M. B. Karmanova, On local metric characteristics of level sets of ch1-mappings of carnot manifolds, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1291–1309

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.609>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.156.22

April 26, 2023, 17:41:34

УДК 517.518.1+514.7

О ЛОКАЛЬНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ C_H^1 -ОТОБРАЖЕНИЙ МНОГООБРАЗИЙ КАРНО

М. Б. Карманова

Аннотация. Для поверхностей уровня отображений класса C_H^1 , определенных на многообразиях Карно и принимающих значения в пространствах Карно — Каратеодори, установлена адекватная локальная метрическая характеристика, основанная на некотором соответствии с окрестностью ядра субриманова дифференциала. Кроме того, для отображений групп Карно на прообразе построен адаптированный базис, согласующий локальные субримановы структуры дополнения ядра субриманова дифференциала (в том числе с пересечением множества уровня) и пространства-образа.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.609

Ключевые слова: пространство Карно — Каратеодори, группа Карно, липшицево отображение, индуцированная мера, адаптированный базис, формула площади.

В работе исследуются метрические свойства поверхностей уровня C_H^1 -отображений, определенных на многообразиях Карно, а также на группах Карно, образ которых имеет меньшую топологическую размерность. В гладком случае многообразие Карно $\mathbb{M}$ — связное риманово многообразие, в касательном расслоении которого $T\mathbb{M}$ существует такое подрасслоение $H\mathbb{M}$, называемое горизонтальным, что оно с помощью операции коммутирования за $M < \infty$ шагов порождает все $T\mathbb{M}$. Класс C_H^1 является субримановым аналогом класса C^1 в том смысле, что он адекватно аппроксимирует липшицевы во внутреннем смысле отображения, и его субриманов дифференциал существует всюду и непрерывен (см. примеры липшицевых отображений в [1–4]). Тем не менее C_H^1 -отображения в общем случае недифференцируемы в классическом смысле на множестве положительной меры: по определению у них существуют только непрерывные производные вдоль полей из $H\mathbb{M}$ и некоторые комбинации производных вдоль оставшихся полей. Кроме того, в классическом смысле такие отображения являются гёльдеровыми с показателем $1/M$, так как внутренняя метрика d_{cc} многообразий Карно, согласованная с их субримановой структурой, оценивается сверху римановой метрикой в степени $1/M$. Поэтому общий вид формулы площади (включая аналитическое выражение для вычисления якобиана) был установлен для d_{cc} -липшицевых отображений только недавно [5], как и формула площади для построенных по ним отображений-графиков [6], которые не являются даже липшицевыми во внутреннем смысле. Для случая меньшей размерности образа вопрос описания структуры множеств уровня и

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16–31–60036–мол–а–дк).

нахождения каких-либо их метрических характеристик долгое время оставался открытым (за исключением некоторых частных случаев отображений групп Гейзенберга и Карно, в основном, в евклидово пространство; см., например, [7–10] и др.). Дело в том, что в отличие от евклидова случая эти поверхности могут не быть представимы в виде графика, что существенно затрудняет их изучение. Однако в ходе исследований удалось найти универсальный подход к задаче, который позволил получить описание множеств уровня на многообразиях Карно, независимо от их представимости в виде графика. Так как основной вопрос состоит в получении каких-либо метрических характеристик поверхностей уровня, а также в наличии или отсутствии взаимосвязи свойств их структуры и ядра субриманова дифференциала (как естественное развитие классического случая), то в основе нового подхода лежит идея отождествления точек, принадлежащих одному «слою», который в некотором смысле ортогонален ядру. В классическом случае и в случае гладких отображений, исследованных в [11], в этом нет необходимости, так как каждый «слой» состоит из одной точки. Кроме того, для отображений групп Карно построен локальный адаптированный базис, позволяющий согласовать неголономные структуры таких «слоев» (а также дополнения ядра субриманова дифференциала, в том числе в точках одного множества уровня) и пространства-образа, и тем самым описать структуру такого слоя.

1. Основные определения и результаты

В данном разделе сформулированы необходимые для работы определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 ([12], ср. [13, 14]). Фиксируем связное риманово C^∞ -многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N . Пусть в его касательном расслоении $T\mathbb{M}$ существует фильтрация $H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$ подрасслоениями такая, что для каждого $p \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $U \subset \mathbb{M}$, $U \ni p$, с набором полей $X_1, \dots, X_N$ класса C^1 , обладающая следующими свойствами.

(1) Подпространство $H_i\mathbb{M}(v) = \text{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$ имеет размерность $\dim H_i$ независимо от v , $i = 1, \dots, M$.

(2) Верны включения $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \dots, M$, $i + j \leq M$.

В этом случае набор $(\mathbb{M}, H_1, \dots, H_M)$ называется *пространством Карно — Каратеодори*.

Если, кроме того, выполнено (3), то набор $(\mathbb{M}, H_1, \dots, H_M)$ называется *многообразием Карно*:

(3) $H_{j+1} = \text{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $H_0 = \{0\}$, $j = 1, \dots, M-1$.

Для упрощения обозначений пространство Карно — Каратеодори (или многообразие Карно) будем обозначать символом $\mathbb{M}$. Подрасслоение $H_1\mathbb{M}$ называется *горизонтальным*, а принадлежащие ему поля — *горизонтальными*. Число M называется *глубиной* многообразия $\mathbb{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Степень* поля $\deg X_k$ равна $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Из условия (2) определения 1 следует, что для всех $v \in U$ справедливы соотношения

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k: \deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Для описания субриманова аналога дифференцируемости введем понятие локальной однородной группы и выведем ее главные свойства. Субриманова дифференцируемость по аналогии с классической, в определении которой участвуют отображения касательных пространств, вводится через отображения локальных однородных групп, аппроксимирующих пространства Карно — Каратеодори в их внутренней геометрии [15, 16].

Теорема 1.4 [16]. *Фиксируем $u \in \mathbb{M}$. Набор*

$$\bar{c}_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk}(u) \text{ из (1.1),} & \text{если } \deg X_i + \deg X_j = \deg X_k, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.2)$$

определяет нильпотентную градуированную алгебру Ли.

Иными словами, при фиксированном $u \in \mathbb{M}$ константы из набора (1.2) обладают свойством антисимметричности и удовлетворяют тождеству Якоби и, таким образом, являются структурными константами некоторой алгебры Ли. Построим алгебру Ли $\mathfrak{g}^u$ со структурными постоянными теоремы 1.4 как нильпотентную градуированную алгебру Ли векторных полей $\{(\hat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{R}^N$ такую, что экспоненциальное отображение

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\hat{X}_i^u)'\right)(0)$$

тождественно [17]. В силу этого $x_i = \exp(x_i (\hat{X}_i^u)')(0)$. Следовательно, $e_i = (\hat{X}_i^u)'(0)$. Соответствующую группу Ли обозначим через $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$. По построению для векторных полей $\{(\hat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ справедливы соотношения

$$[(\hat{X}_i^u)', (\hat{X}_j^u)'] = \sum_{k: \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(u) (\hat{X}_k^u)',$$

$i, j = 1, \dots, N$, всюду на $\mathbb{R}^N$.

Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа [17]. Базисные векторные поля $(\hat{X}_i^u)' \in \mathfrak{g}^u$, $i = 1, \dots, N$, левоинвариантны относительно этой групповой операции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 (см., например, [18]). *Нильпотентной градуированной группой (Ли) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде*

$$V = \bigoplus_{j=1}^M V_j, \quad [V_1, V_j] \subset V_{j+1}, \quad j < M, \quad [V_j, V_M] = \{0\}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Если вместо условия $[V_1, V_j] \subset V_{j+1}$ выполняется $[V_1, V_j] = V_{j+1}$, то $\mathbb{G}$ называется *группой Карно*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Нильпотентная градуированная группа $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}^u$, называется *нильпотентным касательным конусом $\mathbb{M}$ в точке $u \in \mathbb{M}$* .

Свойство 1.7. *Если $\mathbb{M}$ — многообразие Карно, то $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ — группа Карно.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть $u \in \mathbb{M}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in B_E(0, r)$, где $B_E(0, r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^N$. Определим $\theta_u : B_E(0, r) \rightarrow \mathbb{M}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u является C^1 -гладким диффеоморфизмом, если $0 < r \leq r_u$ для некоторого $r_u > 0$. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* (относительно $u \in \mathbb{M}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

Используя экспоненциальное отображение θ_u , перенесем поля $(\hat{X}_i^u)'$ на $\mathcal{U} \in \mathbb{M}$:

$$[(\theta_u)_* \langle (\hat{X}_i^u)' \rangle](\theta_u(x)) = D\theta_u(x) \langle (\hat{X}_i^u)'(x) \rangle,$$

и получим поля $\hat{X}_i^u = (\theta_u)_* (\hat{X}_i^u)'$, $i = 1, \dots, N$. Напомним, что $\hat{X}_i^u(u) = X_i(u)$, $i = 1, \dots, N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Группа (Ли), ассоциированная с алгеброй Ли $\{\hat{X}_i^u\}_{i=1}^N$ в точке $u \in \mathbb{M}$, называется *локальной однородной группой* $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$. Определим ее таким образом, чтобы отображение θ_u было *локальным групповым изоморфизмом* окрестностей единиц $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ и $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$.

Каноническая риманова структура на $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ определяется внутренним произведением в единице $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$, совпадающим с произведением на $T_u\mathbb{M}$. Каноническая риманова структура на нильпотентном касательном конусе $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ определяется таким образом, что локальный групповой изоморфизм θ_u — изометрия. Групповая операция переносится с $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ на $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ с помощью θ_u . Если $x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j \hat{X}_j^u\right)(u)$, $y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j \hat{X}_j^u\right)(u)$, то $x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j \hat{X}_j^u\right)(u)$, где

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu > 0, \beta > 0, \\ |\mu + \beta|_h = \deg X_j}} F_{\mu, \beta}^j(u) x^\mu y^\beta,$$

и для каждого N -мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h = \sum_{i=1}^N \lambda_i \deg X_i$. Здесь и далее будем полагать, что если условие на однородную норму вида $|\mu + \beta|_h = \deg X_j$ невыполнимо ни для каких мультииндексов, то соответствующая сумма равна нулю. Например, в данном случае если $\deg X_j = 1$, то $z_j = x_j + y_j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10 (см., например, [16]). В случае, когда поля $X_1, \dots, X_N$ принадлежат классу C^1 , соответствующие поля $\hat{X}_1^u, \dots, \hat{X}_N^u$ только непрерывны. Поэтому экспоненциальное отображение $\hat{\theta}_v^u(x_1, \dots, x_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \hat{X}_i^u\right)(v)$ для таких полей определяется как

$$\theta_u\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\hat{X}_i^u)'\right)(\theta_u^{-1}(v))\right).$$

Для вывода метрических свойств будем использовать следующее определение расстояния, согласованное с субримановой структурой пространств Карно — Каратеодори. Во многих работах часто используется метрика Карно — Каратеодори d_{cc} , согласованная с неголономной структурой (см., например, [19]). Однако до сих пор остаются открытыми вопросы о строении ее шаров, кроме того, ее не всегда возможно использовать на пространствах Карно — Каратеодори, поэтому в таких случаях применяется квазиметрика d_∞ , которая на многообразиях Карно локально билипшицево эквивалентна d_{cc} : если $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, то $d_\infty(v, w) = \max_{i=1, \dots, N} \{|w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}$. Мы же будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную d_∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11 [5]. Пусть $\mathbb{M}$ — пространство Карно — Каратеодори топологической размерности N и глубины M и $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$. Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j:\deg X_j=1} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j:\deg X_j=2} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2 \cdot 2}}, \dots, \left(\sum_{j:\deg X_j=M} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2 \cdot M}}\right\}. \quad (1.3)$$

Множество $\{w \in \mathbb{M} : d_2(v, w) < r\}$ называется шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом $\text{Box}_2(v, r)$.

Значение $d_2^u(v, w)$ для $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i \hat{X}_i^u\right)(v)$, $w, v, u \in \mathbb{M}$, и множество $\text{Box}_2^u(v, r)$ определяются аналогично на $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$.

Свойство 1.12. Величина $d_2(v, w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности, и для всякой окрестности $D \Subset \mathbb{M}$ существует константа $c_D < \infty$ такая, что обобщенное неравенство треугольника

$$d_2(v, w) \leq c_D(d_2(v, u) + d_2(u, w))$$

верно для всех $v, u, w \in D$.

Свойство 1.13. Прообраз d_2 -шара $\text{Box}_2(v, r)$ при отображении θ_v равен

$$\text{Box}_2(0, r) = B_2^{\dim H_1}(0, r) \times B_2^{\dim H_2 - \dim H_1}(0, r^2) \times \dots \times B_2^{\dim H_M - \dim H_{M-1}}(0, r^M),$$

где B_2^l — евклидов шар размерности l .

Аналогичное утверждение справедливо для $(\hat{\theta}_v^u)^{-1}(\text{Box}_2^u(v, r))$.

Свойство 1.14. Хаусдорфова размерность $\mathbb{M}$ относительно d_2 (и d_∞) равна

$$\nu = \dim H_1 + \sum_{k=2}^M k(\dim H_k - \dim H_{k-1}).$$

2. Структура множеств уровня

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Производные вдоль горизонтальных векторных полей будем называть горизонтальными производными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, пространств Карно — Каратеодори является контактным отображением класса C_H^1 , если его горизонтальные производные существуют и непрерывны, а отображение $\hat{D}_H \varphi = (X_1 \varphi, \dots, X_{\dim H_1} \varphi)$ переводит горизонтальные поля в горизонтальные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 (см., например, [19, 15]). Пусть $\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}}$ — пространства Карно — Каратеодори и $\Omega \subset \mathbb{M}$. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ дифференцируемо в субримановом смысле, или h -с-дифференцируемо, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм

$$\hat{D}\varphi(x) : \mathcal{G}^x \mathbb{M} \rightarrow \mathcal{G}^{\varphi(x)} \tilde{\mathbb{M}}$$

локальных однородных групп такой, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle) = o(d_2(x, y)), \quad y \in \Omega, \quad o(1) \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow x.$$

Горизонтальный гомоморфизм $\widehat{D}\varphi(x)$ называется *субримановым дифференциалом*, или *hc-дифференциалом*, отображения φ в точке x .

Теорема 2.4 [15]. Отображения $\varphi \in C_H^1(\Omega, \widetilde{\mathbb{M}})$ непрерывно hc-дифференцируемы всюду.

Предположение 2.5 (ср. [20, 21]). Будем рассматривать $\varphi : \Omega \rightarrow \widetilde{\mathbb{M}}$, где

- (1) $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество;
- (2) $\varphi : \Omega \rightarrow \widetilde{\mathbb{M}}$ — отображение класса C_H^1 ;
- (3) $\mathbb{M}$ — многообразие Карно топологической размерности N , глубины M , с базисными полями $X_1, \dots, X_N$, подрасслоениями $H_1, \dots, H_M$, квазиметрикой d_2 и хаусдорфовой размерностью ν ;
- (4) $\widetilde{\mathbb{M}}$ — пространство Карно — Каратеодори топологической размерности $\tilde{N}$, глубины $\tilde{M}$, с базисными полями $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, подрасслоениями $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{\tilde{M}}$, квазиметрикой $\tilde{d}_2$ и хаусдорфовой размерностью $\tilde{\nu}$;
- (5) $N > \tilde{N}$, $M \geq \tilde{M}$, $\dim H_1 \geq \dim \tilde{H}_1$, $\dim H_{i+1} - \dim H_i \geq \dim \tilde{H}_{i+1} - \dim \tilde{H}_i$, $i = 1, \dots, M - 1$;
- (6) $\text{rank } \widehat{D}\varphi = \tilde{N}$ всюду и hc-дифференциал строго отделен от нуля на ортогональном дополнении к его ядру.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Условие (5) предположения 2.5 обеспечивает существование липшицевых в субримановом смысле отображений, hc-дифференциал которых невырожденный (см. подробности в [11]).

Фиксируем точку $x \in \Omega$ и проходящее через нее множество уровня $\varphi^{-1}(\varphi(x))$. Представим каждый элемент $y \in \varphi^{-1}(\varphi(x))$ окрестности точки x в виде

$$y = \exp\left(\sum_{i=1}^N (y_i^0 + y_i^\perp) X_i\right)(x),$$

где $\exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^0 X_i\right)(x) \in \ker \widehat{D}\varphi(x)$, а $\exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x) \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp$, и оценим величину $d_2\left(x, \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x)\right)$. По определению hc-дифференцируемости имеем

$$\tilde{d}_2(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle) = \xi_x(y) d_2(x, y),$$

где $\xi_x(y) = o(1)$ и $\xi_x(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$. Так как $\varphi(y) = \varphi(x)$, то

$$\begin{aligned} \xi_x(y) d_2(x, y) &= \tilde{d}_2(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle) \\ &= \tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle) = \tilde{d}_2\left(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\left\langle \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x) \right\rangle\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из предположения на свойства hc-дифференциала следует, что

$$\tilde{d}_2\left(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\left\langle \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x) \right\rangle\right) \geq K d_2\left(x, \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x)\right), \quad K > 0. \quad (2.2)$$

Действительно, матрица h -дифференциала $\widehat{D}\varphi(x)$ имеет «блочнo-диагональ-ный» вид с блоками $(\widehat{D}\varphi(x))_k$ размерности $(\dim \widetilde{H}_k - \dim \widetilde{H}_{k-1}) \times (\dim H_k - \dim H_{k-1})$, $k = 1, \dots, \widetilde{M}$, $\dim H_0 = \dim \widetilde{H}_0 = 0$, и его действие на элементе $\exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x)$ в координатах первого рода относительно x и $\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} (\widehat{D}\varphi(x))_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\widehat{D}\varphi(x))_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{M}} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{(1)}^\perp \\ y_{(2)}^\perp \\ \vdots \\ y_{(\widetilde{M})}^\perp \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\widehat{D}\varphi(x))_1 \langle y_{(1)}^\perp \rangle \\ (\widehat{D}\varphi(x))_2 \langle y_{(2)}^\perp \rangle \\ \vdots \\ (\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{M}} \langle y_{(\widetilde{M})}^\perp \rangle \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $y_{(k)}^\perp = (y_{\dim H_{k-1}+1}^\perp, \dots, y_{\dim H_k}^\perp)^T$, $k = 1, \dots, \widetilde{M}$. (Заметим, что для $k > \dim H_{\widetilde{M}}$ имеем $y_{(k)}^\perp = 0$.) Следовательно,

$$|(\widehat{D}\varphi(x))_k \langle y_{(k)}^\perp \rangle| \geq C_k \sqrt{(y_{\dim H_{k-1}+1}^\perp)^2 + \dots + (y_{\dim H_k}^\perp)^2},$$

$k = 1, \dots, \widetilde{M}$, поэтому справедливо (2.2). Таким образом, с учетом (2.1) имеем

$$d_2\left(x, \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x)\right) \leq \frac{\xi_x(y)}{K} d_2(x, y), \quad (2.3)$$

где $\xi_x(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$. Отсюда с помощью непосредственных вычислений вытекает, что

$$d_2(x, y) \left(1 - \frac{\xi_x(y)}{K'}\right) \leq d_2\left(x, \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^0 X_i\right)(x)\right) \leq d_2(x, y) \left(1 + \frac{\xi_x(y)}{K'}\right), \quad (2.4)$$

$0 < K' < \infty$. Действительно, пусть $\left(\sum_{j: \deg X_j = k_0} |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2k_0}} = d_2(x, y)$. Тогда

$$\sum_{j: \deg X_j = k_0} |y_j|^2 = d_2(x, y)^{2k_0} \text{ и}$$

$$\sum_{j: \deg X_j = k_0} |y_j^0|^2 \geq \sum_{j: \deg X_j = k_0} (|y_j|^2 - |y_j^\perp|^2 - 2|y_j y_j^\perp|) \geq d_2(x, y)^{2k_0} \left(1 - L_{k_0} \frac{\xi_x(y)}{K}\right),$$

и левая часть (2.4) доказана. Правая часть доказывается аналогично с помощью рассмотрения $\left(\sum_{j: \deg X_j = m_0} |y_j^0|^2\right)^{\frac{1}{2m_0}} = d_2\left(x, \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^0 X_i\right)(x)\right)$.

Таким образом, вывели

Свойство 2.7. Если $y \in \varphi^{-1}(\varphi(x))$ лежит в некоторой окрестности точки x , то

$$y = \exp\left(\sum_{i=1}^N (y_i^0 + y_i^\perp) X_i\right)(x),$$

где $\exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^0 X_i\right)(x) \in \ker \widehat{D}\varphi(x)$, а $\exp\left(\sum_{i=1}^N y_i^\perp X_i\right)(x) \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp$, причем справедливы соотношения (2.3) и (2.4), где константы $0 < K, K' < \infty$ одни и те же на некоторой компактной окрестности.

Здесь и далее будем рассматривать общий случай, когда множество уровня необязательно представимо в виде графика.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.8. Положим

$$\begin{aligned} \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) &= \left\{ w : w = \exp(Y^0)(x), Y^0 = \sum_{i=1}^N y_i^0 X_i, Y^0(x) \in \ker \widehat{D}\varphi(x) \right\}, \\ \exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(y) &= \left\{ v : v = \exp(Y^\perp)(y), Y^\perp = \sum_{j=1}^N y_j^\perp \widehat{X}_j, Y^\perp(x) \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp \right\}. \end{aligned}$$

Фиксируем $R > 0$. Каждому $y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(x, R)$ сопоставим множество

$$C_{y_0} = \exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(y_0, R), \quad (2.5)$$

которое может состоять из более чем одной точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. В отличие от классического случая предположение существования $y, z \in \exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, $y \neq z$, не приводит к противоречию, так как в общем случае набор $\left\{ Y^\perp : Y^\perp = \sum_{j=1}^N y_j^\perp X_j, Y^\perp(x) \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp \right\}$ не является интегрируемым. Достаточно рассмотреть ситуацию, когда $\mathbb{M}$ — группа Карно, и вычислить координаты y относительно z .

Справедлив следующий результат о локальной открытости прообраза параметризации.

Лемма 2.10 (см. также [9] для случая групп Карно). Пусть $\varphi \in C_H^1(\Omega, \widetilde{\mathbb{M}})$, $\Omega \subset \mathbb{M}$. Фиксируем $x \in \Omega$. Существует такое $R > 0$, что для любого $y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(x, R)$ множество (2.5) непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем некоторое $r > 0$ такое, что

$$\exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(x, r) \subset \Omega$$

и для всякого y_0 из этого множества выполняется

$$I(y_0, r) = \exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0) \cap \overline{\text{Box}_2}(y_0, r) \subset \Omega,$$

где символ $\overline{\text{Box}_2}$ обозначает замкнутый шар. Докажем, что $\varphi(x)$ не принадлежит образу границы $I(y_0, r)$ и при отображении φ , и при отображении $\widehat{D}\varphi(y_0)$. Действительно, с одной стороны, в силу непрерывности $\widehat{D}\varphi$, для всякого $z \in \partial I(y_0, r)$ имеем

$$\tilde{d}_2(\varphi(y_0), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle z \rangle) \geq K d_2(y_0, z) = Kr,$$

а с другой —

$$\begin{aligned} \tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y_0)) &\leq c(\tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\langle y_0 \rangle) + \tilde{d}_2(\varphi(y_0), \widehat{D}\varphi(x)\langle y_0 \rangle)) \\ &= c\tilde{d}_2(\varphi(y_0), \widehat{D}\varphi(x)\langle y_0 \rangle) = c\xi_x(y_0)d_2(x, y_0) \leq c\xi_x(y_0)r, \end{aligned}$$

где константа $c > 0$ из обобщенного неравенства треугольника определяется размерами рассматриваемого множества. Из обобщенного неравенства треугольника следует, что

$$Kr \leq c(c\xi_x(y_0)r + \tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle z \rangle)),$$

откуда

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle z \rangle) \geq r \left(\frac{K}{c} - c\xi_x(y_0) \right) \geq Sr,$$

$S = \frac{K}{c} - c \max_{y_0} \xi_x(y_0) > 0$, где $y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(x, r)$, так как по свойствам ξ_x величину $r > 0$ можно выбрать такой, чтобы выполнялось $S > 0$. Далее, $\tilde{d}_2(\varphi(z), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle z \rangle) \leq \xi_{y_0}(z)d_2(y_0, z) = \xi_{y_0}(z)r$. Тогда аналогично

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle z \rangle) \leq c(\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(z)) + \tilde{d}_2(\varphi(z), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle z \rangle)),$$

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(z)) \geq r \left(\frac{S}{c} - \xi_{y_0}(z) \right) \geq Tr,$$

где

$$T = \frac{K}{c^2} - \max_{y_0} \xi_x(y_0) - \max_{y_0} \max_{z \in \partial I(y_0, r)} \xi_{y_0}(z), \quad (2.6)$$

$y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(x, r)$, а $r > 0$ можно выбрать так, что $T > 0$. Таким образом, существует такое $R > 0$, что $T > 0$, и тогда $\varphi(x)$ не принадлежит образу границы $I(y_0, R)$ для всех $y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(x, R)$.

Остается применить стандартные рассуждения. Во-первых, отображение $\varphi|_{I(y_0, R)}$ гомотопно $\varphi|_{I(x, R)}$. Действительно, φ непрерывно, кроме того, существует гладкая кривая $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}$, соединяющая x и y_0 и лежащая на $\exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$, тогда $\psi_t = \varphi|_{I(\gamma(t), R)}$ — искомое преобразование. Далее, $\varphi|_{I(x, R)}$ гомотопно $\widehat{D}\varphi(x)|_{I(x, R)}$ в силу того, что [15]

$$\widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi(x)}(\varphi(\Delta_{\varepsilon}^x(y))) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_{\varepsilon}(y),$$

где $\varphi_{\varepsilon}(y) = \Delta_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi(x)}(\varphi(\Delta_{\varepsilon}^x(y)))$, а

$$\Delta_{\varepsilon}^x \left(\exp \left(\sum_{i=1}^N y_i X_i \right) (x) \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} y_i X_i \right) (x).$$

Так как степень $\widehat{D}\varphi(x)|_{I(x, R)}$ в точке $\varphi(x)$ не равна нулю (в силу выбора множества $I(x, R)$), степень $\varphi|_{I(y_0, r)}$ в этой точке также не равна нулю, поэтому $C_{y_0} \neq \emptyset$. $\square$

Свойство 2.11. В малой компактной окрестности точки x для таких $y \in C_{y_0}$, что $\varphi(y) = \varphi(x)$, верно

$$d_2(y_0, y) = o(d_2(x, y)) \quad \text{и} \quad d_2(y_0, y) = o(d_2(x, y_0)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x \in \Omega$. Будем рассматривать такое $R > 0$, что справедливо соотношение (2.6). Имеем

$$\tilde{d}_2(\varphi(y_0), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle y \rangle) \geq Kd_2(y_0, y),$$

так как $\widehat{D}\varphi(y_0)$ по свойству непрерывности строго отделен от нуля на $(\ker \widehat{D}\varphi(x))^{\perp}$. В силу леммы 2.10 справедливо $d_2(y_0, y) < R$, поэтому значение $\xi_{y_0}(y)$ достаточно мало по выбору R . Далее,

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle y \rangle) = \tilde{d}_2(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle y \rangle) \leq \xi_{y_0}(y)d_2(y_0, y),$$

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y_0)) \leq c(\tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(x)\langle y_0 \rangle) + \xi_x(y_0)d_2(x, y_0)) = c\xi_x(y_0)d_2(x, y_0).$$

Тогда

$$\tilde{d}_2(\varphi(y_0), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle y \rangle) \leq c(\tilde{d}_2(\varphi(x), \widehat{D}\varphi(y_0)\langle y \rangle) + \tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y_0))),$$

поэтому $d_2(y_0, y) = o(d_2(y_0, x))$. Имеем $d_2^{y_0}(y, x) \geq d_2(y_0, x) - Cd_2(y_0, y)$. По локальной аппроксимационной теореме (см., например, [13], а также [22, теорема 9] для случая базисных векторных полей классов C^1 и $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$) выводим $d_2(y, x) = d_2(y_0, x)(1 + o(1))$, и вторая оценка также выполняется. $\square$

Определим расстояние $\mathfrak{d}_2^x$ на слое $\exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0) \cap \text{Box}_2(y_0, R)$, где $R > 0$ такое же, как в лемме 2.10, следующим образом:

$$\mathfrak{d}_2^x(v, w) = \begin{cases} \min\{d_2(v, w), d_2(v, C_{y_0}) + d_2(w, C_{y_0})\}, & v, w \notin C_{y_0}, \\ 0, & v, w \in C_{y_0}, \\ d_2(v, C_{y_0}), & v \notin C_{y_0}, w \in C_{y_0}, \\ d_2(w, C_{y_0}), & v \in C_{y_0}, w \notin C_{y_0}. \end{cases}$$

Свойство 2.12. Величина $\mathfrak{d}_2^x$ является квазиметрикой (в том смысле, что C_{y_0} принимается за одну точку, т. е. точки из C_{y_0} отождествляются).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства равенства нулю только на одинаковых аргументах (с учетом отождествления точек из C_{y_0}) и симметричности следуют из таковых для d_2 . Осталось установить обобщенное неравенство треугольника (см. свойство 1.12). Действительно, в случае $u, v, w \in C_{y_0}$, а также $u \notin C_{y_0}$, $v, w \in C_{y_0}$, соотношение из свойства 1.12 очевидно.

Пусть теперь $u \in C_{y_0}$, $v, w \notin C_{y_0}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_2^x(v, u) + \mathfrak{d}_2^x(w, u) &= d_2(v, C_{y_0}) + d_2(w, C_{y_0}) \\ &\geq \min\{d_2(v, w), d_2(v, C_{y_0}) + d_2(w, C_{y_0})\} = \mathfrak{d}_2^x(v, w). \end{aligned}$$

Если $v \in C_{y_0}$, $w, u \notin C_{y_0}$, то

$$\mathfrak{d}_2^x(v, w) = d_2(w, C_{y_0}) \leq c(d_2(w, u) + d_2(u, C_{y_0})), \quad (2.7)$$

где $c > 0$ — константа из обобщенного неравенства треугольника. Действительно, пусть $d_2(u, C_{y_0}) = d_2(u, z)$ (существование точки $z \in C_{y_0}$ обеспечено компактностью C_{y_0}). Тогда

$$\mathfrak{d}_2^x(v, w) = d_2(w, C_{y_0}) \leq d_2(w, z) \leq c(d_2(w, u) + d_2(u, z)) = c(\mathfrak{d}_2^x(u, w) + \mathfrak{d}_2^x(u, v)),$$

если $\mathfrak{d}_2^x(w, u) = d_2(w, u)$. Если $\mathfrak{d}_2^x(w, u) = d_2(w, C_{y_0}) + d_2(u, C_{y_0})$, то выполнение обобщенного неравенства треугольника очевидно. Случай, когда $w \in C_{y_0}$, $v, u \notin C_{y_0}$, аналогичен предыдущему.

В случаях, когда $v \notin C_{y_0}$, $u, w \in C_{y_0}$, и $w \notin C_{y_0}$, $u, v \in C_{y_0}$, при проверке обобщенного неравенства треугольника имеем соответственно соотношения $d_2(v, C_{y_0}) = d_2(v, C_{y_0})$ и $d_2(w, C_{y_0}) = d_2(w, C_{y_0})$, из которых следует нужное свойство.

Пусть $u, v, w \notin C_{y_0}$. Если $\mathfrak{d}_2^x(v, u) = d_2(v, u)$ и $\mathfrak{d}_2^x(u, w) = d_2(u, w)$ или $\mathfrak{d}_2^x(v, u) = d_2(v, C_{y_0}) + d_2(u, C_{y_0})$ и $\mathfrak{d}_2^x(u, w) = d_2(u, C_{y_0}) + d_2(w, C_{y_0})$, то обобщенное неравенство треугольника очевидно. Если $\mathfrak{d}_2^x(v, u) = d_2(v, u)$ и $\mathfrak{d}_2^x(u, w) = d_2(u, C_{y_0}) + d_2(w, C_{y_0})$, то имеем $d_2(v, C_{y_0}) \leq c(d_2(v, u) + d_2(u, C_{y_0}))$ в силу аргументов, примененных для доказательства (2.7), поэтому $\mathfrak{d}_2^x(v, w) \leq c(\mathfrak{d}_2^x(v, u) +$

$\mathfrak{d}_2^x(u, w)$). Случай $\mathfrak{d}_2^x(w, u) = d_2(w, u)$ и $\mathfrak{d}_2^x(u, v) = d_2(u, C_{y_0}) + d_2(v, C_{y_0})$ рассматривается аналогично. Свойство доказано. $\square$

Определим теперь $\mathfrak{d}_2^x$ «глобально», на всей окрестности точки x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Пусть $v_0, w_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$ и

$$v \in \exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(v_0), \quad w \in \exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(w_0).$$

Положим

$$\mathfrak{d}_2^x(v, w) = \begin{cases} d_2^x(v_0, w_0), & \text{если } v \in C_{v_0} \text{ и } w \in C_{w_0}, \\ \min\{d_2(v, w), d_2(v, C_{v_0}) + d_2(w, C_{w_0}) + d_2^x(v_0, w_0)\} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Свойство 2.14. Функция $\mathfrak{d}_2^x$ является квазиметрикой на $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ (с учетом того, что точки из C_{y_0} для каждого $y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$ отождествляются).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.15. Мы определяем локальное свойство множеств уровня. Аналог расстояния, как видно из определения, ассоциирован с фиксированной точкой x и соответствующей локальной группой Карно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.16. Множества $\text{Box}_{\mathfrak{d}_2^x}(y, r) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{z \in \varphi^{-1}(\varphi(x)) : \mathfrak{d}_2^x(y, z) < r\}$, $y \in C_{y_0}$, совпадают с множеством $\{v \in \exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(v_0) : v_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x), d_2^x(y_0, v_0) < r\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17. Мера Хаусдорфа множества $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))$ равна

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\tilde{\nu}}(A) = \omega_{\nu-\tilde{\nu}} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{\nu-\tilde{\nu}} : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_{\mathfrak{d}_2^x}(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18. Параметризацией множества уровня называется соответствие

$$\pi_x : y_0 \mapsto C_{y_0}. \quad (2.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.19. В случае гладких контактных отображений π_x является отображением [11].

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.20. Обозначим символом $\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\tilde{\nu}}$ меру Хаусдорфа размерности $\nu - \tilde{\nu}$ на локальной однородной группе $\mathcal{G}^x \mathbb{M}$.

Из свойств $\mathfrak{d}_2^x$ выводится формула вычисления $\mathcal{H}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\tilde{\nu}}$ -меры в общем случае.

Теорема 2.21. Для $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))$ имеем $\mathcal{H}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\tilde{\nu}}(A) = \widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\tilde{\nu}}(\pi_x^{-1}(A))$, где π_x определено в (2.9). В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\tilde{\nu}}(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_{\mathfrak{d}_2^x}(y, r)) \\ = \widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\tilde{\nu}}(\exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(\pi_x^{-1}(y), r)) = \omega_{\nu-\tilde{\nu}} r^{\nu-\tilde{\nu}} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

для $\varphi(y) = \varphi(x)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Здесь действие π_x^{-1} на y совпадает с действием на множестве $C_{y_0} \ni y$, $y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат следует из свойства соответствия (2.9). Покажем, что оно является изометрией. Действительно, по определению π_x для $w \in C_{w_0}$ и $v \in C_{v_0}$ имеем $w \in \pi_x(w_0)$ и $v \in \pi_x(v_0)$. В силу соотношения (2.8)

$\mathfrak{d}_2^x(w, v) = d_2^x(w_0, v_0)$. Тогда всякому покрытию $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_{\mathfrak{d}_2^x}(x_i, r_i)$, $x_i \in A$, шарами подмножества $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))$ из определения меры $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\bar{\nu}}$ соответствует покрытие $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2^x(\pi_x^{-1}(x_i), r_i)$ шарами подмножества $\pi_x^{-1}(A) \subset \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$ из определения $\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}$ (см. замечание 2.16), и наоборот. Дело в том, что

$$\pi_x^{-1}(\text{Box}_{\mathfrak{d}_2^x}(y, r) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) = \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2^x(\pi_x^{-1}(y), r),$$

так как для всякого $z \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2^x(\pi_x^{-1}(y), r)$ имеем $C_z \neq \emptyset$ в силу леммы 2.10. Кроме того, каждой паре покрытий соответствует одна и та же сумма $\omega_{\nu-\bar{\nu}} \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{\nu-\bar{\nu}}$. Далее,

$$\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}(\exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2^x(\pi_x^{-1}(y), r)) = \omega_{\nu-\bar{\nu}} r^{\nu-\bar{\nu}} (1 + o(1)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ по свойствам множеств уровня контактного отображения

$$\psi_x : s \mapsto \widehat{D}\varphi(x)\langle s \rangle \quad (2.10)$$

(см., например, [11]). $\square$

Аналогичный результат справедлив и для случая компактных подмножеств множеств уровня. Если множество $S \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, R)$ компактно, то его образ при непрерывном отображении проекции π_x^{-1} на $\exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$ также компактен, следовательно, измерим. Из свойств измеримых множеств следует, что почти каждая его точка является точкой плотности, в данном случае — относительно $\widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}$ -меры, построенной относительно римановой метрики на $\exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x) \cap \mathcal{G}^x \mathbb{M}$. Из результатов [11] следует, что, так как классический дифференциал отображения (2.10) в каждой точке совпадает с его h -дифференциалом, всякое множество нулевой $\widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}$ -меры является множеством нулевой $\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}$ -меры. Действительно, если $\widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}(E) = 0$, $E \subset \psi_x^{-1}(\varphi(x))$ (см. (2.10)), то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие его шарами

$$\{\text{Box}_2^x(x_i, r_i) \cap \psi_x^{-1}(\varphi(x)), x_i \in \psi_x^{-1}(\varphi(x))\}, \quad (2.11)$$

что сумма их $\widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}$ -мер не превосходит ε . С помощью увеличения радиуса в ограниченное число раз можно считать, что $x_i \in E$. Следовательно, $\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}(E) = 0$ и $\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}$ -почти все точки $\pi_x^{-1}(S)$ являются точками плотности относительно $\widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}$ -меры.

Далее, так как π_x — изометрия, множеству $\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}$ -меры нуль на $\pi_x^{-1}(S)$ соответствует множество нулевой $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\bar{\nu}}$ -меры на S . Рассмотрим точку плотности y множества $\pi_x^{-1}(S)$. Покажем, что для пересечения $\text{Box}_2^x(y, r) \cap \pi_x^{-1}(S)$ справедливо

$$\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}(\text{Box}_2^x(y, r) \cap \pi_x^{-1}(S)) = \omega_{\nu-\bar{\nu}} r^{\nu-\bar{\nu}} (1 + o(1)), \quad (2.12)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Шары из определения $\widehat{\mathcal{H}}_x^{\nu-\bar{\nu}}$ образуют покрытие Витали; без ограничения общности можно считать, что пересечения этих шаров с $\exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$ лежат в $\text{Box}_2^x(y, r) \cap \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$. По теореме Витали можно выбрать систему дизъюнктивных шаров, покрывающую $\text{Box}_2^x(y, r) \cap \pi_x^{-1}(S)$

с точностью до множества $\widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}$ -меры нуль T , и затем применить для T использованные ранее аргументы о покрытии шарами вида (2.11). Предположим, что сумма $\widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}$ -мер пересечений покрывающих T шаров и $\psi_x^{-1}(\varphi(x))$ не превосходит $\sigma r^{\nu-\tilde{\nu}}$. Далее, пусть $\omega(\cdot)$ — множитель, зависящий от значения риманова тензора, такой, что для каждого $\text{Box}_2^x(x_i, r_i)$ выполняется

$$\omega_{\nu-\tilde{\nu}} r_i^{\nu-\tilde{\nu}} = \omega(x_i) \widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}(\text{Box}_2^x(x_i, r_i) \cap \exp(\ker \hat{D}\varphi(x))(x))(1 + o(1)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r_i \rightarrow 0$ равномерно на некоторой окрестности x . Тогда для выбранного покрытия выводим

$$\begin{aligned} \omega_{\nu-\tilde{\nu}} \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{\nu-\tilde{\nu}} + \sigma r^{\nu-\tilde{\nu}} \\ = (1 + o(1)) \omega(x) \sum_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}(\text{Box}_2^x(x_i, r_i) \cap \exp(\ker \hat{D}\varphi(x))(x)) + \sigma r^{\nu-\tilde{\nu}} = \Sigma, \end{aligned}$$

поскольку значение $\omega(x)$ строго отделено от нуля, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. С одной стороны, так как y — точка плотности $\pi_x^{-1}(S)$, то

$$\Sigma \geq \omega(x) \widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}(\text{Box}_2^x(y, r) \cap \exp(\ker \hat{D}\varphi(x))(x))(1 - o(1)) + \sigma r^{\nu-\tilde{\nu}},$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, причем стремление $o(1)$ к нулю зависит от y . С другой стороны, так как покрытие множества $\text{Box}_2^x(y, r) \cap \pi_x^{-1}(S) \setminus T$ дизъюнктно, то

$$\Sigma \leq \omega(x) \widehat{\mathcal{H}}_x^{N-\tilde{N}}(\text{Box}_2^x(y, r) \cap \exp(\ker \hat{D}\varphi(x))(x))(1 + o(1)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, причем стремление $o(1)$ к нулю зависит от y . Отсюда вытекает справедливость (2.12). Далее достаточно применить аргументы доказательства теоремы 2.21 о соответствии покрытий. Аналогичные рассуждения верны и для множеств $S \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))$, прообраз которых при π_x измерим.

Таким образом, доказано

Свойство 2.22. Если прообраз множества $S \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, R)$ при π_x измерим и лежит в $\exp(\ker \hat{D}\varphi(x))(x) \cap \text{Box}_2(x, R)$, то для $\mathcal{H}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\tilde{\nu}}$ -почти всех $y \in S$ имеем

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}_2^x}^{\nu-\tilde{\nu}}(S \cap \text{Box}_2^x(y, r)) = \omega_{\nu-\tilde{\nu}} r^{\nu-\tilde{\nu}}(1 + o(1))$$

для $\varphi(y) = \varphi(x)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, причем стремление $o(1)$ к нулю зависит от y .

Опишем еще одно свойство поверхностей уровня, связанное с адаптированным базисом. Как показано ранее в работах, посвященных исследованию классов отображений групп Карно [20, 21], где размерность образа была не меньше размерности прообраза, в окрестности каждой точки существовал адаптированный базис, согласовывающий субримановы структуры образа отображения и пространства-образа. В нашем случае для отображений групп Карно на прообразе существует адаптированный базис, согласующий расстояние в образе

$$o(d_2(y, z)) = \tilde{d}_2(\varphi(z), \hat{D}\varphi(y)\langle z \rangle) = \tilde{d}_2(\varphi(y), \hat{D}\varphi(y)\langle z \rangle),$$

$y, z \in C_{y_0}$, и расстояние на C_{y_0} между точками y и z .

Далее будем считать, что точка x фиксирована, а $N - \tilde{N}$ базисных полей в этой точке принадлежат $\ker \hat{D}\varphi(x)$ (см. [11]). Будем полагать, что остальные поля лежат в $(\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$ в том смысле, что на них $\hat{D}\varphi(x)$ строго отделен от нуля. Кроме того, под $(\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$ будем понимать линейную оболочку этих базисных полей, а запись $X_i \in (\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$ ($X_i \notin (\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$) означает, что $X_i(x) \in (\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$ ($X_i(x) \notin (\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$).

Теорема 2.23. В окрестности каждой точки $y \in C_{y_0}$, $y_0 \in \exp(\ker \widehat{D}\varphi(x))(x)$, существует такой базис $\{^{y,z}X_i\}_{i=1}^N$, для расстояния $^{y,z}d_2$ в котором справедливо

$$\tilde{d}_2(\varphi(z), \widehat{D}\varphi(y)\langle z \rangle) = \tilde{d}_2(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(y)\langle z \rangle) = O(^{y,z}d_2(y, z)),$$

где $z \in C_{y_0}$. При этом векторные поля из $\ker \widehat{D}\varphi(x)$ остаются без изменений, а остальные поля преобразуются в виде

$$^{y,z}X_k = X_k + \sum_{l: X_l \in \ker \widehat{D}\varphi(x)} a_{kl}(y, z)X_l,$$

где $|a_{kl}(y, z)| = 0$, если $\deg X_l \leq \deg X_k$, и

$$|a_{kl}(y, z)| \leq O((d_2(y_0, y) + d_2(y, z))^{\deg X_l - \deg X_k}),$$

если $\deg X_l > \deg X_k$, $k, l = 1, \dots, N$. Кроме того, если положить

$$^y\tilde{X}_k = X_k + \sum_{l: X_l \in \ker \widehat{D}\varphi(x)} a_{kl}^L(y)X_l,$$

где $a_{kl}^L(y)$ — линейная часть по нормальным координатам z относительно y , причем

$$|a_{kl}^L(y)| = O(d_2(y_0, y)^{\deg X_l - \deg X_k}),$$

определить для фиксированного y на $\exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0) \ni y$ отображение

$$\psi(s) : \exp\left(\sum_{k: X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} s_k \cdot ^y\tilde{X}_k\right)(y) \mapsto \exp\left(\sum_{k: X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} s_k \cdot ^{y,z}X_k\right)(y),$$

где $(s_1, \dots, s_N)$ таковы, что $\exp\left(\sum_{k: X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} s_k \cdot ^{y,z}X_k\right)(y) = z$, и поля $^yX_k =$

$\psi_*^y\tilde{X}_k$ для всех k таких, что $X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp$, то и для расстояния $^y d_2$ в базисе $\{^yX_k\}$ верно

$$\tilde{d}_2(\varphi(z), \widehat{D}\varphi(y)\langle z \rangle) = \tilde{d}_2(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(y)\langle z \rangle) = O(^y d_2(y, z)), \quad z \in C_{y_0}. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(y_0)$ и $z = \exp\left(\sum_{i=1}^N z_i X_i\right)(y_0)$, где координаты не равны нулю, только если поля принадлежат $(\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp$. Вычислим координаты точки z относительно y . Имеем $z = \exp\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i X_i\right)(y)$, где

$$\zeta_i = \begin{cases} z_i - y_i, & \text{если } \deg X_i = 1, X_i \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp, \\ 0, & \text{если } \deg X_i = 1, X_i \notin (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp, \\ z_i - y_i + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha\beta}^i(-y)^\alpha z^\beta, & \text{если } \deg X_i > 1, X_i \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp, \\ \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha\beta}^i(-y)^\alpha z^\beta, & \text{если } \deg X_i > 1, X_i \notin (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp. \end{cases}$$

Здесь $(-y)$ и z со знаком степени понимаются как набор координат $(-y_1, \dots, -y_N)$ и $(z_1, \dots, z_N)$ соответственно. Покажем, что для таких X_i , что $X_i \notin (\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$, выполняется

$$\zeta_i = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \beta > 0}} Q_{\alpha, \beta}^i y^\alpha \zeta^\beta. \quad (2.14)$$

Это свойство очевидно для $\deg X_i = 2$. Действительно, в этом случае

$$\zeta_i = \sum_{\deg X_j + \deg X_k = 2} F_{e_j e_k}^i (-y_j) \zeta_k.$$

Пусть $\deg X_i > 1$. Предположим, что для всех полей X_m , степень которых меньше $\deg X_i$, доказано, что

$$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_m, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^m (-y)^\alpha z^\beta = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_m, \\ \alpha, \beta > 0}} Q_{\alpha, \beta}^m y^\alpha \zeta^\beta.$$

Для каждого X_i такого, что $X_i \notin (\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp$, и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ заменим в множителях $z^\beta = \prod_{j=1}^N z_j^{\beta_j}$ элементы z_j на $z_j = y_j + (z_j - y_j)$. Тогда, полагая $\beta_0 = 0$ и $y_0 = 1$, получаем

$$\begin{aligned} z^\beta &= \prod_{j=1}^N z_j^{\beta_j} = \prod_{j=1}^N (y_j + (z_j - y_j))^{\beta_j} \\ &= \prod_{j=1}^N \left(y_j^{\beta_j} + (z_j - y_j)^{\beta_j} + \sum_{k=1}^{\beta_j-1} C_{\beta_j}^k y_j^k (z_j - y_j)^{\beta_j-k} \right) \\ &= y^\beta + \sum_{l=1}^{N-1} \left[\prod_{m=0}^{l-1} y_m^{\beta_m} \times \left((z_l - y_l)^{\beta_l} + \sum_{k=1}^{\beta_l-1} C_{\beta_l}^k y_l^k (z_l - y_l)^{\beta_l-k} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j>l} \left(y_j^{\beta_j} + (z_j - y_j)^{\beta_j} + \sum_{k=1}^{\beta_j-1} C_{\beta_j}^k y_j^k (z_j - y_j)^{\beta_j-k} \right) \right] = y^\beta + \sum_{l=1}^{N-1} \kappa_l(z, \beta). \end{aligned}$$

Из этого представления следует, что в выражениях

$$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^i (-y)^\alpha z^\beta = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^i (-y)^\alpha \left(y^\beta + \sum_{l=1}^{N-1} \kappa_l(z, \beta) \right)$$

при замене $\{z_k\}_{k=1}^N$ на $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$ не будет слагаемых, зависящих только от координат y . Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^i (-y)^\alpha \left(y^\beta + \sum_{l=1}^{N-1} \kappa_l(z, \beta) \right) \\ = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \beta > 0}} F_{\alpha, \beta}^i (-y)^\alpha \sum_{l=1}^{N-1} \kappa_l(z, \beta). \quad (2.15) \end{aligned}$$

Заметим, что для всякого слагаемого вида $z_p - y_p$ имеем $X_p \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp$. Тогда $z_p - y_p = \zeta_p$ для $\deg X_p = 1$, а для $\deg X_p > 1$ справедливо $z_p - y_p = \zeta_p - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_p, \\ \mu, \lambda > 0}} F_{\mu\lambda}^p(-y)^\mu z^\lambda$. Следовательно, каждое слагаемое $\kappa_l(z, \beta)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} \kappa_l(z, \beta) &= \prod_{m=0}^{l-1} y_m^{\beta_m} \left((z_l - y_l)^{\beta_l} + \sum_{k=1}^{\beta_l-1} C_{\beta_l}^k y_l^k (z_l - y_l)^{\beta_l-k} \right) \\ &\quad \times \prod_{j>l} \left(y_j^{\beta_j} + (z_j - y_j)^{\beta_j} + \sum_{k=1}^{\beta_j-1} C_{\beta_j}^k y_j^k (z_j - y_j)^{\beta_j-k} \right) \\ &= \prod_{m=0}^{l-1} y_m^{\beta_m} \times \left[\left(\zeta_l - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu, \lambda > 0}} F_{\mu\lambda}^l(-y)^\mu z^\lambda \right)^{\beta_l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\beta_l-1} C_{\beta_l}^k y_l^k \left(\zeta_l - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu, \lambda > 0}} F_{\mu\lambda}^l(-y)^\mu z^\lambda \right)^{\beta_l-k} \right] \\ &\quad \times \prod_{j>l} \left[y_j^{\beta_j} + \left(\zeta_j - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_j, \\ \mu, \lambda > 0}} F_{\mu\lambda}^j(-y)^\mu z^\lambda \right)^{\beta_j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\beta_j-1} C_{\beta_j}^k y_j^k \left(\zeta_j - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_j, \\ \mu, \lambda > 0}} F_{\mu\lambda}^j(-y)^\mu z^\lambda \right)^{\beta_j-k} \right]. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Так как в (2.16) выполняется $\deg X_l, \deg X_j \leq |\beta|_h < \deg X_i$, по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu, \lambda > 0}} F_{\mu\lambda}^l(-y)^\mu z^\lambda &= \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu, \lambda > 0}} Q_{\mu\lambda}^l y^\mu \zeta^\lambda, \\ \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_j, \\ \mu, \lambda > 0}} F_{\mu\lambda}^j(-y)^\mu z^\lambda &= \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_j, \\ \mu, \lambda > 0}} Q_{\mu\lambda}^j y^\mu \zeta^\lambda. \end{aligned}$$

Поэтому (2.16) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \prod_{m=0}^{l-1} y_m^{\beta_m} &\left[\left(\zeta_l - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu, \lambda > 0}} Q_{\mu\lambda}^l y^\mu \zeta^\lambda \right)^{\beta_l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\beta_l-1} C_{\beta_l}^k y_l^k \left(\zeta_l - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_l, \\ \mu, \lambda > 0}} Q_{\mu\lambda}^l y^\mu \zeta^\lambda \right)^{\beta_l-k} \right] \\ &\quad \times \prod_{j>l} \left[y_j^{\beta_j} + \left(\zeta_j - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_j, \\ \mu, \lambda > 0}} Q_{\mu\lambda}^j y^\mu \zeta^\lambda \right)^{\beta_j} \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\beta_j-1} C_{\beta_j}^k y_j^k \left(\zeta_j - \sum_{\substack{|\mu+\lambda|_h = \deg X_j, \\ \mu, \lambda > 0}} Q_{\mu\lambda}^j y^\mu \zeta^\lambda \right)^{\beta_j-k} \Big].$$

Из записи видно, что это полином от координат точки y относительно y_0 и точки z относительно y весовой степени $|\beta|_h$. Отсюда и из (2.15) вытекает, что верно соотношение (2.14). Тогда

$$z = \exp \left(\sum_{i: X_i \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \zeta_i X_i + \sum_{j: X_j \notin (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_j, \\ \alpha, \beta > 0}} Q_{\alpha,\beta}^j y^\alpha \zeta^\beta X_j \right) (y).$$

Перепишем

$$\begin{aligned} & \sum_{i: X_i \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \zeta_i X_i + \sum_{j: X_j \notin (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_j, \\ \alpha, \beta > 0}} Q_{\alpha,\beta}^j y^\alpha \zeta^\beta X_j \\ &= \sum_{i: X_i \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \zeta_i \left(X_i + \sum_j \sum_{|\alpha|_h = \deg X_j - \deg X_i} Q_{\alpha,\beta}^j y^\alpha X_j \right. \\ & \quad \left. + \sum_j \sum_{\substack{|\alpha+\beta'|_h = \deg X_j - \deg X_i, \\ \alpha, \beta' > 0}} Q_{\alpha,\beta}^j y^\alpha \zeta^{\beta'} X_j \right). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} {}^y z X_k &= X_k + \sum_j \sum_{|\alpha|_h = \deg X_j - \deg X_k} Q_{\alpha,\beta}^j y^\alpha X_j \\ & \quad + \sum_j \sum_{\substack{|\alpha+\beta'|_h = \deg X_j - \deg X_k, \\ \alpha, \beta' > 0}} Q_{\alpha,\beta}^j y^\alpha \zeta^{\beta'} X_j, \quad (2.17) \\ {}^y \widetilde{X}_k &= X_k + \sum_j \sum_{|\alpha|_h = \deg X_j - \deg X_k} Q_{\alpha,\beta}^j y^\alpha X_j \end{aligned}$$

для таких k , что $X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp$, а также зададим на $\exp((\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0) \ni y$ (напомним, что точка y фиксирована)

$$\psi' : z \mapsto \exp \left(\sum_{k: X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \zeta_k \cdot {}^y \widetilde{X}_k \right) (y)$$

и $\psi = (\psi')^{-1}$. Определение ψ корректно, так как замена (2.17) с учетом того, что поля из $\ker \widehat{D}\varphi(x)$ не меняются, невырожденна. Тогда для ${}^y X_k = \psi_* {}^y \widetilde{X}_k$, где $X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp$, имеем

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{k: X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \zeta_k \cdot {}^y X_k \right) (y) &= \exp \left(\sum_{k: X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \zeta_k \cdot \psi_* {}^y \widetilde{X}_k \right) (y) \\ &= \psi \left(\exp \left(\sum_{k: X_k \in (\ker \widehat{D}\varphi(x))^\perp} \zeta_k \cdot {}^y \widetilde{X}_k \right) (y) \right) = z = \exp \left(\sum_{k=1}^N \zeta_k X_k \right) (y). \end{aligned}$$

Тогда $\tilde{d}_2(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(y)\langle z \rangle) = O({}^y d_2(y, z))$, где ${}^y d_2$ определено так же, как и в соотношении (1.3), с заменой $\{X_i\}_{i=1}^N$ новыми полями $\{{}^y X_i\}_{i=1}^N$, и, кроме того, для $z \in C_{y_0}$ справедливо (2.13). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.24. Таким образом, найден базис, в котором субриманов дифференциал не аппроксимирует φ на точках множества уровня: для $y, z \in C_{y_0}$ (где $\varphi(y) = \varphi(z)$) выполняется

$$\tilde{d}_2(\varphi(z), \hat{D}\varphi(y)\langle z \rangle) \geq K \cdot {}^y d_2(y, z), \quad K > 0.$$

При этом он согласует субримановы структуры окрестности $\varphi(x) = \varphi(y)$ и пересечения окрестности точки y и $\exp((\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0)$.

Следствие 2.25. Если в C_{y_0} существует хотя бы одна точка y такая, что выполняется

$${}^y d_2(y, z) > \frac{\xi_y(z)}{K(y)} d_2(y, z) \quad \text{для всех } z \in \exp((\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0),$$

то C_{y_0} состоит из одной точки. Здесь

$$K(y) = \inf_{z: z \in \exp((\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp)(y_0)} \left\{ \frac{\tilde{d}_2(\varphi(y), \hat{D}\varphi(y)\langle z \rangle)}{\max_{i: X_i \in (\ker \hat{D}\varphi(x))^\perp} \{ |\zeta_i|^{\frac{1}{\deg X_i}} \}} \right\},$$

где $z = \exp\left(\sum_{i=1}^N \zeta_i X_i\right)(y)$.

Утверждение выводится прямыми вычислениями методом от противного. Для этого достаточно расписать упомянутое неравенство в терминах $K(y)$ и предположить существование такого z , что $\varphi(z) = \varphi(y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koranyi A., Reimann H. M. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
2. Koranyi A., Reimann H. M. Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
3. Warhurst B. Contact and quasiconformal mappings on real model filiform groups // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. V. 68. P. 329–343.
4. Warhurst B. Jet spaces as nonrigid Carnot groups // J. Lie Theory. 2005. V. 15. P. 341–356.
5. Карманова М. Б. Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.
6. Karmanova M. B. Graphs of Lipschitz mappings on two-step sub-Lorentzian structures with multidimensional time // Dokl. Math. 2018. V. 98, N 1. P. 360–363.
7. Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F. Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group // Math. Ann. 2001. V. 321. P. 479–531.
8. Басалаев С. Г. Одномерные поверхности уровня hc -дифференцируемых отображений пространств Карно — Каратеодори // Вестн. НГУ. 2013. Т. 13, № 4. С. 16–36.
9. Kozhevnikov A. Propriétés métriques des ensembles de niveau des applications différentiables sur les groupes de Carnot. Géométrie métrique. Paris XI: Univ. Paris Sud, 2015.
10. Franchi B., Serapioni R. Intrinsic Lipschitz graphs within Carnot groups // J. Geometric Analysis. 2016. V. 26, N 3. P. 1946–1994.
11. Karmanova M., Vodopyanov S. A coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128, N 1. P. 67–111.
12. Basalaev S. G., Vodopyanov S. Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
13. Gromov M. Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser-Verl., 1996. P. 79–318.
14. Nagel A., Stein E. M., Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.

15. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemporary Math.; V. 424).
16. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces, Differentiability, Coarea and Area Formulas // Analysis and Mathematical Physics. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
17. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
18. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
19. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
20. *Карманова М. Б.* О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 305–332.
21. *Карманова М. Б.* Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.
22. *Карманова М. Б.* Тонкие свойства базисных векторных полей на пространствах Карно — Каратеодори в условиях минимальной гладкости // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 87–99.

Поступила в редакцию 17 сентября 2018 г.

После доработки 30 апреля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com