков. Действительно, все, что нужно знать, является ли вычислимая подгруппа элементов с порядком p бесконечной, т. е. Π_2^0 -утверждение. Во втором случае переход к пунктуальному представлению требует неравномерной информации о числе и размере конечных классов; это требует вопрос к $0''$. Можно заключить, что $0''$ может найти индекс примитивно-рекурсивного представления, выбирая подходящий индекс из бесконечного числа попыток: одна попытка построения предполагает, что цокль бесконечен, а остальные — бесконечно много вариантов типа изоморфизма с конечными цоклями.

Остается доказать, что верна

Лемма 1. *Не существует Δ_2^0 -процедуры, которая переходит от вычислимых индексов абелевых p -групп к индексам их пунктуальных копий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый потенциальный частичный изоморфизм $\psi = \lim_s \phi[s]$ (где предел может и не сходиться) будет равномерно сопоставлен с вычислимой абелевой группой A , индекс которой можно считать известным заранее по теореме рекурсии. Обещаем, что A будет бесконечной вычислимой абелевой группой типа Ульма 1, т. е. прямой суммой циклических и квазициклических элементарных слагаемых.

Пусть P_i — универсальная нумерация всех пунктуальных структур с конечной сигнатурой. Без ограничения общности последовательность $(\phi(x)[s])_{x,s}$ можно выбрать равномерно примитивно рекурсивной. Строим A с индексом e и контролируем $P_{\phi(e)[s]}$. Если $\phi(e)[s] \neq \phi(e)[s-1]$, то откладываем определение A до тех пор, пока один из двух случаев, описанных ниже, не реализуется в P_e .

(1) Цокль $P_{\phi(e)[s]}$ больше, чем текущий цокль A .

(2) Существует элемент $P_{\phi(e)[s]}$ такой, что его p -высота больше p -высоты любого элемента, который в настоящее время имеется в A .

Если (2) не выполняется, то группа содержит только элементы ограниченного порядка. Тогда он должен расщепляться на бесконечное число конечных

циклических слагаемых и, следовательно, его цоколь должен быть бесконечным. Таким образом, один из двух случаев будет подтвержден за конечное время.

Если выполнен случай (1), то сохраняем цоколь A конечным и продолжаем строить A , введя больше элементов b со свойством $pb \in A$. В противном случае, если выполнено (2), будем держать p -высоту A конечной, добавляя только свежие Z_p -независимые элементы конечного порядка в A .

Доказательство можно организовать так, что при любом исходе получим группу A типа 1, но это не имеет никакой ценности для верификации. Достаточно лишь заметить, что существование элементов данной p -высоты и размерность цоколя — это инварианты произвольной абелевой p -группы вне зависимости от ее типа. Тогда по построению либо процедура не определена на индексе (т. е. предел расходится), либо полученная группа не изоморфна пунктуальной копии, индекс которой равен финальному значению аппроксимируемой процедуры. $\square$

4. Линейные порядки

4.1. Доказательство оценки в п. (1) теоремы 3. В доказательстве теоремы Григорьева рассматривается четыре случая (неравномерно), что приводит к оценке изоморфизма $\mathcal{O}^{(4)}$. А именно, рассмотрены случаи, когда линейный порядок (1) имеет левую предельную точку, (2) имеет правую предельную точку (случаи (1) и (2) включают также *виртуальные* точки $-\infty$ и $+\infty$), (3) имеет интервал вида $\omega + \omega^*$, (4) равен $\omega + \zeta \cdot \eta + \omega^*$.

Существование предельной точки (и левой, и правой) можно равномерно определить относительно оракула $\mathcal{O}'''$. При положительном ответе рассматриваются случаи (1) и (2), которые тривиальны. Таким образом, осталось показать (это объединяет случаи (3) и (4)), что по любому бесконечному вычислимому линейному порядку $\mathcal{L}$ без предельных точек с наименьшим и наибольшим элементами можно равномерно построить $\mathcal{P} \cong \mathcal{L}$.

Будем строить $\mathcal{P}$, одновременно определяя вложение φ из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{P}$. Будем считать, что в $\mathcal{L}$ есть *виртуальные* элементы $-\infty$ и $+\infty$ (т. е. положим по одному элементу левее и правее всех *реальных* элементов соответственно). Положим сразу в $\mathcal{P}$ два элемента 0 и 1 и объявим $\varphi(-\infty) = 0$ и $\varphi(+\infty) = 1$. Стартуем быстрое построение $\mathcal{P}$: будем класть элементы друг за другом в порядке возрастания между 0 и 1.

Пусть определено $\mathcal{L}_s$ и φ . В тот момент, когда вычисляется новый элемент $x \in \mathcal{L}_{s+1} - \mathcal{L}_s$, находим $y <_{\mathcal{L}} z$ — ближайшие к нему элементы в $\mathcal{L}_s$, т. е. такие, что $y <_{\mathcal{L}} x <_{\mathcal{L}} z$. Если между $\varphi(y)$ и $\varphi(z)$ уже имеются элементы в $\mathcal{P}$, то выберем среди них самый маленький t как натуральное число. Если между ними элементов вообще нет, то положим в $\mathcal{P}$ первое неиспользованное число t между $\varphi(y)$ и $\varphi(z)$. В обоих случаях определим $\varphi(x) = t$. С этого момента быстрое построение $\mathcal{P}$ стартует с элемента t так же, как и выше: кладем элементы друг за другом между t и $\varphi(z)$.

Ясно, что линейные порядки $\mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$, а также φ удовлетворяют следующим условиям:

- (а) φ является вложением из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{P}$,
- (б) если $x \notin \varphi(\mathcal{L})$, то существуют такие $y, z \in \mathcal{L} \cup \{-\infty, +\infty\}$, что y и z соседние в $\mathcal{L} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\varphi(y) <_{\mathcal{P}} x <_{\mathcal{P}} \varphi(z)$,

с) для любых y и z , соседних в $\mathcal{L} \cup \{-\infty, +\infty\}$, выполнено $\{x \mid \varphi(y) <_{\mathcal{P}} x <_{\mathcal{P}} \varphi(z)\} < \infty$.

Теперь, так как $\mathcal{L}$ не имеет предельных точек и содержит наименьший и наибольший элементы, из (а), (b) и (с) непосредственно следует, что $\mathcal{L} \cong \mathcal{P}$ (подробный анализ, почему из (а), (b) и (с) следует изоморфизм, а также анализ сложности изоморфизма, можно найти в [25]).

4.2. Доказательство оптимальности оценки в п. (1) теоремы 3.

Напомним, что P_i — универсальная нумерация всех пунктуальных структур с конечной сигнатурой. Необходимо показать, что не существует $\mathcal{O}''$ -вычислимой функции ψ такой, что $\mathcal{L}_e \cong \mathcal{P}_{\psi(e)}$ для всех e . Предположим, что такая ψ существует. Тогда существует $\mathcal{O}'$ -вычислимая аппроксимация ψ' такая, что $\psi(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \psi'(x, s)$ и $\psi'(x, s) \leq \psi'(x, s+1)$. В самом деле, если $\psi'(x, s+1) < \psi'(x, s)$, то можно эффективно найти $e' > \psi'(x, s)$ такой, что $\mathcal{P}_{\psi'(x, s+1)} \cong \mathcal{P}_{e'}$, и переопределить $\psi'(x, s) = e'$. Следовательно, существует вычислимая аппроксимация (допуская вольность обозначений, будем ее также обозначать через ψ) такая, что $\psi(x) = \liminf_{s \rightarrow \infty} \psi(x, s)$.

Теперь достаточно для всех e выполнить следующие требования:

$$R_e : (\exists x)[\mathcal{L}_x \not\cong P_{\liminf_{s \rightarrow \infty} \varphi_e(x, s)}].$$

В конце построения $\mathcal{L}$ будет иметь один из следующих типов: $\omega + k$, $k + \omega^*$, $\omega + \omega^*$ для конечного $k \geq 1$. Будем строить линейный порядок $\mathcal{L}_x$ в виде суммы двух интервалов $L(s) + R(s)$.

Конструкция. Пусть $L(0) = R(0) = \emptyset$. Предположим, что после шага s уже построены

$$L(s) = \{l_0 <_{\mathcal{L}_x} l_1 <_{\mathcal{L}_x} \dots <_{\mathcal{L}_x} l_{k_s}\}, \quad R(s) = \{r_{m_s} <_{\mathcal{L}_x} \dots <_{\mathcal{L}_x} r_1 <_{\mathcal{L}_x} r_0\}.$$

Возможны три случая.

СЛУЧАЙ 1. $\varphi_e(x, s+1) = \varphi_e(x, s)$. Тогда после шага s определен параметр $c_{\varphi_e(x, s)}$. Перечисляем в $P_{\varphi_e(x, s+1)}$ хотя бы один новый элемент.

СЛУЧАЙ 2. $\varphi_e(x, s+1) > \varphi_e(x, s)$. Тогда параметр $c_{\varphi_e(x, s+1)}$ еще не определен. Перечисляем в $P_{\varphi_e(x, s+1)}$ (обозначим перечисленное множество элементов через $P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1]$) не менее чем $|L(s)| + |R(s)| + 2$ элементов и выбираем среди них наименьшее натуральное число c такое, что множество $\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x <_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c\}$ содержит не менее чем $|L(s)|$ элементов, а множество $\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x >_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c\}$ — не менее чем $|R(s)|$ элементов. Полагаем $c_{\varphi_e(x, s+1)} = c$.

СЛУЧАЙ 3. $\varphi_e(x, s+1) < \varphi_e(x, s)$. Возможны два подслучая.

ПОДСЛУЧАЙ 1. Нарушается хотя бы одно из неравенств

$$|\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x <_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}| \geq |L(s)|,$$

$$|\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x >_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}| \geq |R(s)|.$$

Пусть нарушается первое неравенство и

$$|\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x <_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}| = k.$$

Тогда полагаем

$$L(s+1) = \{l_0 <_{\mathcal{L}_x} l_1 <_{\mathcal{L}_x} \dots <_{\mathcal{L}_x} l_k\}$$

и

$$R(s+1) = \{l_{k+1} <_{\mathcal{L}_x} \dots <_{\mathcal{L}_x} l_{k_s} <_{\mathcal{L}_x} r_{m_s} <_{\mathcal{L}_x} \dots <_{\mathcal{L}_x} r_1 <_{\mathcal{L}_x} r_0\},$$

т. е. перемещаем лишние элементы из L -части в R -часть, сохраняя при этом порядок. Находим достаточное количество новых, еще не использованных элементов, и добавляем их в $R(s+1)$ непосредственно слева от l_{k+1} так, чтобы выполнялось равенство

$$|R(s+1)| = |\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x >_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}|.$$

Случай нарушения второго неравенства рассматривается аналогично.

Подслучай 2. Выполняются оба неравенства

$$|\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x <_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}| \geq |L(s)|,$$

$$|\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x >_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}| \geq |R(s)|.$$

В этом случае переходим к дальнейшим построениям.

Для любого $t > \varphi_e(x, s+1)$ параметр c_t полагаем не определенным.

В подслучае 1 случая 3 уже определили $L(s+1)$ и $R(s+1)$. В остальных случаях находим достаточное количество новых, еще не использованных элементов, и добавляем их в $L(s+1)$ непосредственно справа от l_{k_s} и в $R(s+1)$ непосредственно слева от r_{m_s} так, чтобы выполнялись равенства

$$|L(s+1)| = |\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x <_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}|,$$

$$|R(s+1)| = |\{x \in P_{\varphi_e(x, s+1)}[s+1] \mid x >_{P_{\varphi_e(x, s+1)}} c_{\varphi_e(x, s+1)}\}|.$$

ВЕРИФИКАЦИЯ. Пусть $\liminf_{s \rightarrow \infty} \varphi_e(x, s) = y$. Тогда существует s_0 такой, что для любого $s > s_0$ выполнено $\varphi_e(x, s) \geq y$ и, следовательно, c_y определено на всех таких шагах и больше не меняется. Возможны следующие случаи.

Либо слева от c_y лежит конечное число элементов k , а справа — бесконечное число элементов (в этом случае $\mathcal{L}_x$ имеет тип $k + \omega^*$). Либо справа от c_y лежит конечное число элементов k , а слева — бесконечное число элементов ($\mathcal{L}$ имеет тип $\omega + k$). Либо слева и справа от c_y лежит бесконечное число элементов ($\mathcal{L}$ имеет тип $\omega + \omega^*$).

Ясно, что во всех случаях $\mathcal{L}_x \not\cong P_y$.

4.3. Доказательство п. (2) теоремы 3. Из доказательства в разд. 4.1 следует, что любой бесконечный вычислимый линейный порядок $0''$ -изоморфен пунктуальному. Осталось показать, что существует вычислимый линейный порядок, не являющийся $0'$ -изоморфным пунктуальному. Для этого достаточно удовлетворить все требования вида $R_{\langle i, j \rangle}$ такие, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_i(x, s)$ не является изоморфизмом между $\mathcal{L}$ и P_j , где, не ограничивая общности, можно считать, что аппроксимация $\varphi_i(x, s)$ примитивно рекурсивна.

КОНСТРУКЦИЯ. Пусть $0 < 1$ и $0, 1$ — свидетели для требования R_0 . На шаге $s+1$ последовательно выполним конструкции для требования R_e , где $0 \leq e < s+1$.

Конструкция для R_e , $e = \langle i, j \rangle$. Есть две возможности.

СЛУЧАЙ 1. Требование R_e приступает к работе на этом шаге (т. е. для него не определено еще ни одного свидетеля). После шага s определено множество свидетелей требований с более высоким приоритетом. Это множество разбивает линейный порядок на конечное множество интервалов, причем часть из них

запрещенная. Тогда определяем множество свидетелей требования R_e как множество свидетелей требований более высокого приоритета, в которое добавляем по два новых элемента из каждого незапрещенного интервала, образованного свидетелями требований с более высоким приоритетом.

СЛУЧАЙ 2. Требование R_e уже работало на предыдущих шагах. Может случиться так, что какое-то требование более высокого приоритета сняло запрет с одного из интервалов. Тогда если в каком-то из незапрещенных интервалов, образованных свидетелями требований с более высоким приоритетом, нет свидетелей требования R_e , то выбираем по два элемента из такого интервала и добавляем в множество свидетелей для R_e .

Пусть $a_0 < a_1 < \dots < a_k$ — множество всех свидетелей требования R_e на данном шаге.

Возможны три подслучая.

ПОДСЛУЧАЙ 1. У требования R_e нет активных запретов. Вычисляем $\varphi_i(a_p, s+1)$ для каждого свидетеля a_p требования R_e . Перечисляем в P_j столько элементов (обозначим получившееся множество через $P_j[s+1]$), чтобы выполнялось одно из неравенств

$$\begin{aligned} |\{x < a_0 \mid x \in L_s\}| &< |\{x <_{P_j} \varphi_i(a_0, s+1) \mid x \in P_j[s+1]\}|, \\ |\{a_p < x < a_{p+1} \mid x \in L_s\}| &< |\{\varphi_i(a_p, s+1) <_{P_j} x <_{P_j} \varphi_i(a_{p+1}, s+1) \mid x \in P_j[s+1]\}|, \\ |\{x > a_k \mid x \in L_s\}| &< |\{x >_{P_j} \varphi_i(b, s+1) \mid x \in P_j[s+1]\}|. \end{aligned}$$

Запрещаем самый левый интервал, для которого выполнилось неравенство (даже если интервал запрещен требованием с более высоким приоритетом).

ПОДСЛУЧАЙ 2. Требование R_e запрещает интервал (a, b) и $\varphi_i(a, s+1) = \varphi_i(a, s)$, $\varphi_i(b, s+1) = \varphi_i(b, s)$. Требование R_e удовлетворено.

ПОДСЛУЧАЙ 3. Требование R_e запрещает интервал (a, b) , при этом $\varphi_i(a, s+1) \neq \varphi_i(a, s)$ или $\varphi_i(b, s+1) \neq \varphi_i(b, s)$. Снимаем запрет с интервала.

Добавляем по два наименьших еще не использованных элемента в каждый не запрещенный интервал $\mathcal{L}$.

ВЕРИФИКАЦИЯ. Для начала отметим, что множество свидетелей для каждого требования стабилизируется и конечно. Так как на каждом шаге, прежде чем запретить хотя бы один интервал, каждое требование добавляет по крайней мере два новых интервала, а запрещает не более одного, то на каждом шаге конструкция может добавлять новые элементы в $\mathcal{L}$. Теперь нетрудно видеть, что $\varphi_i(x, s)$ не может быть аппроксимацией изоморфизма между $\mathcal{L}$ и каким-либо примитивно рекурсивным линейным порядком, так как в этом случае функция $\varphi_i(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_i(x, s)$ отобразит некоторый интервал с малым числом элементов в интервал с большим числом элементов.

5. Общая верхняя оценка

Теорема 4. Для каждой Δ_1^1 -функции ψ и достаточно богатого конечного языка L (содержащего по крайней мере один функциональный символ, имеющих более одного аргумента) существует бесконечная вычислимая L -структура $\mathcal{A}$, имеющая гёделев номер n , такая, что

- (1) $\mathcal{A} \cong \mathcal{P}$ для некоторой примитивно рекурсивной L -структуры $\mathcal{P}$;
 (2) если $\{P_i\}_{i \in \omega}$ — гёделева нумерация примитивно рекурсивных L -структур, то $\mathcal{A} \not\cong P_{\psi(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условиям теоремы L содержит один бинарный функциональный символ. Но в доказательстве будет удобно рассматривать дополнительные функции и предикаты, которых в языке L , возможно, нет. Но в любом случае можно воспользоваться примитивной универсальностью класса структур с одним бинарным функциональным символом [4] и транслировать рассуждения в любой язык с одним бинарным функциональным символом.

Поэтому можно использовать язык из работы [3], в которой доказана Σ_1^1 -полнота индексного множества вычислимых структур, имеющих примитивное рекурсивное представление. А именно, для Σ_1^1 -полного множества S по каждому $k \in \omega$ была равномерно получена вычислимая последовательность структур $\mathcal{M}_{n,k}^m$, $n \in \omega$, $m \geq 0$, такая, что

- 1) для каждой структуры $\mathcal{M}_{n,k}^m$, $m \geq 1$, существует изоморфная ей структура $\mathcal{M}_{n,k}^{m'}$, $m' > m$;
- 2) структура $\biguplus_{m \geq 1} \mathcal{M}_{n,k}^m$ изоморфна примитивно рекурсивной структуре равномерно по n и k , более того, существует примитивно рекурсивная функция f такая, что

$$\biguplus_{m \geq 1} \mathcal{M}_{n,k}^m \cong P_{f(n,k)};$$

- 3) каждая структура $\mathcal{M}_{n,k}^0$ изоморфна примитивно рекурсивной структуре (неравномерно по n и k);
- 4) если $k \in S$, то для каждой $\mathcal{M}_{n,k}^0$ существует изоморфная ей структура $\mathcal{M}_{n,k}^m$, $m \geq 1$;
- 5) если $k \notin S$ и $i \in \omega$, то структура $\bigotimes_n \biguplus_{m \geq 0} \mathcal{N}_n^m$ не изоморфна P_i при $\mathcal{N}_i^m = \mathcal{M}_{i,k}^m$ и любом выборе структур $\mathcal{N}_n^m$, $n \neq i$.

Здесь под $\biguplus_n \mathcal{N}^m$ понимается непересекающееся объединение структур $\mathcal{N}^m$, в котором вводится новое отношение эквивалентности, относительно которого исходные структуры $\mathcal{N}^m$ образуют классы эквивалентности. Под $\bigotimes_n \mathcal{A}_n$ понимается непересекающееся объединение структур $\mathcal{A}_n$ такое, что элементы каждой структуры $\mathcal{A}_n$ помечаются специальной меткой c_n , при этом $c_n \neq c_{n'}$ для $n \neq n'$ (чтобы реализовать метки в конечном языке достаточно добавить в объединение копию стандартной арифметики $\mathbb{N}$ и одноместную функцию со значениями в $\mathbb{N}$).

Из описанных выше условий следует, что при $k \in S$ вычислимая структура

$$\mathcal{M}_k = \bigotimes_n \biguplus_{m \geq 0} \mathcal{M}_{n,k}^m$$

изоморфна примитивно рекурсивной структуре

$$\bigotimes_n P_{f(n,k)} \cong \bigotimes_n \biguplus_{m \geq 1} \mathcal{M}_{n,k}^m.$$

Если $k \notin S$, то $\mathcal{M}_k \not\cong P_i$ для всех $i \in \omega$.

По теореме рекурсии рассмотрим вычислимую структуру

$$\mathcal{A} = \bigotimes_n \biguplus_{m \geq 0} \mathcal{M}_{n,k_n}^m$$

с гёделевым номером $e \in \omega$ таким, что

$$k_n \notin S \iff \psi(e) = n.$$

Тогда $k_n \notin S$ для не более чем одного n , поэтому $\mathcal{A}$ имеет примитивно рекурсивную копию в силу свойств 2–4. Кроме того, из свойства 5 следует, что $\mathcal{A}$ не изоморфна $P_{\psi(e)}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalimullin I., Melnikov A., Ng K. M.* Algebraic structures computable without delay // Theoret. Comput. Sci. 2017. V. 674. P. 73–98.
2. *Калимуллин И. Ш., Мельников А. Г., Нг К. М.* Различные версии категоричности без задержек // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 2. С. 256–266.
3. *Bazhenov N., Harrison-Trainor M., Kalimullin I., Melnikov A., Ng K. M.* Automatic and polynomial-time algebraic structures // J. Symb. Log. DOI: 10.1017/jsl.2019.26. 2019. P. 1–32.
4. *Downey R., Harrison-Trainor M., Kalimullin I., Melnikov A., Turetsky D.* Graphs are not universal for online computability. 2018. P. 1–14. <http://homepages.ecs.vuw.ac.nz/harrism1/papers/punctual-graphs.pdf>. Victoria Univ. Wellington.
5. *Cenzer D., Remmel J.* Feasibly categorical abelian groups // Feasible mathematics. II (Ithaca, NY, 1992); V. 13 of Progr. Comput. Sci. Appl. Logic. Boston: Birkhäuser Boston, 1995. P. 91–153.
6. *Cenzer D. A., Remmel J. B.* Polynomial-time versus recursive models // Ann. Pure Appl. Logic. 1991. V. 54. P. 117–58.
7. *Cenzer D. A., Remmel J. B.* Polynomial-time abelian groups // Ann. Pure Appl. Logic. 1992. V. 56, N 1–3. P. 313–363.
8. *Алаев П. Е.* Структуры вычислимые за полиномиальное время. I // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 6. С. 647–669.
9. *Алаев П. Е.* Структуры вычислимые за полиномиальное время. II // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 6. С. 651–670.
10. *Алаев П. Е.* Категоричность для примитивно рекурсивных и полиномиальных булевых алгебр // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 4. С. 389–425.
11. *Miller C. III.* Decision problems for groups—survey and reflections. // Algorithms and classification in combinatorial group theory (Berkeley, CA, 1989). V. 23 of Math. Sci. Res. Inst. Publ. New York: Springer-Verl., 1992. P. 1–59.
12. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
13. *Гончаров С. С., Найт Дж. Ф.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 639–681.
14. *Grigorieff S.* Every recursive linear ordering has a copy in $DTIME-SPACE(n, \log(n))$ // J. Symb. Log. 1990. V. 55, N 1. P. 260–276.
15. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3–60.
16. *Rabin M.* Computable algebra, general theory and theory of computable fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. P. 341–360.
17. *Cenzer D., Downey R. G., Remmel J. B., Uddin Z.* Space complexity of abelian groups // Arch. Math. Log. 2009. V. 48, N 1. P. 115–140.
18. *Cenzer D., Remmel J. B.* Polynomial time versus computable boolean algebras // Recursion Theory and Complexity: Proc. 1997 Kazan Workshop (M. Arslanov, S. Lempp, eds.) Berlin: De Gruyter, 1999. P. 15–53.
19. *Montalbán A.* Copyable structures // J. Symb. Log. 2013. V. 78, N 4. P. 1199–1217.
20. *Jockusch C. G. Jr., Soare R. I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 1991. V. 52, N 1–2. P. 39–64.
21. *Remmel J. B.* Recursive boolean algebras with recursive atoms // J. Symb. Log. 1981. V. 46. P. 572–594.
22. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.

23. McCoy C. Δ_2^0 -categoricity in Boolean algebras and linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 2003. V. 119, N 1–3. P. 85–120.
24. Melnikov A. G. Computable abelian groups // Bull. Symb. Log. 2014. V. 20, N 3. P. 315–356.
25. Фролов А. Н. Δ_2^0 -копии линейных порядков // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 354–370.

Поступила в редакцию 14 декабря 2018 г.

После доработки 26 марта 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Зубков Максим Витальевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
Maxim.Zubkov@kpfu.ru

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

Мельников Александр Геннадьевич
Massey University East Precinct,
Dairy Flat Highway (SH17), 0632, New Zealand
A.Melnikov@massey.ac.nz

Фролов Андрей Николаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
a.frolov.kpfu@gmail.com