A. P. Laurinčikas, On the mishou theorem with an algebraic parameter, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1379–1388

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.614>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 18.234.156.22
April 26, 2023, 16:14:44

О ТЕОРЕМЕ МИШУ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРОМ

А. Лауринчикас

Аннотация. Известно, что дзета-функция Римана и дзета-функция Гурвица с трансцендентным или рациональным параметром универсальны в смысле Воронина, т. е. их сдвигами приближается широкий класс аналитических функций. Универсальность дзета-функции Гурвица с алгебраическим иррациональным параметром является открытой проблемой с 1979 г. Мишу доказал совместную универсальность дзета-функции Римана и дзета-функции Гурвица с трансцендентным параметром. Теорема Мишу с алгебраическим иррациональным параметром также является открытой проблемой. В статье получены некоторые первые результаты в этом направлении. Доказано, что существует непустое замкнутое подмножество двумерного множества аналитических функций такое, что всякая его пара приближается вышеупомянутыми сдвигами.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.614

Ключевые слова: дзета-функция Гурвица, дзета-функция Римана, теорема Мишу, универсальность.

§ 1. Введение

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексная переменная, а α , $0 < \alpha \leq 1$, — фиксированный параметр. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ и дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha)$ в полуплоскости $\sigma > 1$ определяются рядами

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \quad \text{и} \quad \zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

и аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость, за исключением простого полюса в точке $s = 1$ с вычетом 1. Трудно переоценить важность этих функций в аналитической теории чисел и вообще в математике. С другой стороны, функции $\zeta(s)$ и $\zeta(s, \alpha)$ до сих пор хранят в себе много секретов.

Обе функции $\zeta(s)$ и $\zeta(s, \alpha)$ с трансцендентным или рациональным $\alpha \neq 1, 1/2$ универсальны в том смысле, что их сдвигами $\zeta(s + i\tau)$ и $\zeta(s + i\tau, \alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$, приближаются все аналитические функции, не имеющие нулей, и все аналитические функции, соответственно определенные в полосе $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. Свойство универсальности функции $\zeta(s)$ открыто С. М. Ворониным [1], а универсальность функции $\zeta(s, \alpha)$ с рациональным и трансцендентным параметром α доказана Гонеком [2] (см. также [3, 4]). Универсальность функции $\zeta(s, \alpha)$ с

Исследования автора поддержаны Европейским социальным фондом по программе улучшения квалификации в рамках всемирных проектов научных исследований и развития (грант N 09.3.3-LMT-K-712-01-0037).

алгебраическим иррациональным α является одной из важнейших проблем современной алгебраической и аналитической теории чисел. Некоторый результат в этом случае получен в [5].

Мишу [6] обобщил упомянутые результаты. Он доказал совместную теорему универсальности об одновременном приближении пары аналитических функций сдвигами $(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha))$. Пусть $\mathcal{K}$ — класс компактных подмножеств полосы D , обладающих связными дополнениями. Для $K \in \mathcal{K}$ определим $H(K)$ как класс непрерывных в K и аналитических внутри K функций, а $H_0(K)$ — как подкласс класса $H(K)$ не имеющих нулей в K функций. Тогда теоремой Мишу является следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Предположим, что α — трансцендентное число. Пусть $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ и $f_1 \in H_0(K_1)$, $f_2 \in H(K_2)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s+i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Здесь $\text{meas } A$ обозначает меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Теорема 1.1 показывает, что множество сдвигов $(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha))$ с приближающим свойством имеет положительную нижнюю плотность, следовательно, оно бесконечно.

Случай рационального параметра α может быть получен с использованием представления функции $\zeta(s, \alpha)$ линейной комбинации L -функций Дирихле.

Дискретные версии теоремы Мишу (в этом случае τ в сдвигах $(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha))$ принимает значения из некоторых дискретных множеств) получены в [7–10].

Самым сложным является случай алгебраического иррационального α . В настоящее время неизвестен какой-либо подход, позволяющий доказать теорему 1.1 в этом случае. Вполне возможно, что для всех алгебраических иррациональных α теорема 1.1 не имеет места. Доказательства теорем универсальности в одном или другом виде сводятся к приближению аналитических функций полиномами Дирихле. Если элементы множества $L(\alpha) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ сильно зависимы, то, возможно, этого сделать нельзя. Цель настоящей заметки — предложить некоторое «приближение» к теореме Мишу с алгебраическим иррациональным α . Пусть $H(D)$ — пространство аналитических в D функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах.

Теорема 1.2. *Предположим, что α — алгебраическое иррациональное число. Тогда существует непустое замкнутое множество $(F_{1,\alpha} \times F_{2,\alpha}) \subset H^2(D)$ такое, что для всех компактных множеств $K_1, K_2 \subset D$, $f_1 \in F_{1,\alpha}$, $f_2 \in F_{2,\alpha}$ и $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s+i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Кроме того, для всех компактных множеств $K_1, K_2 \subset D$, $f_1 \in F_{1,\alpha}$, $f_2 \in F_{2,\alpha}$ и всякого $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений

ε , существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \\ \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Отметим, что $F_{1,\alpha} = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}$ и $F_{2,\alpha} = H(D)$ в случае трансцендентного α . Проблема неэффективности множества $(F_{1,\alpha} \times F_{2,\alpha})$ связана с несуществованием достаточной информации о линейной независимости над полем рациональных чисел множества $L(\alpha)$.

Теорема 1.2 допускает обобщение для некоторых композиций.

Теорема 1.3. *Предположим, что α — алгебраическое иррациональное число, а $\Phi : H^2(D) \rightarrow H(D)$ — непрерывный оператор. Тогда существует непустое замкнутое множество $F_\alpha \subset H^2(D)$ такое, что для всякого компактного множества $K \subset D$, $f \in \Phi(F_\alpha)$ и $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\Phi(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Кроме того, для всякого компактного множества $K \subset D$, $f \in \Phi(F_\alpha)$ и $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε , существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\Phi(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Теоремы 1.2 и 1.3 также имеют место с рациональным α .

Для доказательства теорем 1.2 и 1.3 удобно применять универсальный вероятностный подход, основанный на слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций. Вероятностный метод в теории универсальности дзета-функций предложен Багчи [11], развит в [3, 12, 13] и применялся многими авторами. Его универсальность проявляется в том, что он применим к дзета-функциям, как имеющим, так и не имеющим эйлерово произведение по простым числам, а также удобен при изучении совместной универсальности. Другие методы основаны на применении линейной независимости над $\mathbb{Q}$ множеств $\{\log p : p \text{ простое}\}$ или $L(\alpha)$ с трансцендентным α . Если α алгебраическое иррациональное, то в нашем случае эти методы не работают.

§ 2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем через $\mathcal{B}(X)$ будем обозначать борелевское σ -поле пространства X . Пусть γ — единичная окружность на комплексной плоскости, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и

$$\Omega_1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p, \quad \Omega_2 = \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \gamma_m,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для всех $p \in \mathbb{P}$ и $\gamma_m = \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. Бесконечномерные торы Ω_1 и Ω_2 с топологией произведения и операцией поточечного умножения являются компактными топологическими абелевыми группами. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Тогда Ω — компактная топологическая абелева группа. Через $\omega_1(p)$ будем обозначать p -ю компоненту элемента $\omega_1 \in \Omega_1$, $p \in \mathbb{P}$, а через $\omega_2(m)$ — m -ю компоненту

элемента $\omega_2 \in \Omega_2$, $m \in \mathbb{N}_0$. Элементы группы Ω имеют вид $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$. Характеры χ группы Ω представляются в виде

$$\chi(\omega) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \omega_1^{k_p}(p) \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \omega_2^{l_m}(m), \quad (1)$$

где множества целых чисел k_p и l_m , отличных от нуля, конечны. Для множеств $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ определим

$$Q_{T,\alpha}(A) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : ((p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}), ((m + \alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)) \in A\}.$$

Начнем с предельной теоремы для $Q_{T,\alpha}$. Положим

$$\begin{aligned} \{(\underline{k}_0, \underline{l}_0)\} &= \left\{(\underline{k}, \underline{l}) : \underline{k} = \{k_p : k_p \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}\}, \underline{l} = \{l_m : l_m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0\}, \right. \\ &\quad \left. \sum'_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum'_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log(m + \alpha) = 0\right\}, \\ \{(\hat{\underline{k}}_0, \hat{\underline{l}}_0)\} &= \left\{(\underline{k}, \underline{l}) : \sum'_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum'_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log(m + \alpha) \neq 0\right\}, \end{aligned}$$

где штрих у знака суммы означает, что множества целых k_p и l_m , отличных от нуля, конечны. Пусть P_α — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, определенная в силу (1) следующим преобразованием Фурье:

$$\omega_1^{k_p}(p) \prod'_{m \in \mathbb{N}_0} \omega_2^{l_m}(m) dP_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } (\underline{k}, \underline{l}) \in \{(\underline{k}_0, \underline{l}_0)\}, \\ 0, & \text{если } (\underline{k}, \underline{l}) \in \{(\hat{\underline{k}}_0, \hat{\underline{l}}_0)\}. \end{cases} \quad (2)$$

Лемма 2.1. $Q_{T,\alpha}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере P_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для краткости

$$a(\underline{k}, \underline{l}) = \sum'_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p + \sum'_{m \in \mathbb{N}_0} l_m \log(m + \alpha).$$

Ввиду определения $Q_{T,\alpha}$ преобразование Фурье $g_{T,\alpha}(\underline{k}, \underline{l})$ меры $Q_{T,\alpha}$ имеет вид

$$g_{T,\alpha}(\underline{k}, \underline{l}) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{-i\tau a(\underline{k}, \underline{l})\} d\tau.$$

Следовательно, $g_{T,\alpha}(\underline{k}, \underline{l}) = 1$ при $(\underline{k}, \underline{l}) \in \{(\underline{k}_0, \underline{l}_0)\}$ и

$$g_{T,\alpha}(\underline{k}, \underline{l}) = \frac{1 - \exp\{-iT a(\underline{k}, \underline{l})\}}{iT a(\underline{k}, \underline{l})}$$

при $(\underline{k}, \underline{l}) \in \{(\hat{\underline{k}}_0, \hat{\underline{l}}_0)\}$. Отсюда и из (2) следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_{T,\alpha}(\underline{k}, \underline{l}) = g_\alpha(\underline{k}, \underline{l}).$$

Функция $g_\alpha(\underline{k}, \underline{l})$ непрерывна в дискретной топологии. Поэтому утверждение леммы является следствием теоремы непрерывности для вероятностных мер на компактных группах.

Продолжим функцию $\omega_1(p)$ на множество $\mathbb{N}$ при помощи формулы

$$\omega_1(m) = \prod_{\substack{p^\beta | m, \\ p^{\beta+1} \nmid m}} \omega_1^\beta(p), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2.1 влечет предельную теорему для меры на $(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D)))$, в определение которой входят абсолютно сходящиеся ряды Дирихле. Пусть $\theta > 1/2$ — фиксированное число,

$$v_n(m) = \exp \left\{ - \left(\frac{m}{n} \right)^\theta \right\}$$

для $m, n \in \mathbb{N}$,

$$v_n(m, \alpha) = \exp \left\{ - \left(\frac{m + \alpha}{n + \alpha} \right)^\theta \right\}$$

для $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Определим ряды

$$\zeta_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_n(m)}{m^s} \quad \text{и} \quad \zeta_n(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_n(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s}.$$

Они абсолютно сходятся при $\sigma > 1/2$ (см., например, [3, 12]). Для $A \in \mathcal{B}(H^2(D))$ определим

$$P_{T,n,\alpha}(A) = \frac{1}{T} \text{meas} \{ \tau \in [0, T] : (\zeta_n(s + i\tau), \zeta_n(s + i\tau, \alpha)) \in A \}.$$

Лемма 2.2. На $(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D)))$ существует вероятностная мера $V_{n,\alpha}$ такая, что $P_{T,n,\alpha}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к $V_{n,\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\zeta_n(s, \alpha, \omega) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_1(m) v_n(m)}{m^s}, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_2(m) v_n(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s} \right),$$

а отображение $u_{n,\alpha} : \Omega \rightarrow H^2(D)$ определено формулой $u_{n,\alpha}(\omega) = \zeta_n(s, \alpha, \omega)$. Тогда лемма вытекает из равенства $P_{T,n,\alpha} = Q_{T,\alpha} u_{n,\alpha}^{-1}$, леммы 2.1, теоремы 5.1 из [14] и непрерывности отображения $u_{n,\alpha}$.

Подготовим условия для перехода от $\zeta_n(s, \alpha) = (\zeta_n(s), \zeta_n(s, \alpha))$ к $\zeta(s, \alpha) = (\zeta(s), \zeta(s, \alpha))$. Пусть ρ — метрика на $H(D)$, индуцирующая топологию равномерной сходимости на компактах, и для $\underline{g}_1 = (g_{11}, g_{12}), \underline{g}_2 = (g_{21}, g_{22}) \in H^2(D)$

$$\underline{\rho}(\underline{g}_1, \underline{g}_2) = \max(\rho(g_{11}, g_{21}), \rho(g_{12}, g_{22})).$$

Лемма 2.3. Имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\rho}(\zeta(s + i\tau, \alpha), \zeta_n(s + i\tau, \alpha)) d\tau = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что утверждение леммы следует из равенств

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta(s + i\tau), \zeta_n(s + i\tau)) d\tau &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta(s + i\tau, \alpha), \zeta_n(s + i\tau, \alpha)) d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Первое из них хорошо известно [12], поэтому остается доказать только второе. Начнем с представления [3]

$$\zeta_n(s, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \zeta(s+z, \alpha) l_n(z, \alpha) \frac{dz}{z},$$

где

$$l_n(s, \alpha) = \frac{s}{\theta} \Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right) (n + \alpha)^s.$$

Отсюда и из теоремы о вычетах находим, что для $\hat{\theta} > 0$

$$\zeta_n(s, \alpha) - \zeta(s, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\hat{\theta}-i\infty}^{-\hat{\theta}+i\infty} \zeta(s+z, \alpha) l_n(z, \alpha) \frac{dz}{z} + \frac{l_n(1-s, \alpha)}{1-s}. \quad (4)$$

Пусть $K \subset D$ — компактное множество. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы для точек $s = \sigma + iv$ множества K выполнялись неравенства $1/2 + 2\varepsilon \leq \sigma \leq 1 - \varepsilon$. Полагая $\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\hat{\theta} = \sigma - \varepsilon - \frac{1}{2}$, из (4) находим

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha)| d\tau \leq I_1 + I_2, \quad (5)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + \tau), \alpha\right) \right| d\tau \right) \sup_{s \in K} \frac{|l_n(1/2 + \varepsilon - s + it, \alpha)|}{|1/2 + \varepsilon - s + it|} dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} \frac{|l_n(1-s-i\tau, \alpha)|}{|1-s-i\tau|} d\tau.$$

Используя определение $l_n(s, \alpha)$ и известную оценку $\Gamma(\sigma + it) \ll \exp\{-c|t|\}$, $c > 0$, справедливую в любой полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, получаем, что

$$\frac{l_n(1/2 + \varepsilon - s + it, \alpha)}{1/2 + \varepsilon - s + it} \ll_{\theta, K} (n + \alpha)^{-\varepsilon} \exp\{-c|t|\}.$$

Отсюда и из известной оценки

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + it, \alpha\right) \right|^2 dt \ll_{\alpha, \varepsilon} T$$

имеем

$$I_1 \ll_{\theta, K, \alpha, \varepsilon} (n + \alpha)^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) \exp\{-c|t|\} dt \ll_{\theta, K, \alpha, \varepsilon} (n + \alpha)^{-\varepsilon}. \quad (6)$$

Аналогичным путем выводим, что

$$I_2 \ll_{\theta, K} \frac{(n + \alpha)^{1/2-2\varepsilon}}{T}. \quad (7)$$

Теперь из (5)–(7) вытекает равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha)| d\tau = 0.$$

Это равенство и определение метрики ρ (см., например, [12]) доказывает равенство (3).

Докажем предельную теорему для $\zeta(s, \alpha)$.

Лемма 2.4. На $(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D)))$ существует вероятностная мера V_α такая, что

$$P_{T,\alpha}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \zeta(s + i\tau, \alpha) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^2(D)),$$

при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к V_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\underline{X}_{n,\alpha} = \underline{X}_{n,\alpha}(s)$ обозначим $H^2(D)$ -значный случайный элемент с распределением $V_{n,\alpha}$, где $V_{n,\alpha}$ — предельная мера в лемме 2.2. Кроме того, пусть ξ — случайная величина на некотором вероятностном пространстве с мерой μ , равномерно распределенная на $[0, 1]$, и

$$\underline{X}_{T,n,\alpha} = \underline{X}_{T,n,\alpha}(s) = \zeta_n(s + i\xi T, \alpha).$$

Тогда в силу леммы 2.2

$$\underline{X}_{T,n,\alpha} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \underline{X}_{n,\alpha}. \quad (8)$$

Абсолютная сходимость рядов для $\zeta_n(s)$ и $\zeta_n(s, \alpha)$ влечет за собой плотность семейства мер $\{V_{n,\alpha} : n \in \mathbb{N}\}$, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset H^2(D)$ такое, что $V_{n,\alpha}(K) > 1 - \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому в силу теоремы Прохорова [14] семейство $\{V_{n,\alpha}\}$ относительно компактно. Отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{V_{n_r,\alpha}\}$, при $r \rightarrow \infty$ слабо сходящаяся к некоторой вероятностной мере V_α на $(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D)))$, или, в терминах сходимости по распределению,

$$\underline{X}_{n_r,\alpha} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} V_\alpha. \quad (9)$$

Кроме того, полагая

$$\underline{X}_{T,\alpha} = \underline{X}_{T,\alpha}(s) = \zeta(s + i\xi T, \alpha)$$

и применяя лемму 2.3, получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mu(\underline{\rho}(\underline{X}_{T,n,\alpha}, \underline{X}_{T,\alpha}) \geq \varepsilon) = 0.$$

Последнее равенство, (8), (9) и теорема 4.2 из [14] приводят к соотношению

$$\underline{X}_{T,\alpha} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} V_\alpha,$$

т. е. $P_{T,\alpha}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к V_α .

§ 3. Доказательство теорем о приближении

Теорема 1.2 является следствием леммы 2.4 и свойств слабой сходимости вероятностных мер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Пространство $H(D)$ сепарабельно. Поэтому [14]

$$\mathcal{B}(H^2(D)) = \mathcal{B}(H(D)) \times \mathcal{B}(H(D)).$$

Отсюда имеем, что достаточно рассматривать меру V_α на множествах вида $A_1 \times A_2$, где $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(H(D))$. Пусть $F_{1,\alpha} \times F_{2,\alpha}$, $F_{1,\alpha}, F_{2,\alpha} \in H(D)$, — носитель меры V_α , т. е. $F_{1,\alpha} \times F_{2,\alpha}$ — минимальное замкнутое множество пространства $H^2(D)$ такое, что $V_\alpha(F_{1,\alpha} \times F_{2,\alpha}) = 1$. Это множество состоит из всех

элементов $\underline{g} = (g_1, g_2)$ таких, что для всякой открытой окрестности G элемента $\underline{g}$ выполнено неравенство $V_\alpha(G) > 0$.

Определим множество

$$G_\varepsilon = \{(g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s \in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| < \varepsilon\},$$

где $f_1(s) \in F_{1,\alpha}$ и $f_2 \in F_{2,\alpha}$, т. е. $(f_1(s), f_2(s)) \in F_{1,\alpha} \times F_{2,\alpha}$. Тогда G_ε — открытая окрестность элемента носителя меры V_α . Отсюда $V_\alpha(G_\varepsilon) > 0$. Поэтому лемма 2.4 и эквивалент слабой сходимости вероятностных мер в терминах открытых множеств [14] дают неравенство

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} P_{T,\alpha}(G_\varepsilon) \geq V_\alpha(G_\varepsilon) > 0.$$

Это неравенство вместе с определениями $P_{T,\alpha}$ и G_ε доказывают первую часть теоремы.

Граница ∂G_ε множества G_ε принадлежит множеству

$$\begin{aligned} & \{(g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s \in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| = \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| = \varepsilon\} \\ & \cup \{(g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s \in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| = \varepsilon\} \\ & \cup \{(g_1, g_2) \in H^2(D) : \sup_{s \in K_1} |g_1(s) - f_1(s)| = \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |g_2(s) - f_2(s)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Поэтому границы $\partial G_{\varepsilon_1}$ и $\partial G_{\varepsilon_2}$ не пересекаются для различных положительных ε_1 и ε_2 . Отсюда следует, что $V_\alpha(\partial G_\varepsilon) = 0$ (G_ε является множеством непрерывности меры V_α) для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε . Следовательно, применяя эквивалент слабой сходимости вероятностных мер в терминах множеств непрерывности [14], из леммы 2.4 выводим, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{T,\alpha}(G_\varepsilon) = V_\alpha(G_\varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самое большее счетного множества значений ε , и определения $P_{T,\alpha}$ и G_ε доказывают вторую часть теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Для $A \in \mathcal{B}(H(D))$ определим

$$P_{T,\Phi,\alpha}(A) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \Phi(\underline{\zeta}(s + i\tau, \alpha)) \in A\}.$$

Тогда

$$P_{T,\Phi,\alpha}(A) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s + i\tau, \alpha) \in \Phi^{-1}A\}.$$

Следовательно, $P_{T,\Phi,\alpha} = P_{T,\alpha}\Phi^{-1}$, и лемма 2.4, теорема 5.1 из [14] и непрерывность оператора Φ дают слабую сходимость $P_{T,\Phi,\alpha}$ при $T \rightarrow \infty$ к $V_\alpha\Phi^{-1}$, где V_α является предельной мерой в лемме 2.4. Легко видеть, что носителем меры $V_\alpha\Phi^{-1}$ является множество $\Phi(F_\alpha)$, где $F_\alpha = F_{1,\alpha} \times F_{2,\alpha}$. В самом деле, пусть g — любой элемент множества $\Phi(F_\alpha)$, а G — его любая открытая окрестность. Тогда множество $\Phi^{-1}G$ также открыто, поэтому является открытой окрестностью некоторого элемента множества F_α . Поскольку F_α — носитель меры V_α , то $V_\alpha(\Phi^{-1}G) > 0$. Отсюда

$$V_\alpha\Phi^{-1}(G) = V_\alpha(\Phi^{-1}G) > 0.$$

Кроме того,

$$V_\alpha\Phi^{-1}(\Phi(F_\alpha)) = V_\alpha(F_\alpha) = 1.$$

Это доказывает, что носителем меры $V_\alpha \Phi^{-1}$ является множество $\Phi(F_\alpha)$.

Пусть $f \in \Phi(F_\alpha)$ и

$$\widehat{G}_\varepsilon = \{g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon\}.$$

Поскольку $f \in \Phi(F_\alpha)$, множество $\widehat{G}_\varepsilon$ — открытая окрестность элемента носителя меры $V_\alpha \Phi^{-1}$. Поэтому

$$V_\alpha \Phi^{-1}(\widehat{G}_\varepsilon) > 0.$$

Так как $P_{T,\Phi,\alpha}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к $V_\alpha \Phi^{-1}$, откуда находим, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} P_{T,\Phi,\alpha}(\widehat{G}_\varepsilon) \geq V_\alpha \Phi^{-1}(\widehat{G}_\varepsilon) > 0.$$

Это неравенство и определения $P_{T,\Phi,\alpha}$ и $\widehat{G}_\varepsilon$ доказывают первую часть теоремы 1.3.

Для доказательства второй части теоремы заметим, что граница $\partial \widehat{G}_\varepsilon$ множества лежит в множестве

$$\{g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon\}.$$

Поэтому $\partial \widehat{G}_{\varepsilon_1} \cap \partial \widehat{G}_{\varepsilon_2} = \emptyset$ для различных положительных ε_1 и ε_2 . Тем самым $\widehat{G}_\varepsilon$ — множество непрерывности меры $V_\alpha \Phi^{-1}$ для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самого большого счетного множества значений ε . Опять используя слабую сходимость $P_{T,\Phi,\alpha}$, получаем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{T,\Phi,\alpha}(\widehat{G}_\varepsilon) \geq V_\alpha \Phi^{-1}(\widehat{G}_\varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon > 0$, за исключением самого большого счетного множества значений ε . Следовательно, определения $P_{T,\Phi,\alpha}$ и $\widehat{G}_\varepsilon$ доказывают вторую часть теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронин С. М. Теорема об «универсальности» дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 3. С. 475–486.
2. Gonek S. M. Analytic properties of zeta and L -functions: Ph. D. Thes. Ann Arbor: Univ. Michigan, 1979.
3. Laurinćikas A., Garunkštis R. The Lerch zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
4. Sander J., Steuding J. Joint universality for sums and products of Dirichlet L -functions // Analysis. 2006. V. 26, N 3. P. 295–312.
5. Бальчионас А., Дубицкас А., Лауринчикас А. О дзета-функции Гурвица с алгебраическим иррациональным параметром // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 179–186.
6. Mishou H. The joint value distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions // Lith. Math. J. 2007. V. 47, N 1. P. 32–47.
7. Buivydas E., Laurinćikas A. A discrete version of the Mishou theorem // Ramanujan J. 2015. V. 38, N 2. P. 331–347.
8. Buivydas E., Laurinćikas A. A generalized joint discrete universality theorem for the Riemann and Hurwitz zeta-functions // Lith. Math. J. 2015. V. 55, N 2. P. 193–206.
9. Лауринчикас А. Дискретная версия теоремы Мишу. II // Тр. мат. ин-та. В. А. Стеклова. 2017. Т. 296. С. 181–191.
10. Laurinćikas A. Joint distribution theorems for the Riemann and Hurwitz zeta-functions // Moscow Math. J. 2018. V. 18, N 2. P. 349–366.
11. Bagchi B. The statistical behavior and universality property of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series: Ph. D. Thes. Calcutta: Indian Statistical Inst., 1981.

- 12. Laurinčikas A. Limit theorems for the Riemann zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996.
- 13. Steuding J. Value-distribution of L -functions. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2007. (Lecture Notes Math.; V. 1877).
- 14. Billingsley P. Convergence of probability measures. New York: Willey, 1968.

Поступила в редакцию 23 апреля 2019 г.

После доработки 23 апреля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Лауринчикас Антанас
Вильнюсский университет,
Институт математики, факультет математики и информатики,
ул. Наугардуко, 24, Вильнюс LT-03225, Литва
`antanas.laurincikas@mif.vu.lt`