E. S. Kornev, Subtwistor structures and subtwistor bundle, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1310–1323

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.610>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.209.52.79

April 26, 2023, 13:23:41

УДК 514.763

СУБТВИСТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ И СУБТВИСТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ

Е. С. Корнев

Аннотация. Вводятся понятия субтвисторной структуры и субтвисторного расслоения. Рассмотрены частные случаи субтвисторных структур — субкэлеровы структуры. Описано субтвисторное расслоение для четырехмерной сферы. Приведены примеры многообразий, допускающих и не допускающих субтвисторную структуру. Приведены условия существования на вещественном многообразии произвольной размерности субкэлеровой структуры, что влечет существование кэлеровых подмногообразий.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.610

Ключевые слова: субтвисторная структура, субкэлерова структура, субтвисторное расслоение, радикал внешней формы.

§ 1. Введение

В теории кэлеровых и комплексных многообразий известны понятия твисторного расслоения и твисторной структуры. В данной работе изучается обобщение понятия твисторного расслоения — субтвисторное расслоение. В [1] введено понятие субтвисторной структуры как обобщение твисторной структуры на случай вырожденной кососимметричной 2-формы на многообразии произвольной размерности. Для построения субтвисторного расслоения на многообразии M произвольной размерности необходимо задать в каждой точке из M кососимметричную 2-форму Ω , множество всех аффиноров, ассоциированных с Ω в этой точке, и множество всевозможных скалярных произведений в векторном пространстве $\text{rad } \Omega_x$, которое является радикалом (в другой терминологии, ядром) 2-формы Ω в точке x . При этом 2-форма Ω может быть вырожденной, т. е. иметь ненулевой радикал. В отличие от классического твисторного расслоения субтвисторное расслоение можно определить для многообразия любой размерности как четной, так и не четной. В данной работе приведены примеры многообразий, которые допускают или не допускают субтвисторную структуру, а также дано описание субтвисторного расслоения для некоторых многообразий.

Интерес к изучению вырожденных кососимметричных 2-форм обусловлен задачами получения симплектических и кэлеровых подмногообразий в многообразиях произвольной размерности. Например, в [2] изучаются однородные пространства с инвариантной вырожденной кососимметричной замкнутой 2-формой, а в [1, 3] рассматриваются субкэлеровы структуры, с помощью которых можно получать кэлеровы подмногообразия. Кроме того, субтвисторные структуры возникают в различных физических приложениях римановой геометрии,

в частности, в теории струн, аналитической механике и теории пространств Калаби — Яу.

Чтобы определить на многообразии M субтвисторную структуру, необходимо задать на M регулярную кососимметричную 2-форму Ω с ненулевым радикалом $\text{rad } \Omega$, дополнительное к $\text{rad } \Omega$ распределение касательных подпространств D , на котором 2-форма Ω невырожденная, аффинор Φ , который является обобщением понятия почти комплексной структуры, ассоциированной с Ω , и скалярное произведение на распределении $\text{rad } \Omega$, называемое метрикой радикала, с помощью которого можно получить глобальную риманову метрику на многообразии M . Субтвисторные структуры с замкнутой 2-формой Ω позволяют определить понятие субкэлеровой структуры (см. [1]), а субтвисторные структуры с точной 2-формой Ω позволяют получить аффинорные метрические структуры (см. [4, 5]), которые являются обобщением контактных метрических структур для многообразий любой размерности и алгеброидов Ли. В настоящей работе показано, как с помощью субтвисторных и субкэлеровых структур можно получать в многообразии произвольной вещественной размерности кэлеровы подмногообразия, а также субтвисторное расслоение для многообразий, на которых не существует симплектической или кэлеровой структуры.

В § 2 даются необходимые сведения и свойства для субтвисторных структур, введенных в [1]. В § 3 рассматривается частный случай субтвисторных структур — субкэлеровы структуры, а также даются условия, при которых субтвисторная структура определяет субкэлерову структуру. В § 4 вводится понятие субтвисторного расслоения и показано, как оно связано с вопросом существования на многообразии субтвисторной структуры. В § 5 описывается субтвисторное расслоение для четырехмерной сферы. В § 6 изучаются инвариантные субтвисторные структуры и приведены однородные примеры субтвисторных структур. Используются результаты и понятия, ранее описанные в [1, 3].

§ 2. Субтвисторные структуры

Пусть M — гладкое вещественное многообразие размерности $n \geq 3$, Ω — билинейная форма на M и X — гладкое векторное поле на M . Будем обозначать через $I_X \Omega$ внутреннее произведение векторного поля X и билинейной формы Ω , результатом которого является 1-форма $I_X \Omega$ такая, что $I_X \Omega(Y) = \Omega(X, Y)$ для любого векторного поля Y на M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Радикалом билинейной формы Ω на многообразии M в точке x называется касательное подпространство $\text{rad } \Omega_x = \{v \in T_x M : I_v \Omega_x = 0\}$. Форма Ω называется *регулярной*, если распределение радикалов $\text{rad } \Omega$ имеет постоянный ранг на M .*

Через $\text{rad } \Omega$ будем обозначать распределение радикалов билинейной формы Ω на многообразии M . Иногда радикал билинейной формы Ω называют *ядром* Ω . Очевидно, что билинейная форма Ω невырожденна тогда и только тогда, когда $\text{rad } \Omega = \{0\}$.

Теорема 2.2. *Пусть M — гладкое многообразие размерности $n \geq 3$, Ω — кососимметричная регулярная 2-форма на M и r — ранг распределения $\text{rad } \Omega$. Тогда*

- (1) *если n четно, то r также четно и $0 \leq r \leq n - 2$;*
- (2) *если n нечетно, то r также нечетно и $1 \leq r \leq n - 2$;*

(3) если $d\Omega = 0$, то $\text{rad } \Omega$ — голономное распределение на M .

Доказательство пп. (1), (2) можно найти в [4], а доказательство п. (3) — в [1]. Пусть D — распределение касательных подпространств на многообразии M , дополнительных к $\text{rad } \Omega$, таких, что ограничение 2-формы Ω на любой слой этого распределения невырожденное. Такое распределение называется *рабочим расслоением* для 2-формы Ω . Из теоремы 2.2 следует, что рабочее расслоение D имеет четный ранг для многообразия любой размерности. Этот факт позволяет ввести важное понятие аффинора, ассоциированного с регулярной кососимметричной 2-формой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть Ω — регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M и D — рабочее расслоение для 2-формы Ω . *Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω* , называется непрерывное поле Φ эндоморфизмов касательных подпространств на M , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) $\ker \Phi = \text{rad } \Omega$;
- (2) $\Phi^2|_D = -\text{id}$, где id — поле тождественных операторов на M ;
- (3) $\Omega \circ \Phi = \Omega$;
- (4) $\Omega(X, \Phi X) \geq 0$ для любого векторного поля $X \in C^1(TM)$.

Сразу из определения получаем следующие важные свойства аффинора.

Предложение 2.4. Пусть Φ — аффинор, ассоциированный с регулярной кососимметричной 2-формой Ω на многообразии M , и D — рабочее расслоение для Ω .

- (1) Ограничение аффинора Φ на рабочее расслоение D есть комплексная структура в слоях распределения D , сохраняющая 2-форму Ω .
- (2) Для любой непрерывной функции λ на M такой, что $\lambda(x) > 0$ для всех $x \in M$ Φ , является аффинором, ассоциированным с 2-формой $\lambda\Omega$.
- (3) Для любой непрерывной функции μ на M такой, что $\mu(x) < 0$ для всех $x \in M$, $-\Phi$ является аффинором, ассоциированным с 2-формой $\mu\Omega$.

Пусть Ω — регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M с рабочим расслоением D и Φ — аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω . Обозначим через Ω_Φ симметричную 2-форму на M такую, что $\Omega_\Phi(X, Y) = \Omega(X, \Phi Y)$ для любых векторных полей $X, Y \in C^1(TM)$.

Из определения 2.3 следует, что $\text{rad } \Omega_\Phi = \text{rad } \Omega$ и ограничение формы Ω_Φ на рабочее расслоение D является скалярным произведением в слоях расслоения D . *Метрикой радикала* билинейной регулярной формы Ω на многообразии M называется симметричная билинейная форма β на M такая, что $\text{rad } \beta = D$, где D — рабочее расслоение для Ω , и ограничение формы β на $\text{rad } \Omega$ является скалярным произведением в слоях расслоения $\text{rad } \Omega$. Определим на M риманову метрику $g = \Omega_\Phi + \beta$. Для этого требуется набор объектов (Ω, D, Φ, β) , где Ω — регулярная кососимметричная 2-форма на M , D — рабочее расслоение для Ω , Φ — ассоциированный с 2-формой Ω аффинор и β — метрика радикала 2-формы Ω . Такой набор объектов называется *субтвисторной структурой на многообразии M* . Очевидно, что при $\text{rad } \Omega = \{0\}$ будет $D = TM$, $\beta = 0$, и (Ω, Φ) — твисторная структура на M . Альтернативное определение субтвисторной структуры, свойства и примеры субтвисторных структур можно найти в [1].

Для изучения вопроса существования на многообразиях субтвисторной структуры потребуются топологические условия, связанные с характеристическими классами. Пусть E — векторное расслоение над гладким многообразием

M , $e(E)$ — класс Эйлера векторного расслоения E и $w_1(E)$ — первый класс Штиффеля — Уитни векторного расслоения E . Если на M существует глобальное всюду отличное от 0 сечение, то $e(E) = 0$. Если в слоях векторного расслоения E задана ориентация, непрерывно зависящая от точки $x \in M$, и многообразие M ориентируемо, то $w_1(E) = 0$ (см. [6]).

Пусть (Ω, D, Φ, β) — субтвисторная структура на многообразии M и $\Lambda^2(M)$ — расслоение кососимметричных 2-форм на M . Поскольку Ω — регулярная 2-форма на M , то $\Omega_x \neq 0$ для всех $x \in M$ и Ω — глобальное сечение расслоения $\Lambda^2(M)$. Так как любая комплексная структура в векторном пространстве D_x задает ориентацию в D_x и Φ — комплексная структура в слоях рабочего расслоения D , получаем

Предложение 2.5. *Если на ориентируемом многообразии M существует субтвисторная структура с рабочим расслоением D , то $e(\Lambda^2(M)) = 0$, $w_1(D) = 0$.*

Если M — компактное ориентируемое многообразие без края и $\chi(M)$ — его эйлерова характеристика, то $\chi(M) = \int_M e(M)$, где $e(M)$ — класс Эйлера кокасательного расслоения TM (см. [6]). Отсюда получаем

Следствие 2.6. *Если пространство расслоения $\Lambda^2(M)$ над многообразием M есть компактное ориентируемое многообразие без края и $\chi(\Lambda^2(M)) \neq 0$, то на M не существует субтвисторных структур.*

Рассмотрим, как субтвисторные структуры связаны с задачей получения в произвольном многообразии кэлеровых подмногообразий.

§ 3. Субкэлеровы структуры

Пусть M — вещественное гладкое многообразие размерности ≥ 3 , и пусть $(\Omega, D\Phi, \beta)$ — субтвисторная структура на M . Будем называть 2-форму Ω *фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры*. В общем случае рабочее расслоение D не является голономным распределением на M . Если $d\Omega = 0$ и D — голономное распределение на M , то в M существует подмногообразие $Q : D|_Q = TQ$ и ограничение аффинора Φ на Q является почти комплексной структурой на Q . Полагая $\Omega_\Phi(X, Y) = \Omega(X, \Phi Y)$, $X, Y \in C^1(TM)$, получаем, что $(\Omega, \Phi, \Omega_\Phi)$ — почти кэлерова структура на подмногообразии Q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Субкэлеровой структурой на многообразии M размерности ≥ 3 называется набор объектов $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$, где Ω — замкнутая регулярная кососимметричная 2-форма на M , D — рабочее расслоение для 2-формы Ω , Φ — ассоциированный с Ω аффинор, β — метрика радикала 2-формы Ω и Q — подмногообразие в M такое, что $TQ = D|_Q$, а ограничение аффинора Φ на Q является комплексной структурой на Q .*

Из определения очевидно, что существование на многообразии M произвольной размерности субкэлеровой структуры влечет существование в M кэлеровых подмногообразий. Остается выяснить, при каких условиях субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует на M субкэлерову структуру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Тензором кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M называется непрерывное тензорное поле N типа $(2, 1)$, определенное на паре векторных полей $X, Y \in C^1(TM)$ следующим образом:*

$$N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y],$$

где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y .

Пусть N — тензор кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M и $d\Omega = 0$. В [1] доказано, что условие $N = 0$ влечет, что рабочее расслоение D есть голономное распределение на M и для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение аффинора Φ на Q является комплексной структурой на Q . Таким образом, получаем

Предложение 3.3. Пусть M — вещественное многообразие размерности $n \geq 3$ и (Ω, D, Φ, β) — субтвисторная структура на M с радикалом ранга $r \geq 1$, замкнутой фундаментальной 2-формой Ω и нулевым тензором кручения. Тогда рабочее расслоение D является голономным распределением на M , любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ — кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\frac{n-r}{2}$ и $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$ — субкэлерова структура на M .

Поскольку на двумерном вещественном многообразии любая почти комплексная структура интегрируема (см. [8, гл. 9]), получаем

Предложение 3.4. Пусть M — вещественное многообразие размерности $n \geq 3$. Любая субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на M с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω , радикалом максимального ранга $n-2$ и инволютивным рабочим расслоением D порождает на M субкэлерову структуру $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$, где Q — максимальное интегральное подмногообразие для распределения D .

Простейшим примером многообразия с субкэлеровой структурой является прямое произведение кэлерова многообразия и риманова многообразия. Нетривиальный класс примеров позволяет получить так называемая нормальная субтвисторная структура. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) называется *нормальной*, если $[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y]$ для любых векторных полей $X \in C^1(D)$, $Y \in C^1(TM)$.

Предложение 3.5. Пусть M — вещественное многообразие размерности ≥ 3 , (Ω, D, Φ, β) — нормальная субтвисторная структура на M и $d\Omega = 0$. Тогда рабочее расслоение D является голономным распределением на M , любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M и множество всех гладких сечений рабочего расслоения D является идеалом в пространстве векторных полей на M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N — тензор кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) . Из определения 3.2 для любых $X, Y \in C^1(D)$ имеем

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] \\ &= -\Phi^2[X, Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi^2[X, Y] + \Phi^2[X, Y] = 0. \end{aligned}$$

С учетом свойства (1) в определении 2.3 для любых $X \in C^1(D)$, $Y \in C^1(\text{rad } \Omega)$ имеем

$$N(X, Y) = -\Phi[\Phi X, Y] + \Phi^2[X, Y] = 0.$$

Поскольку $N|_{\text{rad } \Omega} = 0$, окончательно получаем, что $N = 0$ на M . Из предложения 3.3 вытекает, что рабочее расслоение D есть голономное распределение на M и любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ — кэлерово подмногообразие в M .

Так как D — голономное распределение на M , из теоремы Фробениуса вытекает, что D является инволютивным распределением на M . Из определения 2.3 следует, что для любого $X \in C^1(TM)$ будет $\Phi X \in C^1(D)$. Для любых

$X \in C^1(D)$, $Y \in C^1(\text{rad } \Omega)$ имеем

$$[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y] \in C^1(D).$$

Поскольку Φ — линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D и $C^1(TM) = C^1(D) \oplus C^1(\text{rad } \Omega)$, получаем, что $C^1(D)$ является идеалом в $C^1(TM)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Из предложения 3.5 и теоремы Фробениуса следует, что для нормальной субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) всегда существуют интегральные подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$, $R : TR = \text{rad } \Omega|_R$, однако M локально изометрично $Q \times R$ только тогда, когда $[D, \text{rad } \Omega] = 0$.

§ 4. Субтвисторное расслоение

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ размерности ≥ 3 . *Субтвисторной структурой* с радикалом размерности r в пространстве V называется набор объектов (Ω, D, Φ, β) , где Ω — кососимметричная билинейная форма на V с радикалом размерности r , D — четномерное подпространство в V такое, что ограничение формы Ω на D невырожденное, Φ — ассоциированный с формой Ω аффинор, как в определении 2.3, β — симметричная билинейная форма на V такая, что $\text{rad } \beta = D$ и ограничение β на $\text{rad } \Omega$ есть скалярное произведение в подпространстве $\text{rad } \Omega$. Под расслоением над многообразием M будем понимать многообразие P с проекцией $\pi : P \rightarrow M$, где π — непрерывное сюръективное отображение на все многообразие M . Из предложения 2.4 следует, что для любой константы $\lambda > 0$ 2-формы Ω и $\lambda\Omega$ в векторном пространстве V имеют одно и то же множество ассоциированных аффиноров. Будем считать субтвисторные структуры $(\Omega_1, D_1, \Phi_1, \beta_1)$ и $(\Omega_2, D_2, \Phi_2, \beta_2)$ эквивалентными, если $\Omega_2 = \lambda\Omega_1$, $\lambda > 0$, $D_2 = D_1$, $\Phi_2 = \Phi_1$, $\beta_2 = \beta_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Субтвисторным расслоением с радикалом ранга r над многообразием M* называется расслоение P с проекцией $\pi : P \rightarrow M$ такое, что для $\pi^{-1}(x)$ любой точки $x \in M$ является множеством классов эквивалентности субтвисторных структур с радикалом размерности r в касательном пространстве $T_x M$.

Субтвисторная структура с радикалом ранга r на многообразии M является глобальным сечением субтвисторного расслоения над M с радикалом ранга r . При $r = 0$ любой аффинор в точке $x \in M$ является ортогональной почти комплексной структурой в точке x . Отсюда следует, что классическое твисторное расслоение есть подрасслоение субтвисторного расслоения с радикалом ранга 0.

Предложение 4.2. Пусть M — паракомпактное многообразие размерности $n \geq 3$. Любой слой субтвисторного расслоения с радикалом ранга $r = n - 2k$ над M изоморфен $\text{gr}^{2k} \times \text{SO}(2k)/\text{U}(k) \times \text{SM}(r)$, где gr^{2k} — $2k$ -грассманиан в пространстве $\mathbb{R}^m$, $\text{SO}(2k)$ — группа всех ортогональных матриц $2k \times 2k$ с определителем 1, $\text{U}(k)$ — группа всех эрмитовых матриц $k \times k$ и $\text{SM}(r)$ — пространство симметричных невырожденных положительно определенных матриц $r \times r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На паракомпактном многообразии всегда существует риманова метрика g (см. [7]). Если (Ω, D, Φ, β) — субтвисторная структура с радикалом ранга r в векторном пространстве $V = T_x M$, $x \in M$, то метрика g задает скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в пространстве V . Выберем в V $2k$ -репер u , который является изоморфизмом $\mathbb{R}^{2k} \rightarrow D$, где D — касательное подпространство в V , порожденное репером u . Пусть $L(n, 2k, \mathbb{R})$ — множество всех вещественных

матриц $n \times 2k$ ранга $2k$, а $\mathrm{GL}(2k, \mathbb{R})$ — множество всех невырожденных вещественных матриц $2k \times 2k$, вложенное в $\mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})$. Будем считать, что матрица $a \in \mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})$ действует на репер u справа. Тогда множество всех касательных подпространств размерности $2k$ в V изоморфно $\mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R}) / \mathrm{GL}(2k, \mathbb{R}) \cong \mathrm{gr}^{2k}$.

Из определения 2.3 следует, что аффинор Φ отождествляется с ортогональной комплексной структурой в слое рабочего расслоения D . Репер u задает изоморфизм между аффинорами, ассоциированными с 2-формой Ω , и ортогональными комплексными структурами в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$: $J_D = u \circ J \circ u^{-1}$, где J_D — комплексная структура в D , J — комплексная структура в $\mathbb{R}^{2k}$. Множество всех ортогональных комплексных структур в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$ изоморфно $\mathrm{SO}(2k) / \mathrm{U}(k)$ (см. [8, гл. 9]). Кроме того, так как любая метрика радикала в пространстве V может быть получена из скалярного произведения, индуцированного метрикой g с помощью симметричной невырожденной положительно определенной матрицы $r \times r$ (см. [7]), множество всех метрик радикала в V изоморфно $\mathrm{SM}(r)$.

Покажем, что векторное подпространство D размерности $2k$ в V и комплексная структура J в D , ортогональная относительно метрики g , однозначно определяют класс эквивалентных кососимметричных 2-форм с радикалом ранга $r = n - 2k$. Обозначим через R ортогональное дополнение к D в V относительно метрики g , а через Φ — эндоморфизм пространства V такой, что $\Phi X = JX$, если $X \in D$, $\Phi X = 0$, если $X \in R$. Определим в пространстве V билинейную форму $\Omega(X, Y) = g(\Phi X, Y)$, $X, Y \in V$. Из свойств ортогональной комплексной структуры J и построения эндоморфизма Φ следует, что Ω является кососимметричной 2-формой с радикалом R и рабочим подпространством D . Обратно, для любой кососимметричной 2-формы с радикалом ранга r в пространстве V существует эквивалентная 2-форма Ω такая, что ее матрица в ортонормированном относительно метрики g базисе подпространства D является матрицей комплексной структуры в D , ортогональной относительно метрики g . Здесь D однозначно выбирается как ортогональное дополнение к $\mathrm{rad} \Omega$ относительно метрики g . Таким образом получаем взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга r в пространстве V и парами (D, J) , где D — подпространство размерности $2k = n - r$ в V , J — ортогональная относительно метрики g комплексная структура в D . Окончательно получаем, что слой субвисторного расслоения в точке x изоморфен $\mathrm{gr}^{2k} \times \mathrm{SO}(2k) / \mathrm{U}(k) \times \mathrm{SM}(r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из доказательства предложения 4.2 следует, что размерность слоя субвисторного расслоения с радикалом ранга r над паракомпактным многообразием M размерности $n \geq 3$ равна $\frac{(n-r)^2}{4} + \frac{r}{2}(2n - r + 1)$.

Субвисторное расслоение с радикалом ранга r над многообразием M размерности $n \geq 3$, изоморфное $M \times \mathrm{gr}^{2k} \times \mathrm{SO}(2k) / \mathrm{U}(k) \times \mathrm{SM}(r)$, $2k = n - r$, называется *тривиальным*. Для тривиального субвисторного расслоения любая субвисторная структура в пространстве $\mathbb{R}^n$ индуцирует глобальное сечение субвисторного расслоения на M . В силу следствия 2.6 получаем

Предложение 4.4. Пусть $\Lambda^2(M, r)$ — расслоение классов эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга r над многообразием M , где две 2-формы считаются эквивалентными, если они совпадают с точностью до умножения на положительное число, $\Lambda^2(M, r)$ — ориентируемое компактное многообразие без края и $\chi(\Lambda^2(M, r))$ — эйлерова характеристика этого многооб-

разия. Если субтвисторное расслоение с радикалом ранга r над M тривиально, то $\chi(\Lambda^2(M, r)) = 0$.

Предложение 4.5. Пусть M — паракомпактное многообразие размерности $n \geq 3$ и P^r — субтвисторное расслоение с радикалом ранга $r = n - 2k$ над M . Если на M существует глобальный $2k$ -репер (корепер), то расслоение P^r тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как на паракомпактном многообразии всегда существует риманова метрика и риманова метрика задает изоморфизм между $2k$ -реперами и $2k$ -кореперами, достаточно предположить, что на M задан глобальный $2k$ -репер u . Репер u в каждой точке $x \in M$ единственным образом определяет касательное $2k$ -мерное подпространство D_x и является изоморфизмом между D_x и $\mathbb{R}^{2k}$ (см. [8]). Так же, как в доказательстве предложения 4.2, отождествим множество всех касательных подпространств размерности $2k$ в $T_x M$ с пространством $L(n, 2k, \mathbb{R}) / GL(n, \mathbb{R}) \cong \text{gr}^{2k}$. Обозначим через $D_x a$ касательное подпространство в $T_x M$, порожденное репером ua , $a \in L(n, 2k, \mathbb{R}) / GL(n, \mathbb{R})$. Пусть J — комплексная структура в $\mathbb{R}^{2k}$ и $J(ua) = ua \circ J \circ (ua)^{-1}$. Тогда $J(ua)$ — комплексная структура в $D_x a$ и u индуцирует изоморфизм между множеством комплексных структур в пространстве $D_x a$ и пространством $SO(2k) / U(k)$. Из доказательства предложения 4.2 следует, что риманова метрика g на M определяет изоморфизм между множеством метрик радикала в точке x и пространством $SM(r)$. Поскольку отображения u и g непрерывно зависят от точки x и определены глобально на M , получаем, что субтвисторное расслоение P^r тривиально.

Многообразие M называется *параллелизуемым*, если на M существует глобальный n -репер, где $n = \dim(M)$. Этот репер позволяет ввести на M естественную риманову метрику. Теперь из предложения 4.5 получаем

Следствие 4.6. Пусть M — параллелизуемое многообразие размерности ≥ 3 . Тогда субтвисторное расслоение с радикалом любого допустимого ранга над M тривиально.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Если многообразие P — тривиальное векторное расслоение ранга $m \geq 3$, то на P всегда существует субтвисторная структура, индуцируемая субтвисторной структурой в пространстве $\mathbb{R}^m$. Однако субтвисторное расслоение над P может быть нетривиальным.

Очевидно, что на многообразии с тривиальным субтвисторным расслоением ранга r всегда существует субтвисторная структура с радикалом ранга r как стандартное сечение субтвисторного расслоения. Далее рассмотрим пример многообразия, на котором не существует субтвисторных структур, а субтвисторное расслоение не является тривиальным.

§ 5. Субтвисторное расслоение над четырехмерной сферой

Пусть S^4 — четырехмерная сфера, вложенная в пространство $\mathbb{R}^5$, представляющая собой компактное ориентируемое многообразие без края с римановой метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^5$. Известно, что классическое твисторное расслоение над S^4 есть комплексное проективное пространство CP^3 со слоем CP^1 (см. [9]). Здесь опишем самый общий случай субтвисторного расслоения с радикалом любого ранга. Из теоремы 2.2 следует, что субтвисторное расслоение

над S^4 может иметь только радикал либо ранга 0, либо ранга 2. Множество всех метрик радикала на римановом многообразии можно отождествить с пространством симметричных невырожденных положительно определенных матриц $r \times r$, где r — ранг радикала. В силу предложения 4.2 остается описать расслоение $\text{gr}^{2k}(S^4) \times \mathcal{J}(\text{gr}^{2k}(S^4))$, где $\text{gr}^{2k}(S^4)$ — расслоение касательных подпространств размерности $2k$ над S^4 , $\mathcal{J}(\text{gr}^{2k}(S^4))$ — расслоение ортогональных комплексных структур в слоях расслоения $\text{gr}^{2k}(S^4)$, $2k = 4 - r$.

Комплексное пространство $\mathbb{C}^4$ можно отождествить с кватернионным пространством $\mathbb{H}^2$, считая $q_1 = z_1 + z_2j$, $q_2 = z_3 + z_4j$, $j = \sqrt{-1}$. Введем на $\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$ две функции:

$$f(q_1, q_2) = 2 \frac{q_1 \bar{q}_2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}, \quad h(q_1, q_2) = \frac{|q_1|^2 - |q_2|^2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}.$$

Они удовлетворяют свойству $|f(q_1, q_2)|^2 + |h(q_1, q_2)|^2 = 1$. Эти функции инвариантны относительно умножения (q_1, q_2) на ненулевой кватернион. Введем проекцию $\pi : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^4$, $\pi(q_1, q_2) = (f(q_1, q_2), h(q_1, q_2)) \in \mathbb{R}^5$. Пусть группа $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ действует на $\mathbb{H}^2$ гомотетиями. Тогда $\mathbb{C}P^3$ есть $(\mathbb{H}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. Так как проекция π $\mathbb{C}^*$ -инвариантна, π — проекция $\mathbb{C}P^3 \rightarrow S^4$. Каждый ненулевой кватернион q порождает комплексную прямую в $\mathbb{C}^2$. Если $q \neq 0$, то $\pi(qq_1, qq_2) = \pi(q_1, q_2)$. Отсюда слой расслоения $\mathbb{C}P^3 \rightarrow S^4$ есть $(\mathbb{H} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

Пусть $z = (q_1, q_2) \in \mathbb{C}P^3$, $x = \pi(q_1, q_2) \in S^4$, h — метрика Фубини — Штуди на $\mathbb{C}P^3$ (см. [7]), и J_0 — комплексная структура на $\mathbb{C}P^3$, индуцированная умножением на мнимую единицу. Обозначим через D_z ортогональное дополнение к $T_z \mathbb{C}P^1$ в $T_z \mathbb{C}P^3$ относительно метрики h . Тогда $T_z \mathbb{C}P^3 = D_z \oplus T_z \mathbb{C}P^1$. Поскольку комплексная структура J_0 ортогональна и инвариантно действует на $T_z \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{C}$, ограничение J_0 на D_z — комплексная структура в пространстве D_z . Обозначим ограничение J_0 на D_z через I_z . Эта комплексная структура определяет комплексную структуру $J_z = d\pi \circ I_z d\pi^{-1}$ в касательном пространстве $T_x S^4$. Заметим, что комплексная структура J_z ортогональна относительно римановой метрики на S^4 , индуцированной метрикой h на $\mathbb{C}P^3$, и сохраняет ориентацию в $T_x S^4$, поскольку I_z сохраняет ориентацию в D_z . Аналогично комплексная структура $-J_0$ определяет ортогональную комплексную структуру $-J_z$ в $T_x S^4$, меняющую ориентацию в $T_x S^4$. Таким образом, каждой точке $z = (q_1, q_2) \in \mathbb{C}P^3$ можно непрерывным образом сопоставить точку $x = \pi(q_1, q_2) \in S^4$ и пару ортогональных комплексных структур в касательном пространстве $T_x S^4$.

Пусть $\mathbb{H}P^1$ — множество всех кватернионных прямых в пространстве $\mathbb{H}^2$, представляющее собой компактное ориентируемое многообразие без края, диффеоморфное S^7/S^3 . Поскольку $\text{gr}^4(S^4) \cong S^4$, а $S^4 \cong \mathbb{H}P^1$, получаем

Предложение 5.1. *Субтвисторное расслоение с радикалом ранга 0 над четырехмерной сферой изоморфно $\mathbb{H}P^1 \times \mathbb{C}P^3 \times \mathbf{z}_2$.*

Пусть $\Lambda^2(S^4, 0)$ — расслоение классов эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга 0 над S^4 , как в предложении 4.4, и $\chi(M)$ — эйлерова характеристика многообразия M . Поскольку $\chi(\mathbb{H}P^1) = 3$, $\chi(\mathbb{C}P^3) = 4$, $\chi(\mathbf{z}_2) = 2$, получаем

$$\chi(\Lambda^2(S^4, 0)) = \chi(\mathbb{H}P^1)\chi(\mathbb{C}P^3)\chi(\mathbf{z}_2) = 24.$$

Из предложения 4.4 выводим, что субтвисторное расслоение с радикалом ранга 0 не тривиально. Кроме того, из следствия 2.6 получаем

Следствие 5.2. На четырехмерной сфере не существует субтвисторных структур с радикалом ранга 0.

Замечание 5.3. Поскольку любая почти комплексная структура на римановом многообразии M является ортогональной относительно некоторой римановой метрики и каждая ортогональная почти комплексная структура на M вместе с римановой метрикой индуцирует на M субтвисторную структуру с радикалом ранга 0 (см. § 2), из следствия 5.2 вытекает, что на четырехмерной сфере не существует почти комплексных структур.

Рассмотрим вложение $\mathbb{C}P^2$ в $\mathbb{C}P^3$, считая, что $q_2 = z_2 \in \mathbb{C}$ в паре $(q_1, q_2) \in \mathbb{C}P^3$. Имеем $(qq_1, qz_2) \in \mathbb{C}P^2$, только когда $qz_2 \in \mathbb{C}$. Это возможно, только когда q есть ненулевое комплексное число. Заметим, что $\Pi(-q_1 i, z_2) = \pi(q_1, iz_2)$, $i = \sqrt{-1}$, а точки $(-q_1 i, z_2)$, (q_1, iz_2) не лежат на одной комплексной прямой, так как $-q_1 i \neq -iq_1$. Получаем, что слой при ограничении проекции π на $\mathbb{C}P^2$ есть $\mathbf{z}_2$. Всякое расслоение со слоем $\mathbf{z}_2$ является двулистным накрытием. Получаем, что $\mathbb{C}P^2$ двулистно накрывает S^4 . Пусть $z = (q_1, z_2) \in \mathbb{C}P^2$, J_z — комплексная структура в $T_z \mathbb{C}P^2$, индуцированная умножением на мнимую единицу, и L_z — комплексная прямая в $T_z \mathbb{C}P^2 \cong \mathbb{C}^2$. Поскольку J_z — ортогональная относительно метрики Фубини — Штуди на $\mathbb{C}P^2$ комплексная структура и комплексная прямая L_z инвариантна относительно умножения на мнимую единицу, ограничение комплексной структуры J_z на L_z является ортогональной комплексной структурой в L_z , сохраняющей ориентацию в L_z . Так как в $\mathbb{R}^2$ существует единственная ортогональная сохраняющая ориентацию комплексная структура и ограничение комплексной структуры $-J_z$ на L_z — единственная ортогональная меняющая ориентацию комплексная структура в L_z , получаем, что каждая точка $z \in \mathbb{C}P^2$ определяет ровно две ортогональные комплексные структуры в пространстве L_z . Так как $d\pi L_z$ — двумерное касательное подпространство в $T_x S^4$, $x = \pi(z) \in S^4$, и в $T_x S^4$ существует только две ортогональные комплексные структуры $\pm J_x = d\pi \circ \pm J_z \circ d\pi^{-1}$, получаем

Предложение 5.4. Субтвисторное расслоение с радикалом ранга 2 над четырехмерной сферой изоморфно $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2 \times \text{SM}(2)$.

Пусть $\Lambda^2(S^4, 2)$ — расслоение классов эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга 2 над S^4 , как в предложении 4.4. Из предложений 5.4 и 4.2 следует, что $\Lambda^2(S^4, 2) \cong \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$. Имеем

$$\chi(\Lambda^2(S^4, 2)) = \chi(\mathbb{C}P^1)\chi(\mathbb{C}P^2) = 6.$$

Из предложения 4.4 получаем, что субтвисторное расслоение с радикалом ранга 2 не тривиально. Кроме того, из следствия 2.6 выводим

Следствие 5.5. На четырехмерной сфере не существует субтвисторных структур с радикалом ранга 2.

Мы описали все возможные типы субтвисторного расслоения над S^4 . Заметим, что S^4 является однородным пространством, на котором не существует субтвисторных структур. Далее рассмотрим условия, при которых на однородном пространстве могут существовать инвариантные субтвисторные структуры.

§ 6. Инвариантные субтвисторные структуры на однородных пространствах

Пусть $M = G/H$ — однородное пространство размерности ≥ 3 , где G — группа Ли, транзитивно и эффективно действующая на многообразии M , H —

подгруппа изотропии начальной точки $o \in M$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G , а $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии в $\mathfrak{g}$. В $\mathfrak{g}$ можно выбрать дополнительное подпространство $\mathfrak{m} : \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Подпространство $\mathfrak{m}$ изоморфно касательному пространству $T_o M$. Пусть π — проекция $G \rightarrow M$. Тогда $\tau = d\pi_e$, где e — единица группы G , является изоморфизмом $\mathfrak{m} \rightarrow T_o M$. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на однородном пространстве M называется G -инвариантной, если D — G -инвариантное распределение касательных подпространств на M и для любого $g \in G$ будет $\Omega_o = \Omega_x \circ dg$, $\beta_o = \beta_x \circ dg$, $\Phi_x \circ dg = dg \circ \Phi_o$, здесь $x = g(o)$, dg — дифференциал отображения $g : M \rightarrow M$. Субтвисторная структура на группе Ли G называется *левоинвариантной* (*правоинвариантной*), если она инвариантна относительно левых (правых) сдвигов на элементы группы G . Левоинвариантная (правоинвариантная) субтвисторная структура на группе Ли G называется *изотропновырожденной*, если ее радикал содержит подалгебру изотропии $\mathfrak{h}$. В [1] доказано, что множество всех G -инвариантных субтвисторных структур на однородном пространстве $M = G/H$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех G -левоинвариантных H -правоинвариантных изотропновырожденных субтвисторных структур на группе Ли G . Таким образом, существование на группе Ли G G -левоинвариантной H -правоинвариантной изотропновырожденной субтвисторной структуры с радикалом ранга r влечет существование G -инвариантной субтвисторной структуры с радикалом ранга r на M , и обратно. Из определения G -инвариантной субтвисторной структуры следует, что такая субтвисторная структура полностью определяется своим значением в начальной точке o . Из предложения 4.2 получаем

Предложение 6.1. Пусть $M = G/H$ — однородное пространство размерности $n \geq 3$. Множество всех G -инвариантных субтвисторных структур с радикалом ранга $r = n - 2k$ на M изоморфно $\text{gr}^{2k} \times \text{SO}(2k)/\text{U}(k) \times \text{SM}(r)$, где gr^{2k} — $2k$ -грассманиан в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\text{SM}(r)$ — множество симметричных невырожденных положительно определенных матриц $r \times r$.

Из этого предложения следует, что субтвисторное подрасслоение G -инвариантных субтвисторных структур над однородным пространством всегда тривиально, даже если само субтвисторное расслоение не тривиально. Однако подрасслоение G -инвариантных субтвисторных структур над однородным пространством может быть пустым.

Теорема 6.2. Пусть $M = G/H$ — однородное пространство размерности ≥ 3 . Если представление изотропии действует на $T_o M$ неприводимо, то на M не существует G -инвариантных субтвисторных структур с нетривиальным радикалом.

Доказательство. Предположим, что на M существует G -инвариантная субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) с нетривиальным радикалом. Поскольку рабочее расслоение D — G -инвариантное распределение на M и dh для любого $h \in H$ — автоморфизм касательного пространства $T_o M$, получаем, что dh — автоморфизм подпространства D_o для всех $h \in H$. Таким образом, D_o — нетривиальное инвариантное подпространство для действия изотропии, что противоречит неприводимости действия изотропии на $T_o M$.

Замечание 6.3. Из теоремы 2.2 следует, что на однородном пространстве G/H нечетной размерности не существует G -инвариантных кососимметричных 2-форм с тривиальным радикалом. С учетом теоремы 6.2 получаем, что на од-

нородном пространстве нечетной размерности с неприводимым действием представления изотропии не существует инвариантных субтвисторных структур.

Известно, что на сфере S^n не существует симплектических структур при $n \geq 3$ (см. [10]). Получим обобщение этого факта для любых субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой.

Теорема 6.4. *На сфере S^n , $n \geq 3$, не существует субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой, а следовательно, не существует субкэлеровых структур.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сферу S^n всегда можно представить как однородное риманово пространство G/H с неприводимым действием изотропии (см. [7]). Предположим, что на S^n существует субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) : $d\Omega = 0$. Значение этой субтвисторной структуры в начальной точке o индуцирует левоинвариантную изотропновырожденную субтвисторную структуру $(\Omega_o \circ \tau, \tau^{-1}(D_o), \tau^{-1} \circ \Phi_o \circ \tau, \beta \circ \tau)$ на группе Ли G . Так как подгруппа изотропии риманова однородного пространства всегда компактна, применяя к этой субтвисторной структуре операцию усреднения (интегрирования относительно унимодулярной меры) по подгруппе H , получаем G -левоинвариантную H -правоинвариантную изотропновырожденную субтвисторную структуру на группе Ли G с радикалом ранга не меньше ранга $\text{rad } \Omega$. Полученная таким образом субтвисторная структура на группе Ли G индуцирует G -инвариантную субтвисторную структуру на M с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω' . Поскольку сфера S^n имеет нулевую группу вторых когомологий $H^2(S^n, \mathbb{Z})$, на S^n существует ненулевая G -инвариантная 1-форма α' : $d\alpha' = \Omega'$. С другой стороны, в [3] доказано, что на сфере S^n , $n \geq 2$, не существует ненулевых G -инвариантных 1-форм. Полученное противоречие доказывает, что на сфере S^n не существует субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой.

Поскольку сфера S^n — однородное пространство с неприводимым действием подгруппы изотропии (см. [7]), из теоремы 6.2 получаем

Следствие 6.5. *На сфере S^n , $n \geq 3$, не существует инвариантных субтвисторных структур с нетривиальным радикалом.*

Если подгруппа изотропии H однородного пространства $M = G/H$ является нормальной подгруппой в G , то G/H — фактор-группа Ли. Поскольку любая группа Ли является параллелизуемым многообразием, из предложения 4.5 получаем класс однородных многообразий, допускающих G -инвариантную субтвисторную структуру.

Следствие 6.6. *Пусть $M = G/H$ — однородное пространство размерности $n \geq 3$ и H — нормальная подгруппа в G . Тогда субтвисторное расслоение над M тривиально и любая субтвисторная структура в $\mathbb{R}^n$ порождает G -инвариантную субтвисторную структуру на M .*

Пусть X — векторное поле на однородном пространстве $M = G/H$. Будем называть векторное поле X *эквивариантным*, если $dg^{-1}X(g(o)) = X(o)$ для всех $g \in G$. Заметим, что отображение τ является гомоморфизмом скобки Ли элементов из подпространства $\mathfrak{m}$ и скобки Ли эквивариантных векторных полей на M . Пусть $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — первый производный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение 6.7. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство размерности ≥ 3 , алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет нетривиальный центр $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{c} \cap$*

$\mathfrak{g}' \neq \{0\}$. Тогда любой элемент из $\mathfrak{p}$ порождает G -инвариантную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой на M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для однородного риманова пространства $M = G/H$ группа G — группа изометрий римановой метрики B на M , т. е. метрика B есть G -инвариантная билинейная форма. Пусть ξ — эквивариантное векторное поле на M . Это векторное поле порождает на M ненулевую 1-форму α : $\alpha(X) = B(\xi, X)$, $X \in C^1(TM)$. Пусть $x = g(o)$, $g \in G$. Для любого векторного поля X на M имеем

$$\alpha_x(dgX) = B_x(\xi, dgX) = B_o(dg^{-1}\xi, X) = B_o(\xi, X) = \alpha_o(X),$$

т. е. 1-форма α G -инвариантна. Тогда $d\alpha$ — G -инвариантная кососимметричная замкнутая 2-форма на M . Если $\tau^{-1}(\xi) \in \mathfrak{g}' \setminus \{0\}$, то существуют $X, Y \in \mathfrak{g}$: $\tau^{-1}(\xi) = [X, Y]$. Тогда

$$2 d\alpha(\tau X, \tau Y) = -\alpha([\tau X, \tau Y]) = -B(\xi, \tau[X, Y]) = -B(\xi, \xi) \neq 0,$$

т. е. $d\alpha \neq 0$.

Пусть D — ортогональное дополнение к $\text{rad}(d\alpha)$ относительно метрики B . В [3] доказано, что такое рабочее расслоение — G -инвариантное распределение на M . Любая ортогональная относительно метрики B комплексная структура J в слоях расслоения D такая, что $X, Y \in C^1(D)$ для любых $d\alpha(X, Y) = B(JX, Y)$ порождает G -инвариантный аффинор Φ , ассоциированный с 2-формой $d\alpha$. Получили G -инвариантную субтвисторную структуру $(d\alpha, D, \Phi, \beta)$, где β — метрика радикала, полученная ограничением метрики B на $\text{rad}(d\alpha)$. Остается доказать, что каждый ненулевой элемент из $\mathfrak{p}$ порождает эквивариантное векторное поле на M .

Пусть $X \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ и G_t — однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом X . Обозначим через X^* векторное поле на M такое, что $X^*(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} G_t(x)$ для любой точки $x \in M$. Поскольку G_t лежит в центре группы G , для любого $g \in G$ имеем

$$dg^{-1}X^*(g(o)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^{-1}G_tg(o) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} G_t(o) = X^*(o).$$

Таким образом, X^* — эквивариантное векторное поле на M , которое порождает G -инвариантную незамкнутую 1-форму на M .

Предложение 6.7 позволяет получить класс однородных пространств с инвариантной субтвисторной структурой. Так как любая нильпотентная группа Ли имеет нетривиальный центр, а для любой компактной подгруппы H можно построить H -биинвариантную риманову метрику (см. [7]), для однородного пространства $M = G/H$, где G — нильпотентная группа Ли, H — собственная компактная подгруппа в G , трансверсальная центру группы G , всегда можно построить G -инвариантную субтвисторную структуру с точной фундаментальной 2-формой. Кроме того, инвариантную субтвисторную структуру с точной фундаментальной 2-формой на однородном пространстве сразу можно получить из инвариантной аффинорной метрической структуры, когда вместо фундаментальной 2-формы рассматривается 1-форма, такие структуры изучены в [3]. Заметим, что если однородное пространство $M = G/H$ допускает G -инвариантную субтвисторную структуру и M — компактное многообразие без края, то эта субтвисторная структура имеет радикал ненулевого ранга, поскольку любая

точная кососимметричная 2-форма на компактном ориентируемом многообразии без края всегда вырожденная. Также из теоремы 2.2 следует, что если однородное пространство нечетной размерности допускает инвариантную субтвисторную структуру, то эта структура имеет радикал размерности ≥ 1 . Простым примером группы Ли с левоинвариантной субтвисторной структурой, имеющей замкнутую фундаментальную 2-форму и нетривиальный радикал, является полупрямое произведение симплектической группы Ли на коммутативную группу Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.8. Если группа Ли G содержит собственную подгруппу H четной коразмерности и допускает G -левоинвариантную H -правоинвариантную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом, совпадающим с подалгеброй изотропии $\mathfrak{h}$, то эта субтвисторная структура индуцирует G -инвариантную почти кэлерову структуру на однородном пространстве $M = G/H$. В случае, когда тензор кручения этой субтвисторной структуры равен 0, она индуцирует G -инвариантную кэлерову структуру на M .

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев Е. С. Субкомплексные и субкэлеровы структуры // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1062–1077.
2. Chu B.-Y. Symplectic homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 197. P. 145–159.
3. Корнев Е. С., Славолюбова Я. В. Инвариантные аффинорные и субкэлеровы структуры на однородных пространствах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 67–84.
4. Корнев Е. С. Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 107–123.
5. Корнев Е. С. Аффинорные структуры на векторных расслоениях // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1283–1296.
6. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
7. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. I, II.
8. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. I, II.
9. Сергеев А. Г. Гармонические отображения. М.: МИАН, 2008. (Лекционные курсы НОЦ; вып. 10).
10. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Поступила в редакцию 26 декабря 2018 г.

После доработки 25 марта 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Корнев Евгений Сергеевич
Кемеровский государственный университет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
q148@mail.ru