V. A. Molchanov, Elementary definability of the class of universal planar automata in the class of semigroups, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1397–1410

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.616>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.217.227

April 26, 2023, 16:36:35

УДК 512.534.5+519.713.2

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ КЛАССА УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ В КЛАССЕ ПОЛУГРУПП

В. А. Молчанов

Аннотация. Универсальные планарные автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категории полугрупповых автоматов, у которых множества состояний и множества выходных сигналов наделены алгебраическими структурами плоскостей, инвариантными относительно действий функций перехода и выхода. Доказана элементарная определимость класса универсальных планарных автоматов в классе полугрупп и исследована проблема элементарной классификации универсальных планарных автоматов с помощью теорий первого порядка полугрупп входных сигналов таких автоматов.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.616

Ключевые слова: элементарная определимость, автомат, плоскость, полугруппа, элементарная классификация.

1. Введение

Одним из главных разделов современной алгебры является обобщенная теория Галуа, начало которой было положено в исследованиях Э. Галуа и которая посвящается изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебраических систем, специальным образом связанных с исходными объектами. В качестве исходных математических объектов рассматривались разнообразные алгебраические системы (от графов и гиперграфов до колец и векторных пространств), топологические пространства, формальные языки и многие другие, а в качестве производных алгебраических систем рассматривались, соответственно группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов и решетки подсистем алгебраических систем, группы гомеоморфизмов и полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств, синтаксические моноиды формальных языков и многие другие. Проводимые в этом направлении исследования обычно следуют уже сложившемуся традиционному кругу вопросов обобщенной теории Галуа: принципиальное значение имеет задача о том, насколько хорошо производная алгебраическая система определяет исходный математический объект; затем исследуется, какими абстрактными и элементарными свойствами характеризуется такая производная алгебраическая система; наконец, с помощью полученных результатов изучаются взаимосвязи свойств исходного объекта и его производной алгебраической системы. Такие вопросы для групп автоморфизмов алгебраических систем, полугрупп эндоморфизмов графов, колец эндоморфизмов модулей и других производных алгебраических систем весьма успешно решались Б. И. Плоткиным [1], А. Г. Пинусом

[2–4], Л. М. Глускиным [5, 6], Ю. М. Важениным [7, 8], А. В. Михалевым [9] и многими другими алгебраистами.

В обзорной статье Ю. М. Важенина и А. Г. Пинуса [10] отмечается, что одними из важнейших проблем обобщенной теории Галуа являются проблема элементарной классификации исходных объектов с помощью теорий первого порядка производных алгебраических систем и проблема разрешимости теорий первого порядка производных алгебраических систем. В этом направлении важные результаты получены А. Г. Пинусом [2–4] для разнообразных производных структур свободных алгебр, унарных и групп, Ю. М. Важениным [7, 8] для полугрупп преобразований графов, Е. И. Буниной и А. В. Михалевым [11] для колец эндоморфизмов групп, Ф. А. Мурзиным для колец непрерывных функций [12]. Как известно [13], эффективным инструментом решения такого рода проблем является метод относительно элементарной определимости одного класса моделей $\mathbf{K}$ в другом классе моделей $\mathbf{K}_1$, суть которого заключается в построении изоморфной копии исходной модели $A \in \mathbf{K}$ в ее производной модели $S(A) \in \mathbf{K}_1$ с помощью средств узкого исчисления предикатов (УИП) сигнатуры класса $\mathbf{K}_1$ и некоторых фиксированных элементов модели $S(A)$. Если при этом изоморфная копия модели A в модели $S(A)$ строится с помощью средств узкого исчисления предикатов (УИП) без использования фиксированных элементов модели $S(A)$, то относительно элементарную определимость принято в теории моделей называть элементарной определимостью.

К обобщенной теории Галуа относятся также исследования автоматов в категориях [14], т. е. автоматов, у которых системы состояний и выходных сигналов являются объектами некоторой категории $\mathbf{K}$, а функции переходов и выходные функции — морфизмами категории $\mathbf{K}$. Например, Л. М. Глускин, Ю. М. Важенин и другие авторы (см., обзор в [15]) исследовали полугруппы эндоморфизмов графов, которые могут рассматриваться как графические полуавтоматы (т. е. автоматы без выходных сигналов, для которых системы состояний являются объектами категории графов $\mathbf{Gr}$). Кроме того, известная проблема Л. М. Глускина и Л. А. Скорнякова о полугруппах эндоморфизмов проективных плоскостей может быть рассмотрена как проблема определимости планарных полуавтоматов их полугруппами входных сигналов (см. проблему 1.20 в [16]). В [17] было исследовано обобщение этой проблемы на автоматы с выходными сигналами, для которых системы состояний и выходных сигналов являются объектами категории плоскостей $\mathbf{Pl}$. Как следует из [14], в категории планарных автоматов для любых плоскостей $\Pi, \Pi' \in \mathbf{Pl}$ существует универсальный притягивающий объект $\text{Atm}(\Pi, \Pi')$, который называется универсальным планарным автоматом над плоскостями Π, Π' . Полугруппа входных сигналов такого автомата $S = \text{End}(\Pi_1) \times \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ рассматривается в качестве производной алгебраической системы автомата $\text{Atm}(\Pi, \Pi')$. Следовательно, алгебраическая теория планарных автоматов тесным образом связана как с обобщенной теорией Галуа, так и с общеизвестной задачей определяемости математических объектов их автоморфизмами и эндоморфизмами, которая сформулирована в числе прочих актуальных математических проблем в книге С. Улама [18]. Главный результат работы [17] показывает, что универсальные планарные автоматы определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных сигналов. Для исследования проблемы элементарной определимости таких автоматов своими полугруппами входных сигналов в настоящей работе доказывается элементарная определимость класса универсальных планарных автома-

тов в классе полугрупп. Полученный результат дает возможность проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов планарных автоматов и элементарных теорий классов полугрупп таких, как проблема элементарной эквивалентности алгебраических систем, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов алгебраических систем и др.

2. Основные понятия

Вначале напомним некоторые понятия из математической логики, теории плоскостей и теории автоматов, которые будут использоваться ниже. Читатели, интересующиеся дальнейшими деталями, могут обратиться, например, к работам Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [19], Р. Хартсхорна [20] и Б. И. Плоткина [14].

Под *отображением* множества X в множество Y , обозначаемым $\varphi : X \rightarrow Y$, понимается однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ с областью определения $\text{dom } \varphi = X$. Для элемента $x \in X$ образ x относительно отображения φ обозначается через $\varphi(x)$. Для подмножества $A \subset X$ положим $\varphi(A) = \{\varphi(x) \mid x \in A\}$. Для элемента $a \in Y$ символом ξ_a обозначается постоянное отображение $\xi_a : X \rightarrow \{a\}$. Отображение $\varphi : X \rightarrow X$ называется *преобразованием множества* X . Символом Δ_X обозначается тождественное преобразование множества X .

Для отображений $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ композиция $\varphi\psi : X \rightarrow Z$ определяется по формуле $\varphi\psi(x) = \psi(\varphi(x))$; для отображения $\varphi : X \rightarrow Y$ декартова степень $\varphi^3 : X^3 \rightarrow Y^3$ — по формуле $\varphi^3(x_1, x_2, x_3) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3))$.

Пусть X, Y — непустые множества. Обозначим через $T(X)$ множество всех преобразований X , $F(X, Y)$ — множество всех отображений X в Y и $S(X, Y)$ — декартово произведение $T(X) \times F(X, Y)$ множеств $T(X), F(X, Y)$. Элементами множества $S(X, Y)$ являются упорядоченные пары (f_1, f_2) отображений $f_1 : X \rightarrow X$, $f_2 : X \rightarrow Y$, которые могут рассматриваться как вектор-функции $f : X \rightarrow X \times Y$, определяющиеся по формуле $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ для $x \in X$. Отображения f_1, f_2 называются соответственно *первой* и *второй компонентами вектор-функции* f . Таким образом, вектор-функции могут отождествляться с упорядоченными парами их компонент.

Следуя [14], для вектор-функций $f, g \in S(X, Y)$ определяется *произведение* $f \cdot g \in S(X, Y)$ по формуле $f \cdot g = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1g_1, f_1g_2)$. Так как эта операция ассоциативна [14], множество $S(X, Y)$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу.

Следуя [20], под *плоскостью* будем понимать алгебраическую систему вида $\Pi = (X, L)$, где X — непустое множество точек и L — семейство его подмножеств, именуемых *прямыми*, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) любые две точки плоскости Π содержатся в одной и только одной прямой; (A_2) любая прямая плоскости Π содержит по крайней мере три точки; (A_3) в плоскости Π существуют три точки, не принадлежащие одной прямой. Точки плоскости называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой.

В частности, плоскость Π является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует такая единственная прямая l_1 , что $x \in l_1$ и $l \cap l_1 = \emptyset$.

Пусть $\Pi = (X, L)$, $\Pi' = (X', L')$ — некоторые плоскости. Отображение $\varphi : X \rightarrow X'$ называется гомоморфизмом Π в Π' и обозначается через $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi'$, если оно отображает коллинеарные точки плоскости Π в коллинеарные точки

плоскости Π' , т. е. выполняется следующее условие:

$$(\forall l \in L)(\exists l' \in L') \varphi(l) \subset l'.$$

Множество всех гомоморфизмов Π в Π' обозначим через $\text{Hom}(\Pi, \Pi')$. Очевидно, что для любой прямой l' плоскости Π' любое отображение $\varphi : X \rightarrow l'$ является гомоморфизмом Π в Π' .

Гомоморфизм плоскости Π в себя называется *эндоморфизмом* Π . Множество всех эндоморфизмов плоскости Π с операцией композиции образует полугруппу $\text{End } \Pi$.

Для плоскостей $\Pi = (X, L)$, $\Pi' = (X', L')$ множество $\text{End } \Pi \times \text{Hom}(\Pi, \Pi')$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу, которую обозначим через $S(\Pi, \Pi')$.

Для описания свойств плоскости $\Pi = (X, L)$ на языке УИП будем рассматривать Π как двухсортную алгебраическую систему $\Pi = (X, L, \rho)$ с двумя базисными множествами X, L и бинарным отношением $\rho \subset X \times L$, которое для элементов $x \in X$, $l \in L$ определяется по формуле $(x, l) \in \rho \iff x \in l$ и удовлетворяет аксиомам плоскости:

$$(\forall x^{(1)}, y^{(1)})(x^{(1)} \neq y^{(1)} \implies (\exists! x^{(2)})((x^{(1)}, x^{(2)}) \in \rho \wedge (y^{(1)}, x^{(2)}) \in \rho)), \quad (A_1)$$

$$(\forall x^{(2)})(\exists x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \left(\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq 3} x_i^{(1)} \neq x_j^{(1)} \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (x_i^{(1)}, x^{(2)}) \in \rho \right), \quad (A_2)$$

$$(\exists x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})(\forall x^{(2)}) \neg \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (x_i^{(1)}, x^{(2)}) \in \rho \right), \quad (A_3)$$

где $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — переменные первого и второго сорта, обозначающие соответственно точки и прямые плоскости.

В частности, плоскость $\Pi = (X, L, \rho)$ является проективной, если выполняется аксиома

$$(\forall x^{(2)}, y^{(2)})(\exists x^{(1)})((x^{(1)}, x^{(2)}) \in \rho \wedge (x^{(1)}, y^{(2)}) \in \rho), \quad (P)$$

и аффинной, если выполняется аксиома

$$\begin{aligned} & (\forall x^{(2)})(\forall x^{(1)})(x^{(1)}, x^{(2)}) \notin \rho \\ & \implies (\exists! y^{(2)})((x^{(1)}, y^{(2)}) \in \rho \wedge (\forall y^{(1)})(y^{(1)}, x^{(2)}) \notin \rho \vee (y^{(1)}, y^{(2)}) \notin \rho)). \end{aligned} \quad (A)$$

Изоморфизмом таких алгебраических систем $\Pi = (X, L, \rho)$, $\Pi' = (X', L', \rho')$ является упорядоченная пара $\pi = (\varphi, \psi)$ биекций $\varphi : X \rightarrow X'$, $\psi : L \rightarrow L'$, сохраняющая бинарные отношения этих систем, т. е. для любых $x \in X, l \in L$ выполняется условие

$$(x, l) \in \rho \iff (\varphi(x), \psi(l)) \in \rho'.$$

Следуя [14], под *автоматом* будем понимать алгебраическую систему $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X , полугруппы входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$, множества выходных сигналов Y , функции переходов $\delta : X \times S \rightarrow X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \rightarrow Y$ таких, что для любых $x \in X$ и $s, t \in S$ выполняются условия $\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t)$, $\lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$.

Для каждого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \rightarrow X$, $\lambda_s : X \rightarrow Y$ и вектор-функцию $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ по формулам $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где

$x \in X$. По определению автомата последовательное действие входных сигналов $s, t \in S$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f_t(f_s(x)) = (\delta(\delta(x, s), t), \lambda(\delta(x, s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$

Это означает, что соответствие $s \mapsto f_s$ ($s \in S$) является гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу вектор-функций $S(X, Y)$. В частности, это соответствие является мономорфизмом полугруппы S в полугруппу $S(X, Y)$, если $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ является автоматом без равнодействующих сигналов, т. е. для любых $s, t \in S$, $s \neq t$ выполняется условие $f_s \neq f_t$. В этом случае действие входного сигнала $s \in S$ полностью определяется действием пары отображений δ_s, λ_s и можно отождествить входной сигнал s с вектор-функцией $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$.

Входной сигнал $a \in S$ автомата $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется *автономным*, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т. е. найдутся такие состояние автомата, обозначаемое через a_1 , и выходной сигнал автомата, обозначаемый через a_2 , что $\delta(x, a) = a_1$, $\lambda(x, a) = a_2$ для всех состояний автомата $x \in X$. Для автомата $\mathbf{A}$ без равнодействующих входных сигналов автономный входной сигнал $a = (\delta_a, \lambda_a) = (\xi_{a_1}, \xi_{a_2})$ является упорядоченной парой постоянных отображений $\xi_{a_1} : X \rightarrow \{a_1\}$, $\xi_{a_2} : X \rightarrow \{a_2\}$.

По определению [14] планарные автоматы являются автоматами в категории плоскостей $\mathbf{Pl}$, т. е. автоматами $\mathbf{A} = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X_1 и множеством выходных сигналов X_2 , наделенными структурами плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$, полугруппой входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$, функцией переходов $\delta : X_1 \times S \rightarrow X_1$ и выходной функцией $\lambda : X_1 \times S \rightarrow X_2$, для которых при каждом фиксированном $s \in S$ преобразование $\delta_s : X_1 \rightarrow X_1$ является эндоморфизмом плоскости Π_1 и отображение $\lambda_s : X_1 \rightarrow X_2$ является гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2 . Такие автоматы обозначаются символом $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$.

Так как с алгебраической точки зрения планарные автоматы представляют собой многосортные алгебраические системы, *гомоморфизмом планарного автомата* $\mathbf{A} = (\Pi_X, S, \Pi_Y, \delta, \lambda)$ в *планарный автомат* $\mathbf{A}' = (\Pi_{X'}, S', \Pi_{Y'}, \delta', \lambda')$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ отображений $f : X \rightarrow X'$, $\pi : S \rightarrow S'$ и $g : Y \rightarrow Y'$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т. е. f является гомоморфизмом плоскости Π_X в плоскость $\Pi_{X'}$, π — гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу S' , g — гомоморфизмом плоскости Π_Y в плоскость $\Pi_{Y'}$, и для любых значений $x \in X$, $s \in S$ выполняются условия

$$f(\delta(x, s)) = \delta'(f(x), \pi(s)), \quad g(\lambda(x, s)) = \lambda'(f(x), \pi(s)).$$

Важный пример планарного автомата дает алгебраическая система

$$\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y) = (\Pi_X, S(\Pi_X, \Pi_Y), \Pi_Y, \delta^\circ, \lambda^\circ),$$

где $\Pi_X = (X, L_X)$, $\Pi_Y = (Y, L_Y)$ — некоторые плоскости и для любых $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(\Pi_X, \Pi_Y)$ определены значения $\delta^\circ(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda^\circ(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x)$.

Легко проверить, что $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого планарного автомата $\mathbf{A} = (\Pi_X, S, \Pi_Y, \delta, \lambda)$ существует гомоморфизм $\pi : S \rightarrow S(\Pi_X, \Pi_Y)$ такой, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом $\mathbf{A}$ в $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$. По этой причине автомат $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ называется [14] *универсальным планарным автоматом над плоскостями* Π_X, Π_Y .

Для описания свойств планарных автоматов $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$ на языке УИП будем рассматривать $\mathbf{A}$ в виде пятисортной алгебраической системы $\mathbf{A} = ((X_1, L_1, \in_1), (S, \cdot), (X_2, L_2, \in_2), \delta, \lambda)$ с пятью базисными множествами X_1, L_1, S, X_2, L_2 и сигнатурой $\Omega = \{\in_1, \cdot, \in_2, \delta, \lambda\}$. Напомним, что здесь X_1 и L_1 (соответственно X_2 и L_2) — множества точек и прямых плоскости состояний Π_1 (соответственно плоскости выходных сигналов Π_2), S — множество входных сигналов автомата $\mathbf{A}$, $\in_1$ (соответственно $\in_2$) — символ бинарного отношения принадлежности точек плоскости состояний Π_1 (соответственно плоскости выходных сигналов Π_2) ее прямым, $\cdot$ — символ бинарной операции полугруппы S , δ и λ — символы бинарных операций функции переходов и выходной функции автомата $\mathbf{A}$.

Элементарная теория планарных автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП сигнатуры Ω с пятисортными переменными $\mathbf{L}_\mathbf{A}$. Алфавит такого языка состоит: (1) из счетного множества индивидуальных переменных первого сорта $x^{(1)}, y^{(1)}, \dots$ (соответственно второго сорта $x^{(2)}, y^{(2)}, \dots$) для обозначения точек (соответственно прямых) плоскости состояний автомата; (2) из счетного множества индивидуальных переменных третьего сорта $x^{(3)}, y^{(3)}, \dots$ для обозначения входных сигналов автомата; (3) из счетного множества индивидуальных переменных четвертого сорта $x^{(4)}, y^{(4)}, \dots$ (соответственно пятого сорта $x^{(5)}, y^{(5)}, \dots$) для обозначения точек (соответственно прямых) плоскости выходных сигналов автомата; (4) из двуместного предикатного символа $\in_1$ (соответственно $\in_2$) для обозначения отношения принадлежности точек плоскости состояний (соответственно плоскости выходных сигналов) автомата ее прямым; (5) из двуместного функционального символа $\cdot$ для обозначения операции умножения полугруппы входных сигналов автоматов; (6) из двуместных функциональных символов δ и λ для обозначения функции переходов и выходной функции автомата; (7) из конечного множества логических и технических символов таких, как $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff, \forall, \exists, =, (,)$.

Для языка $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ термы трех сортов получают обычным комбинированием символа $\cdot$ с двумя термами третьего сорта и символов δ, λ с термами первого и третьего сортов, т. е. это выражения вида $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}, \delta(t^{(1)}, t^{(3)}), \lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$, где $x^{(1)}$ и $t^{(1)}$ — переменная и терм первого сорта, $x^{(2)}$ — переменная второго сорта, $x^{(3)}$ и $t^{(3)}, t_1^{(3)}$ — переменная и термы третьего сорта. При этом получают термы $\delta(t^{(1)}, t^{(3)}), t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}$ и $\lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$ первого, третьего и четвертого сортов соответственно. Термами второго и пятого сортов являются индивидуальные переменные второго и пятого сортов, обозначающие прямые, соответственно плоскости состояний и плоскости выходных сигналов автоматов.

Атомарные формулы языка $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ получают обычным комбинированием символа $=$ с двумя термами одного сорта, символа $\in_1$ — с термом первого сорта и термом второго сорта и символа $\in_2$ — с термом четвертого сорта и термом пятого сорта, т. е. это выражения вида $t = t', t^{(1)} \in_1 t^{(2)}$ и $t^{(4)} \in_2 t^{(5)}$, где t, t' — термы одного и того же сорта, $t^{(i)}$ — термы i -го сорта (где $i = 1, 2, 4, 5$). Формулы языка $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ определяются по индукции обычным образом (см., например, [19]).

3. Вспомогательные результаты

Согласно [21] для универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ над плоскостями $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ естественно определяются сле-

дующие канонические отношения на полугруппе входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$:

1) множество C всех автономных входных сигналов a автомата $\mathbf{A}$, под действием которых все состояния автомата переводятся в одно и то же состояние $a_1 \in X_1$ и отображаются в один и тот же выходной сигнал $a_2 \in X_2$;

2) бинарное отношение ε_1 на множестве C , которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов $a, b \in C$, действия которых одинаково преобразуют состояния автомата $\mathbf{A}$, т. е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_1 \iff a_1 = b_1$;

3) бинарное отношение ε_2 на множестве C , которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов $a, b \in C$, при действии которых состояния автомата $\mathbf{A}$ отображаются в одинаковые выходные сигналы, т. е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_2 \iff a_2 = b_2$;

4) бинарное отношение η на множестве C^2 , которое состоит из таких упорядоченных пар (α, β) элементов $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ с автономными входными сигналами $a, b, c, d \in C$, при действии которых для каждого $i = 1, 2$ состояния автомата $\mathbf{A}$ отображаются в коллинеарные точки a_i, b_i, c_i, d_i соответствующей плоскости Π_i , т. е. по определению

$$(\alpha, \beta) \in \eta \iff \text{точки } a_i, b_i, c_i, d_i \text{ коллинеарны в плоскости } \Pi_i \ (i = 1, 2).$$

В [21] доказано, что канонические отношения универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) для любого состояния (соответственно выходного сигнала) x автомата $\mathbf{A}$ найдется такой автономный входной сигнал этого автомата, обозначаемый через $\hat{x}$, при действии которого все состояния автомата переходят в состояние x (соответственно отображаются в выходной сигнал x), т. е. выполняется равенство $\hat{x}_1 = x$ (соответственно $\hat{x}_2 = x$);

2) для каждого $i = 1, 2$ отношение ε_i является эквивалентностью на множестве C и отображение $\varphi_i : X_i \rightarrow C/\varepsilon_i$, определяемое для элементов $x \in X_i$ по формуле $\varphi_i(x) = \varepsilon_i(\hat{x})$, является биекцией X_i на фактор-множество C/ε_i ;

3) для каждого $i = 1, 2$ ограничение η_i отношения η на множестве $D_i = C^2 \setminus \varepsilon_i$ является эквивалентностью такой, что отображение $\psi_i : L_i \rightarrow D_i/\eta_i$, определяемое для элементов $l \in L_i$ по формуле $\psi_i(l) = \eta_i(\hat{x}, \hat{y})$ для произвольных различных точек $x, y \in l$, является биекцией L_i на фактор-множество D_i/η_i .

Пусть $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ — универсальный планарный автомат над некоторыми плоскостями $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. С помощью канонических отношений этого автомата введем следующие понятия:

1) для каждого $i = 1, 2$ определим двухсортную алгебраическую систему $\bar{\Pi}_i = (\bar{X}_i, \bar{L}_i, \bar{\rho}_i)$ с базисными множествами $\bar{X}_i = C/\varepsilon_i$, $\bar{L}_i = D_i/\eta_i$ и бинарным отношением $\bar{\rho}_i \subset \bar{X}_i \times \bar{L}_i$, которое для элементов $a, b, c \in C$, $b \neq c(\varepsilon_i)$ задается по формуле

$$(\varepsilon_i(a), \eta_i(b, c)) \in \bar{\rho}_i \iff \text{точки } a_i, b_i, c_i \text{ коллинеарны в плоскости } \Pi_i;$$

2) определим два отображения $\bar{\delta} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_1$, $\bar{\lambda} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_2$, которые для элементов $a \in C$, $s \in S$ задаются по формулам

$$\bar{\delta}(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_1(a \cdot s), \quad \bar{\lambda}(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_2(a \cdot s).$$

В [21] доказан следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ — универсальный планарный автомат над некоторыми плоскостями $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для каждого $i = 1, 2$ плоскость Π_i изоморфна алгебраической системе $\bar{\Pi}_i = (\bar{X}_i, \bar{L}_i, \bar{\rho}_i)$;
- 2) автомат $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ изоморфен планарному автомату $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\Pi}_1, S, \bar{\Pi}_2, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$ с плоскостью состояний $\bar{\Pi}_1$, полугруппой входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$, плоскостью выходных сигналов $\bar{\Pi}_2$, функцией переходов $\bar{\delta} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_1$ и выходной функцией $\bar{\lambda} : \bar{X}_1 \times S \rightarrow \bar{X}_2$.

Вышеприведенные результаты показывают, что главным инструментом изучения универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ с помощью исследования его полугруппы входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ являются следующие канонические отношения на этой полугруппе: унарное отношение C , бинарные отношения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ на множестве C и бинарное отношение η на множестве C^2 . Покажем, что все эти канонические отношения определяются формулами элементарной теории полугрупп, т. е. формулами языка УИП сигнатуры полугрупп $\mathbf{L}_S$.

Рассмотрим следующие формулы элементарной теории полугрупп:

$$RZ(x) = (\forall y)(yx = x), \quad LI(x) = (\forall y)(xy = y),$$

$$E_1(x, y) = RZ(x) \wedge RZ(y) \wedge (\forall z)(LI(z) \implies xz = yz),$$

$$R(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge_{i=1}^3 RZ(x_i) \wedge (\forall y_1, y_2, y_3) \left(\bigwedge_{i=1}^3 RZ(y_i) \wedge \bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^3 \neg E_1(y_i, y_j) \implies (\exists z) \left(\bigwedge_{i=1}^3 y_i z = x_i \right) \right),$$

$$E_2(x, y) = RZ(x) \wedge RZ(y) \wedge (\forall z)(LI(z) \implies R(x, y, xz)),$$

$$N(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigwedge_{i=1}^4 RZ(x_i) \wedge \bigwedge_{i,j,k=1}^4 R(x_i, x_j, x_k).$$

Теорема 2. Для канонических отношений любого универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) унарное каноническое отношение C на полугруппе входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ определяется формулой $RZ(x)$;
- 2) каноническое отношение ε_1 на полугруппе входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ определяется формулой $E_1(x, y)$;
- 3) каноническое отношение ε_2 на полугруппе входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ определяется формулой $E_2(x, y)$;
- 4) каноническое отношение η на полугруппе входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ определяется формулой $N(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1 и 2 доказаны в [17, лемма 2.1, следствие 2.3]. Утверждение 3 доказано в [22, лемма 5]. Утверждение 4 следует из аксиом плоскости и результатов работы [22, лемма 5].

4. Основные результаты

Изложенные в разд. 3 результаты позволяют доказать, что класс **Atm** всех универсальных планарных автоматов элементарно определим в классе всех полугрупп **Sem**. Для этого рассмотрим формулы элементарной теории полугрупп, с помощью которых можно построить изоморфную копию любого автомата $\mathbf{A} \in \mathbf{Atm}$ в его полугруппе входных сигналов $\text{Inp}(\mathbf{A})$:

$$D_i(\bar{x}) = RZ(x_1) \wedge RZ(x_2) \wedge \neg E_i(x_1, x_2),$$

$$\text{Eq}_i(\bar{x}, \bar{y}) = D_i(\bar{x}) \wedge D_i(\bar{y}) \wedge N(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

$$\text{In}_i(x, \bar{x}) = RZ(x) \wedge D_i(\bar{x}) \wedge R(x, x_1, x_2),$$

где $i = 1, 2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$.

Теорема 3. Для произвольного универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ над плоскостями $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ и его полугруппы входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ выполняются следующие утверждения:

- 1) множества $\widetilde{RZ} = \{s \in S : S \models RZ(s)\}$, $\widetilde{D}_i = \{\bar{s} \in S^2 : S \models D_i(\bar{s})\}$ ($i = 1, 2$) непусты;
- 2) для каждого $i = 1, 2$ формула $E_i(x, y)$ определяет отношение эквивалентности $\widetilde{E}_i$ на множестве $\widetilde{RZ}$;
- 3) для каждого $i = 1, 2$ формула $\text{Eq}_i(\bar{x}, \bar{y})$ определяет отношение эквивалентности $\widetilde{\text{Eq}}_i$ на множестве $\widetilde{D}_i$;
- 4) для каждого $i = 1, 2$ формула $\text{In}_i(x, \bar{x})$ задает бинарное отношение $\widetilde{\text{In}}_i$ между элементами множества $\widetilde{RZ}$ и множества $\widetilde{D}_i$, которое согласовано с эквивалентностями $\widetilde{E}_i$, $\widetilde{\text{Eq}}_i$ по следующей формуле:

$$(x, \bar{x}) \in \widetilde{\text{In}}_i \wedge x \equiv y(\widetilde{E}_i) \wedge \bar{x} \equiv \bar{y}(\widetilde{\text{Eq}}_i) \implies (y, \bar{y}) \in \widetilde{\text{In}}_i;$$

- 5) автомат $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ изоморфен фактор-системе $\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta}$ пятисортной алгебраической Ω -системы

$$\widetilde{\mathbf{A}} = ((X'_1, \widetilde{D}_1, \widetilde{\text{In}}_1), (S, \cdot), (X'_2, \widetilde{D}_2, \widetilde{\text{In}}_2), f_1, f_2)$$

по конгруэнции $\widetilde{\theta} = (\widetilde{E}_1, \widetilde{\text{Eq}}_1, \Delta_S, \widetilde{E}_2, \widetilde{\text{Eq}}_2)$, где $X'_1 = X'_2 = \widetilde{RZ}$, $\cdot$ — операция умножения полугруппы S и операции $f_i : X'_1 \times S \rightarrow X'_i$ определяются по формулам $f_i(x, s) = x \cdot s \in X'_i$ ($i = 1, 2$);

- 6) для любого предложения Ψ языка УИП $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$ эффективно строится такое предложение $\bar{\Psi}$ языка УИП $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}$, что Ψ в том и только том случае истинно на универсальном планарном автомате $\mathbf{A}$, если $\bar{\Psi}$ истинно на его полугруппе входных сигналов $\text{Inp}(\mathbf{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим универсальный планарный автомат $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ над плоскостями $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ с полугруппой входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$.

Из теорем 1, 2 следует, что для такого автомата $\mathbf{A}$ выполняются равенства

$$\widetilde{RZ} = C, \quad \widetilde{E}_i = \varepsilon_i, \quad \widetilde{X}_i = \widetilde{RZ}/\widetilde{E}_i, \quad \widetilde{D}_i = C^2 \setminus \varepsilon_i,$$

$$\widetilde{\text{Eq}}_i = \eta_i, \quad \widetilde{L}_i = \widetilde{D}_i/\widetilde{\text{Eq}}_i, \quad \widetilde{\rho}_i = \widetilde{\text{In}}_i/\widetilde{\theta},$$

где $\widetilde{\text{In}}_i/\widetilde{\theta} = \{(\widetilde{E}_i(x), \widetilde{\text{Eq}}_i(\bar{x})) \in \widetilde{X}_i \times \widetilde{L}_i : (x, \bar{x}) \in \widetilde{\text{In}}_i\}$ и $i = 1, 2$.

Следовательно, выполняются утверждения 1–4 и для определенного в теореме 1 автомата $\bar{\mathbf{A}}$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} &= (\bar{\Pi}_1, (S, \cdot), \bar{\Pi}_2, \bar{\delta}, \bar{\lambda}) = ((\bar{X}_1, \bar{L}_1, \bar{\rho}_1), (S, \cdot), (\bar{X}_2, \bar{L}_2, \bar{\rho}_2), \bar{\delta}, \bar{\lambda}) \\ &= ((C/\varepsilon_1, D_1/\eta_1, \bar{\Pi}_1/\bar{\theta}), (S, \cdot), (C/\varepsilon_2, D_2/\eta_2, \bar{\Pi}_2/\bar{\theta}), \bar{\delta}, \bar{\lambda}) \\ &= ((\bar{RZ}/\bar{E}_1, \bar{D}_1/\bar{E}_{q_1}, \bar{\Pi}_1/\bar{\theta}), (S, \cdot), (\bar{RZ}/\bar{E}_2, \bar{D}_2/\bar{E}_{q_2}, \bar{\Pi}_2/\bar{\theta}), f_1/\bar{\theta}, f_2/\bar{\theta}) = \tilde{\mathbf{A}}/\bar{\theta},\end{aligned}$$

где $f_1/\bar{\theta}(\bar{E}_1(x), s) = \bar{E}_1(x \cdot s)$, $f_2/\bar{\theta}(\bar{E}_1(x), s) = \bar{E}_2(x \cdot s)$ для элементов $x \in C$, $s \in S$. В силу теоремы 1 получаем, что $\mathbf{A} \cong \tilde{\mathbf{A}}/\bar{\theta}$ и выполняется утверждение 5.

Доказательство утверждения 6 основывается на следующей эффективной синтаксической трансформации формул языка УИП $\mathbf{L}_\mathbf{A}$.

Для любого терма t языка $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ эффективно строится выражение $\bar{t}$ по следующему правилу:

- если $t = x^{(i)}$ — при $i = 1$ индивидуальная переменная первого сорта (обозначающая точку плоскости состояний автомата), при $i = 3$ индивидуальная переменная третьего сорта (обозначающая входной сигнал автомата) или при $i = 4$ индивидуальная переменная четвертого сорта (обозначающая точку плоскости выходных сигналов автомата), то $\bar{t} = x$ — индивидуальная переменная языка $\mathbf{L}_\mathbf{S}$;
- если $t = x^{(i)}$ — при $i = 2$ индивидуальная переменная второго сорта (обозначающая прямую плоскости состояний автомата) или при $i = 5$ индивидуальная переменная пятого сорта (обозначающая прямую плоскости выходных сигналов автомата), то $\bar{t} = (x, y)$ — упорядоченная пара индивидуальных переменных языка $\mathbf{L}_\mathbf{S}$;
- если $t = t_1^{(3)} \cdot t_2^{(3)}$ для термов $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}$ третьего сорта (обозначающих входные сигналы автомата), то $\bar{t}$ — терм $\bar{t}_1^{(3)} \cdot \bar{t}_2^{(3)}$ языка $\mathbf{L}_\mathbf{S}$;
- если $t = \delta(t^{(1)}, t^{(3)})$ для терма $t^{(1)}$ первого сорта (обозначающего точку плоскости состояний автомата) и терма $t^{(3)}$ третьего сорта (обозначающего входной сигнал автомата), то $\bar{t}$ — терм $\bar{t}^{(1)} \cdot \bar{t}^{(3)}$ языка $\mathbf{L}_\mathbf{S}$;
- если $t = \lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$ для терма $t^{(1)}$ первого сорта (обозначающего точку плоскости состояний автомата) и терма $t^{(3)}$ третьего сорта (обозначающего входной сигнал автомата), то $\bar{t}$ — терм $\bar{t}^{(1)} \cdot \bar{t}^{(3)}$ языка $\mathbf{L}_\mathbf{S}$.

Пусть Ψ — формула языка $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ с бинарными предикатными символами $\in_1, \in_2$ и тремя бинарными функциональными символами $\cdot, \delta, \lambda$. Для такой формулы Ψ эффективно построим формулу $\bar{\Psi}$ языка $\mathbf{L}_\mathbf{S}$ по следующему правилу:

- если Ψ — атомарная формула $t_1 = t_2$ для двух термов t_1, t_2 первого сорта (соответственно четвертого сорта), то $\bar{\Psi}$ — формула $E_1(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ (соответственно $E_2(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$);
- если Ψ — атомарная формула $t_1 = t_2$ для двух термов t_1, t_2 второго сорта (соответственно пятого сорта), то $\bar{\Psi}$ — формула $E_{q_1}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ (соответственно $E_{q_2}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$);
- если Ψ — атомарная формула $t_1 = t_2$ для двух термов t_1, t_2 третьего сорта, то $\bar{\Psi}$ — формула $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$;
- если Ψ — атомарная формула $t_1 \in_1 t_2$ (соответственно $t_1 \in_2 t_2$) для терма t_1 первого сорта и терма t_2 второго сорта (соответственно для терма t_1 четвертого сорта и терма t_2 пятого сорта), то $\bar{\Psi}$ — формула $\text{In}_1(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ (соответственно $\text{In}_2(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$);
- если Ψ — формула $\Psi_1 \star \Psi_2$ (где $\star$ — один из символов $\wedge, \vee, \implies, \iff$), то $\bar{\Psi}$ — формула $\bar{\Psi}_1 \star \bar{\Psi}_2$;

- если Ψ — формула $\neg\Phi$, то $\bar{\Psi}$ — формула $\neg\bar{\Phi}$;
- если Ψ — формула

$$(\exists x)\Phi(x) \text{ (соответственно } (\forall x)\Phi(x))$$

для индивидуальной переменной x первого или четвертого сорта, то $\bar{\Psi}$ — следующая формула языка $\mathbf{L_S}$:

$$(\exists x)(RZ(x) \wedge \bar{\Phi}(x)) \text{ (соответственно } (\forall x)(RZ(x) \implies \bar{\Phi}(x)));$$

- если Ψ — формула

$$(\exists x)\Phi(x) \text{ (соответственно } (\forall x)\Phi(x))$$

для индивидуальной переменной x второго или пятого сорта, то $\bar{\Psi}$ — следующая формула языка $\mathbf{L_S}$:

$$(\exists x_1, x_2)(RZ(x_1) \wedge RZ(x_2) \wedge \bar{\Phi}(\bar{x}))$$

$$\text{(соответственно } (\forall x_1, x_2)(RZ(x_1) \wedge RZ(x_2) \implies \bar{\Phi}(\bar{x})));$$

- если Ψ — формула

$$(\exists x)\Phi(x) \text{ (соответственно } (\forall x)\Phi(x))$$

для индивидуальной переменной x третьего сорта, то $\bar{\Psi}$ — следующая формула языка $\mathbf{L_S}$:

$$(\exists x)\bar{\Phi}(x) \text{ (соответственно } (\forall x)\bar{\Phi}(x)).$$

Для рассматриваемого автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ и его полугруппы входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ индукцией по числу связок и кванторов в формуле Ψ языка $\mathbf{L_A}$ легко обосновывается следующее свойство:

$$\tilde{\mathbf{A}}/\tilde{\theta} \models \Psi \iff S \models \bar{\Psi}.$$

С другой стороны, изоморфные алгебраические системы $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{A}}/\tilde{\theta}$ элементарно эквивалентны, т. е. для любой формулы Ψ языка $\mathbf{L_A}$ выполняется условие

$$\mathbf{A} \models \Psi \iff \tilde{\mathbf{A}}/\tilde{\theta} \models \Psi.$$

В результате для любой формулы Ψ языка $\mathbf{L_A}$ получаем следующее условие:

$$\mathbf{A} \models \Psi \iff \text{Inp}(\mathbf{A}) \models \bar{\Psi}.$$

Отсюда следует, что выполняется утверждение 6.

Множество всех предложений языка $\mathbf{L_A}$, истинных на планарном автомате $\mathbf{A}$, обозначается символом $\text{Th}(\mathbf{A})$ и называется *элементарной теорией автомата $\mathbf{A}$* . Планарные автоматы $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ называются *элементарно эквивалентными*, если их элементарные теории $\text{Th}(\mathbf{A}), \text{Th}(\mathbf{A}')$ совпадают, т. е. $\text{Th}(\mathbf{A}) = \text{Th}(\mathbf{A}')$. Это означает, что такие автоматы $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ не могут быть различимы с помощью свойств, выраженных формулами языка УИП $\mathbf{L_A}$.

Ясно, что из элементарной эквивалентности планарных автоматов $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ следует элементарная эквивалентность полугрупп входных сигналов этих автоматов. Обратное утверждение для универсальных планарных автоматов обосновывается с помощью приведенной выше элементарной определимости класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп.

Теорема 4. Для плоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \Pi'_1, \Pi'_2$ универсальные планарные автоматы $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ и $\text{Atm}(\Pi'_1, \Pi'_2)$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, если элементарно эквивалентны полугруппы входных сигналов этих автоматов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 существуют формулы языка УИП $\mathbf{L_S}$, с помощью которых для универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ на его полугруппе входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ строится изоморфная автомату $\mathbf{A}$ алгебраическая фактор-система $\tilde{\mathbf{A}}/\tilde{\theta}$. При этом для любого предложения Ψ языка УИП $\mathbf{L_A}$ эффективно строится такое предложение $\bar{\Psi}$ языка УИП $\mathbf{L_S}$, что Ψ в том и только том случае истинно на универсальном планарном автомате $\mathbf{A}$, если $\bar{\Psi}$ истинно на его полугруппе входных сигналов S , т. е. выполняется условие

$$\mathbf{A} \models \Psi \iff \tilde{\mathbf{A}}/\tilde{\theta} \models \Psi \iff S \models \bar{\Psi}.$$

С другой стороны, с помощью упомянутых выше формул для универсального планарного автомата $\mathbf{A}' = \text{Atm}(\Pi'_1, \Pi'_2)$ на его полугруппе входных сигналов $S' = \text{Inp}(\mathbf{A}')$ строится изоморфная автомату $\mathbf{A}'$ алгебраическая фактор-система $\tilde{\mathbf{A}}'/\tilde{\theta}'$. При этом для любого предложения Ψ языка УИП $\mathbf{L_A}$ эффективно строится такое предложение $\bar{\Psi}$ языка УИП $\mathbf{L_S}$, что Ψ в том и только том случае истинно на универсальном планарном автомате $\mathbf{A}'$, если $\bar{\Psi}$ истинно на его полугруппе входных сигналов S' , т. е. выполняется условие

$$\mathbf{A}' \models \Psi \iff \tilde{\mathbf{A}}'/\tilde{\theta}' \models \Psi \iff S' \models \bar{\Psi}.$$

Так как из элементарной эквивалентности полугрупп входных сигналов S, S' следует

$$S \models \bar{\Psi} \iff S' \models \bar{\Psi},$$

выполняется

$$\mathbf{A} \models \Psi \iff \mathbf{A}' \models \Psi,$$

т. е. автоматы $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ элементарно эквивалентны.

Пусть $\mathbf{Inp}$ — класс всех полугрупп входных сигналов универсальных планарных автоматов. Для класса планарных автоматов $\mathbf{K}$ символом $\text{Inp}(\mathbf{K})$ обозначается класс полугрупп вида $\text{Inp}(\mathbf{A})$, где $\mathbf{A} \in \mathbf{K}$. Класс планарных автоматов $\mathbf{K}$ называется (конечно) *Inp-аксиоматизируемым*, если класс полугрупп $\text{Inp}(\mathbf{K})$ относительно (конечно) аксиоматизируем в классе $\mathbf{Inp}$, т. е. выполняется равенство $\text{Inp}(\mathbf{K}) = \mathbf{Inp} \cap \mathbf{S}'$ для некоторого (конечно) аксиоматизируемого класса полугрупп $\mathbf{S}'$.

С помощью приведенной выше элементарной определимости класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп получаем следующий результат.

Теорема 5. Любой (конечно) аксиоматизируемый класс универсальных планарных автоматов (конечно) Inp-аксиоматизируем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 3 определено такое преобразование $\Psi \mapsto \bar{\Psi}$ формул Ψ языка УИП $\mathbf{L_A}$ в формулы $\bar{\Psi}$ языка УИП $\mathbf{L_S}$, что для любого универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ с полугруппой входных сигналов $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$ выполняется условие

$$\mathbf{A} \models \Psi \iff \text{Inp}(\mathbf{A}) \models \bar{\Psi}.$$

Следовательно, если некоторый класс универсальных планарных автоматов $\mathbf{K}$ аксиоматизируется множеством формул Σ , то в силу теоремы 3 класс его полугрупп входных сигналов $\text{Inp}(\mathbf{K})$ относительно аксиоматизируется в классе Inp множеством формул $\bar{\Sigma} = \{\bar{\Psi} : \Psi \in \Sigma\}$. Ясно, что для конечного множества аксиом Σ класса автоматов $\mathbf{K}$ множество формул $\bar{\Sigma}$ также будет конечным.

Например, с помощью трансформации соответствующих аксиом проективных и аффинных плоскостей легко показать, что классы универсальных планарных автоматов над проективными плоскостями и над аффинными плоскостями конечно Inp -аксиоматизируемы.

5. Заключение

Из [21] следует, что главным инструментом решения проблемы представимости универсальных планарных автоматов входными сигналами являются канонические отношения автоматов. В настоящей работе показано, что эти отношения определяются формулами логики первого порядка в полугруппах входных сигналов таких автоматов и доказана элементарная определимость класса универсальных планарных автоматов в классе полугрупп. Полученные результаты позволяют исследовать взаимосвязь между элементарными свойствами универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных сигналов, проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов планарных автоматов и элементарных теорий классов полугрупп таких, как проблема элементарной определимости универсальных планарных автоматов их полугруппами входных сигналов, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных планарных автоматов и др.

Благодарность. Автор признателен рецензенту этой статьи за его полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
2. Пинус А. Г. Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 44–47.
3. Пинус А. Г. Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унарных и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 730–748.
4. Пинус А. Г. Об элементарной эквивалентности решеток подалгебр и групп автоморфизмов свободных алгебр // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 865–869.
5. Важенин Ю. М. Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 3. С. 281–301.
6. Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. вузов. Математика. 1972. № 7. С. 3–11.
7. Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 5. С. 157–162.
8. Глускин Л. М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 841–870.
9. Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНТИ, 1983. С. 183–254. (Итоги науки и техники; Т. 21).
10. Важенин Ю. М., Пинус А. Г. Элементарная классификация и разрешимость теорий производных структур // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 3. С. 3–40.
11. Бунина Е. И., Михалев А. В. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых r -групп // Фунд. и прикл. математика. 2004. Т. 10, № 2. С. 135–224.
12. Мурзин Ф. А. Об элементарной эквивалентности колец непрерывных функций // Теория моделей и ее приложения. Алма-Ата: Казахский гос. университет, 1980. С. 72–74.

13. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
14. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.
15. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. P. 155–199.
16. Свердловская тетрадь: Сборник нерешенных проблем теории полугрупп. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979.
17. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. V. 82. P. 1–9.
18. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
19. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
20. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970.
21. Молчанов В. А. Представление универсальных планарных автоматов входными сигналами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 2 : 2. С. 31–37.
22. Молчанов В. А. Абстрактная характеристика полугрупп входных сигналов универсальных планарных автоматов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 1. С. 113–121.

Поступила в редакцию 5 марта 2019 г.

После доработки 8 апреля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Молчанов Владимир Александрович
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410012
v.molchanov@inbox.ru