V. I. Matyukhin, Maximal solvable subgroups of size 2 integer matrices, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1389–1396

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.615>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.164.48.24

April 26, 2023, 17:31:08

УДК 517.71

МАКСИМАЛЬНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ПОДГРУППЫ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В. И. Матюхин

Аннотация. Изучаются разрешимые подгруппы матричных 2×2 -групп над кольцом Z . С точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ найдена единственная максимальная примитивная разрешимая подгруппа конечного порядка группы $GL(2, Z)$. Описываются максимальные примитивные разрешимые подгруппы, у которых максимальный абелев нормальный делитель совпадает с группой единиц квадратичного расширения кольца Z . Доказывается, что всяким вещественным квадратичным кольцом R определяется h классов сопряженных в $GL(2, Z)$ максимальных примитивных разрешимых подгрупп $GL(2, Z)$, где h — число классов идеалов в кольце R .

DOI 10.33048/smzh.2019.60.615

Ключевые слова: кольцо целых чисел, матричная группа, разрешимая подгруппа, неприводимая подгруппа, примитивная подгруппа, квадратичное расширение кольца, мультипликативная группа.

Введение. Пусть Z — кольцо целых рациональных чисел, M — свободный двучленный Z -модуль, а $GL(2, Z)$ — группа всех автоморфизмов модуля M . Как и в [1], подгруппу Γ группы $GL(2, Z)$ будем называть *приводимой*, если в M есть инвариантные относительно Γ подмодули размерности единица. Тогда в M есть прямое слагаемое размерности единица, инвариантное относительно Γ (см. [2]).

В данной работе изучается строение максимальных разрешимых подгрупп группы $GL(2, Z)$.

1. Если Γ — приводимая подгруппа $GL(2, Z)$, то, очевидно, матрицы g группы Γ одновременно приводятся к виду

$$g = \begin{bmatrix} \pm 1 & z \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad z \in Z. \quad (1)$$

Отсюда следует, что в $GL(2, Z)$ имеется единственная с точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ максимальная разрешимая приводимая подгруппа.

Таким образом, изучать надо только неприводимые максимальные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$. Пусть Γ — неприводимая подгруппа группы $GL(2, Z)$. Группа Γ называется *импримитивной*, если M можно представить в виде прямой суммы подмодулей, перемещаемых автоморфизмами группы Γ между собой. Если Γ — импримитивная подгруппа $GL(2, Z)$, то, очевидно, M обладает таким базисом

$$u_1, u_2, \quad (2)$$

что матрицы $g \in \Gamma$ в базисе (2) мономиальны. Следовательно, матрицы g из Γ имеют один из двух видов:

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Таким образом, в $GL(2, Z)$ имеется единственная с точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ максимальная импримитивная разрешимая подгруппа Γ , состоящая из восьми матриц вида (3). Значит, остается рассмотреть только примитивные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$.

2. Пусть Γ — максимальная примитивная разрешимая подгруппа $GL(2, Z)$, а H — ее максимальный абелев нормальный делитель.

Рассмотрим два случая: 1) H — приводимая подгруппа группы $GL(2, Z)$; 2) H — неприводимая подгруппа группы $GL(2, Z)$.

Пусть H — приводимый максимальный абелев нормальный делитель группы Γ . Очевидно, группа H сопряжена в $GL(2, Z)$ с некоторой подгруппой группы всех матриц вида (1). Так как группа Γ неприводима и как подгруппа группы $GL(2, Q)$, где Q — поле рациональных чисел, то H — вполне приводимая подгруппа $GL(2, Q)$. Порядок подгруппы H группы Γ , будучи делителем восьми, равен двум или четырем. Рассмотрим эти случаи.

1. Порядок группы H равен четырем. Тогда H порождается двумя матрицами вида

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & z_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{где } z_1 \in Z.$$

2. Порядок группы H равен двум. Тогда H состоит из двух матриц с элементами ± 1 на главной диагонали.

Случай 1 разбивается, в свою очередь, на два:

(a) $z_1 \equiv 0 \pmod{2}$;

(b) $z_1 \equiv 1 \pmod{2}$.

В случае (a) можно считать, что

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

в случае (b) — что

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай (a). Пусть $g \in \Gamma \setminus H$,

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in Z, ad - bc = \pm 1 \text{ и } gh_1g^{-1} = h_2.$$

Тогда из $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ находим $g = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $bc = \pm 1$.

Следовательно, группа Γ импримитивна, а потому случай (a) невозможен.

Рассмотрим случай (b). Существует такой элемент $g \in \Gamma \setminus H$, $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

что $gh_1g^{-1} = h_2$. Из этого равенства находим

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -a & a+b \\ -c & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Отсюда для матрицы g имеем две возможности:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Им соответствуют следующие две группы Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (g_1)H; & \Gamma_2 &= (g_2)H; \\ \Gamma_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; H \right\}; & \Gamma_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; H \right\}. \end{aligned}$$

Так как $g_1^{-1}g_2 = g_1g_2 = h_2$, то $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Далее, группа Γ_1 с помощью матрицы $f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ сопряжена с группой $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, а потому примитивна. Следовательно, и случай (b) невозможен.

Рассмотрим теперь случай 2, т. е. случай, когда $H = \{\pm E_2\}$. Пусть A/H — максимальный абелев нормальный делитель группы Γ/H . Порядки элементов фактор-группы являются делителями ее порядка, поэтому A/H является 2-группой. Значит, группа A представима в виде $A = (a_1, b_1)$, где $(a_1, b_1) = -1$, $a_1^2 = \pm 1$, $b_1^2 = \pm 1$. Всегда можно считать, что $a_1^2 = b_1^2 = 1$. Для любого g из Γ имеем

$$ga_1g^{-1} = \lambda a_1^\alpha b_1^\beta = c_1, \quad gb_1g^{-1} = \mu a_1^\gamma b_1^\delta = d_1, \quad (4)$$

где $\alpha, \mu = \pm 1$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z_2 = Z/(2)$. Ясно, что $c_1^2 = a_1^2$, $d_1^2 = b_1^2$. Отсюда и из (4) находим $\alpha + \beta + \alpha\beta = \gamma + \delta + \gamma\delta$. Так как $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z_2$, то $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Последнее невозможно.

Итак, в $GL(2, Z)$ нет максимальных примитивных разрешимых подгрупп с приводимым максимальным абелевым нормальным делителем.

3. Пусть группа H неприводима. Максимальный абелев нормальный делитель примитивной группы является группой всех обратимых элементов области целостности, размерность которой — делитель числа 2. Отсюда и из максимальности группы Γ следует, что H является мультипликативной группой кольца $R = Z(\Theta)$, где Θ — корень неприводимого над Z полинома $x^2 + \alpha x + \beta$. Регулярное представление корней Θ_1 и Θ_2 этого полинома в базисе $[1, \Theta]$ имеет вид

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ввиду следствия из теоремы 3 в [3] и максимальности группы Γ группа Γ/H изоморфна группе относительных автоморфизмов кольца $Z(\Theta)$. Поэтому $\Gamma : H = 2$. Следовательно, в неабелевой группе Γ всегда можно выбрать элемент g так, что $g\Theta_1g^{-1} = \Theta_2$. При любом операторе $t \in \Gamma$ имеем $t\Theta_1t^{-1} = \Theta_i$, $i = 1, 2$, поэтому справедливо представление $\Gamma = (g)H$.

Найдем матрицу g . Обозначим через $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, где $a, b, c, d \in Z$; $ad - bc = \pm 1$, матрицу, соответствующую оператору g в базисе $[1, \Theta]$. Ясно, что $g^2 \in H$. Из $g\Theta_1 = \Theta_2g$ находим

$$g = \begin{bmatrix} a & \alpha a + \beta c \\ c & -a \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Пусть $g^2 = \omega + v\Theta_1$, где $\omega, v \in Z$. Тогда $g^2 = g(\omega + v\Theta_1)g^{-1} = \omega + v\Theta_2 = \omega + v\Theta_1$. Следовательно, $(\Theta_2 - \Theta_1)v = 0$. Так как корни Θ_1 и Θ_2 различны, $v = 0$. Но тогда $g^2 = \pm E_2$. Рассмотрим оба эти случая.

Пусть $g^2 = E_2$. Тогда $a^2 - \alpha ac + \beta c^2 = 1$. Если $Z(\Theta)$ — мнимое квадратичное расширение кольца Z , а квадратичная форма $a^2 - \alpha ac + \beta c^2$, $\{1, -\alpha, \beta\}$ имеет дискриминант Δ , то при $\Delta = -3$ эта форма переводится в приведенную форму унимодулярной подстановкой $S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, $(1, 0)$ будет решением уравнения $a^2 - \alpha ac + \beta c^2 = 1$. Остальные решения этого уравнения находятся при умножении матрицы S слева на автоморфизмы квадратичной формы $\{1, 1, 1\}$. Этими решениями будут пары $(-1, 0)$, $(\frac{1+\alpha}{2}, 1)$, $(\frac{-1+\alpha}{2}, 1)$, $(\frac{-1-\alpha}{2}, -1)$, $(\frac{1-\alpha}{2}, -1)$. Значит, при $\Delta = -3$ условию $g\Theta_1 g^{-1} = \Theta_2$ удовлетворяют следующие три пары матриц:

$$\begin{aligned} g_{1,2} &= \pm \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & g_{3,4} &= \pm \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha}{2} & \frac{3-\alpha}{2} - \beta \\ 1 & -\frac{1-\alpha}{2} \end{bmatrix}, \\ g_{5,6} &= \pm \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{2} & -\frac{3-\alpha}{2} + \beta \\ -1 & \frac{-1+\alpha}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

При $\Delta = -4$ решениями уравнения $a^2 - \alpha ac + \beta c^2 = 1$ будут пары $(\pm 1, 0)$, $(-\frac{\alpha}{2}, -1)$, $(\frac{\alpha}{2}, 1)$. Следовательно, в этом случае

$$g_{1,2} = \pm \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_{3,4} = \pm \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & 2 - \beta \\ 1 & -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, но $\Delta \neq -3$ и $\Delta \neq -4$, то уравнение $a^2 - \alpha ac + \beta c^2 = 1$ имеет два решения. Однако в этом случае H состоит лишь из матриц $\pm E_2$ и по отмеченному ранее в $GL(2, Z)$ нет примитивных подгрупп, имеющих это H своим максимальным абелевым нормальным делителем. Следовательно, в случае положительно определенной квадратичной формы $\{1, -\alpha, \beta\}$ и $g^2 = E_2$ рассмотрению подлежат лишь дискриминанты $\Delta = -3$ и $\Delta = -4$.

Так как положительно определенная квадратичная форма не может представлять число -1 , то $g^2 \neq -E_2$ при $\Delta < 0$.

По теореме Дирихле о группе единиц (см. [4]) мультипликативная группа мнимого квадратичного расширения кольца Z будет конечной циклической группой. Рассмотрим конечные максимальные примитивные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$. По отмеченному выше, достаточно рассмотреть случаи $\Delta = -3$ и $\Delta = -4$. Так как $\Gamma = (g)H$, то $\Gamma = \left\{ g, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ при $\Delta = -4$. Легко видеть, что порядок группы Γ в этом случае равен восьми. Имеется всего пять типов групп восьмого порядка (см. [5, введение]), и группа Γ принадлежит одному из них (группа диэдра) лишь при $\alpha = 0$. Но в этом случае Γ не примитивна.

При $\Delta = -3$ были построены три пары (см. (7)) матриц g , но лишь при $\alpha = -1$ найденные матрицы g вместе с $H = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ образуют группы (группы типа 3 в [5, § 72]), причем все эти группы совпадают. Значит, для получившейся группы 12-го порядка справедлива

Теорема 1. *С точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ группа двенадцатого порядка*

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (8)$$

будет единственной максимальной примитивной разрешимой подгруппой конечного порядка группы $GL(2, Z)$.

4. Рассмотрим случай, когда $Z(\Theta)$ — вещественное квадратичное расширение кольца Z , т. е. когда дискриминант Δ положителен.

Если $\Delta = 4k$, где k — натуральное число, и $g^2 = E_2$, то квадратичная форма $\{1, -\alpha, \beta\}$, представляющая единицу, эквивалентна форме $\{1, 0, -k\}$ и переводится в нее подстановкой $S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Неопределенное уравнение Ферма $x^2 - ky^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах, поэтому существует бесконечно много матриц g , имеющих вид (6). Нахождение таких матриц сводится к отысканию числителей и знаменателей подходящих дробей к $\sqrt{k}$.

Случай $\Delta = 4k$ и $g^2 = -E_2$ также приводится к решению только что упоминавшегося неопределенного уравнения Ферма.

При $\Delta = 4k+1$ квадратичная форма $\{1, -\alpha, \beta\}$ эквивалентна форме $\{1, 1, -k\}$ при $g^2 = E_2$ и форме $\{-1, 1, k\}$ при $g^2 = -E_2$. Диофантовы уравнения $x^2 + xy - ky^2 = 1$ и $x^2 - xy - ky^2 = 1$ имеют бесконечно много решений. Если обозначить через ξ_1 и ξ_2 корни уравнения $x^2 + x - k = 0$, то, например, первое из этих двух уравнений переписывается так: $(x - \xi_1 y) \cdot (x - \xi_2 y) = 1$. Но если норма $N(X - \xi_1 Y)$ равна 1, то $X - \xi_1 Y$ — единица вещественного квадратичного кольца $Z(\Theta)$, а потому представима в виде некоторой степени v основной единицы ϵ_0 этого кольца: $X - \xi_1 Y = \epsilon_0^v$.

Этим вопрос построения матриц g , имеющих вид (6), решается полностью для всех случаев.

Если порядок группы H не конечен, то H является мультипликативной группой вещественного квадратичного кольца. По уже упоминавшейся теореме Дирихле эта мультипликативная группа является расширением циклической группы второго порядка, состоящей из $\pm E_2$, при помощи бесконечной циклической группы. Из этого следует, что все элементы группы H представимы в виде $\epsilon = a + \Theta c$, где $a, c \in Z$; $a^2 - \alpha ac + \beta c^2 = \pm 1$; Θ — корень неприводимого уравнения $x^2 + \alpha x + \beta = 0$. Регулярное представление элемента ϵ в фундаментальном базисе имеет вид

$$\epsilon = \begin{bmatrix} a & -\beta c \\ c & a - \alpha c \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Найдем произведение матриц g из (6) и ϵ из (9):

$$g\epsilon = \begin{bmatrix} a^2 - \alpha ac + \beta c^2 & -\alpha \beta c^2 - \alpha a^2 + \alpha^2 ac \\ 0 & -a^2 + \alpha ac - \beta c^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $g = \pm \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \epsilon^{-1}$. Следовательно, справедлива

Теорема 2. Максимальные примитивные разрешимые подгруппы группы $GL(2, Z)$, у которых максимальный абелев нормальный делитель H совпадает с группой единиц вещественного квадратичного расширения кольца Z корнем неприводимого над полем рациональных чисел полинома $x^2 + \alpha x + \beta$, имеют вид

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; H \right\}.$$

Пусть в вещественном квадратичном кольце R , группой единиц которого является H , имеется h классов идеалов. Так как характеристический полином матрицы регулярного представления основной единицы кольца R рационально неприводим, в силу [6], $r_i^{-1} H r_i = H_i \subset GL(2, Z)$, где r_i — матрица перехода от базиса кольца R к базису идеала I_i этого кольца, $i = 1, 2, \dots, h$.

Группы H и H_i не сопряжены в $GL(2, Z)$. Действительно, обозначим через N группу единиц кольца R , через $[\omega_1, \omega_2] = [\omega]$ — базис кольца R , а через $[v_1^i, v_2^i] = [v_i]$ — базис идеала I_i . Тогда представления N в базисах $[\omega]$ и $[v_i]$ имеют вид

$$[\omega N] = H[\omega], \quad [v_i N] = H_i[v_i].$$

Если $H = s^{-1} H_i s$, где $s \in GL(2, Z)$, то $s[\omega N] = H_i s[\omega]$. Но H_i — представление N в базисе $[v_i]$, поэтому $[v_i] = s[\omega]$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Переход от специального базиса кольца к специальному базису идеала (см. [4]) осуществляется преобразованием с матрицей $r = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix}$, поэтому матрица $g = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ этим преобразованием переводится в матрицу

$$r^{-1} g r = \begin{bmatrix} 1 & 2\frac{m_2}{m_1} - \alpha\frac{m_3}{m_1} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что матрица $r^{-1} g r$ лишь тогда принадлежит группе $GL(2, Z)$, когда выполняется следующее условие делимости:

$$m_1 / (2m_2 - \alpha m_3). \quad (11)$$

Отсюда следует, что если условие (11) выполняется, то группа $r^{-1} \Gamma r$ будет несопряженной с Γ в $GL(2, Z)$ максимальной примитивной разрешимой подгруппой $GL(2, Z)$. Если условие (11) не выполняется, то группа H_i будет максимальной неприводимой примитивной разрешимой подгруппой группы $GL(2, Z)$.

Так как на группу единиц вещественного квадратичного расширения кольца Z никаких ограничений не накладывается, из отмеченного следует

Теорема 3. В группе $GL(2, Z)$ имеется бесконечно много не сопряженных в $GL(2, Z)$ максимальных примитивных разрешимых подгрупп. Всяким вещественным квадратичным кольцом R определяется h классов сопряженных в $GL(2, Z)$ максимальных примитивных разрешимых подгрупп $GL(2, Z)$, если h — число классов идеалов в кольце R .

5. Рассмотрим два примера бесконечных максимальных разрешимых подгрупп группы $GL(2, Z)$.

ПРИМЕР 1. Определим максимальные примитивные неприводимые разрешимые группы из $GL(2, Z)$, связанные с расширением кольца Z корнем полинома $x^2 - x - 1$.

Основная единица $\epsilon_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ кольца $Z(\sqrt{5})$ имеет следующее регулярное представление в фундаментальном базисе этого кольца:

$$\epsilon_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В кольце $Z(\sqrt{5})$ имеется лишь один класс идеалов, поэтому его группа единиц H однозначно представима в виде подгруппы $GL(2, Z)$:

$$H = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = (E_2)^k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n.$$

Следовательно, группа

$$\Gamma = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = (E_2)^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^s \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

будет единственной максимальной неприводимой разрешимой подгруппой группы $GL(2, Z)$, у которой максимальный абелев нормальный делитель совпадает с группой единиц кольца $Z(\sqrt{5})$.

ПРИМЕР 2. Если группа H_1 является мультипликативной группой расширения R кольца Z корнем полинома $x^2 - 6x - 1$, то из наличия в кольце $Z(\sqrt{10})$ двух классов идеалов следует существование группы H_2 , которая принадлежит $GL(2, Z)$ и рационально сопряжена с H_1 , но не сопряжена с ней в $GL(2, Z)$.

Основная единица ϵ_0 кольца $Z(\sqrt{10})$ определяется наименьшим целочисленным решением уравнения Пелля: $\frac{u^2 - 10v^2}{4} = \pm 1$. Так как разложение $\sqrt{10}$ в непрерывную дробь имеет вид

$$\sqrt{10} = 3 + (\sqrt{10} - 3) = 3 + \frac{1}{\sqrt{10} + 3},$$

$$\sqrt{10} + 3 = 6 + (\sqrt{10} - 3) = 6 + \frac{1}{\sqrt{10} + 3}, \quad \sqrt{10} = \{3, \bar{6}\},$$

а подходящие числители и знаменатели образуют схему

6		
6	1	0
1	0	1

основной единицей этого расширения будет $\epsilon_0 = 3 + \sqrt{10}$. Фундаментальный базис кольца $Z(\sqrt{10})$ имеет вид $[w_1, w_2] = [1, \sqrt{10}]$, а $[v_1, v_2] = [3, 2 + \sqrt{10}]$ — базис идеала этого кольца. Действительно, $3\sqrt{10} = -2 \cdot 3 + 3 \cdot (2 + \sqrt{10})$; $(2 + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (2 + \sqrt{10})$. Матрица перехода от первого базиса ко второму имеет вид

$r = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Единице ϵ_0 в базисе $[w_1, w_2]$ кольца R соответствует матрица

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ а в базисе } [v_1, v_2] \text{ идеала — матрица } \Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Условие (10) не выполняется, так как 3 не делит 10. Поэтому расширением $Z(\sqrt{10})$ определяются с точностью до сопряженности в $GL(2, Z)$ следующие две максимальные неприводимые разрешимые подгруппы группы $GL(2, Z)$:

$$\Gamma_1 = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\} = (-E_2)^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^s \cdot \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^n;$$

$$\Gamma_2 = \left\{ -E_2; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \right\} = (-E_2)^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^n.$$

Из приведенных примеров видно, что задача построения максимальной примитивной разрешимой подгруппы Γ группы $GL(2, Z)$, у которой максимальный абелев нормальный делитель совпадает с мультипликативной группой кольца $Z(\sqrt{d})$, $d > 0$, сводится к отысканию основной единицы этого расширения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матюхин В. И. Максимальные разрешимые подгруппы $GL(2, Z)$ // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1966. № 1. С. 53–55.
2. Супруненко Д. А., Матюхин В. И. О разрешимых группах матриц над евклидовым кольцом // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1965. № 3. С. 5–9.
3. Матюхин В. И. Разрешимые линейные группы над евклидовым кольцом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1379–1384.
4. Хассе Г. Лекции по теории чисел. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Шмидт О. Ю. Абстрактная теория групп. Избранные труды. Математика. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. Чеботарёв Н. Г. О числе классов матриц. Собрание сочинений. М.: АН СССР, 1949. Т. 2.

Поступила в редакцию 4 ноября 2018 г.

После доработки 4 ноября 2018 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Матюхин Валентин Иванович
гимназия Сантарос,
ул. Юозапавичаус, 12, Вильнюс LT-09311, Литва
`valentin.matiuchin@mail.ru`