A. I. Sozotov, Two observations on groups with engel elements, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1411–1413

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.617>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.91.87.62

April 26, 2023, 17:47:17

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О ГРУППАХ С ЭНГЕЛЕВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А. И. Созутов

Аннотация. Даны ответы (отрицательные) на вопросы 16.15а) и 17.3 из «Коуровской тетради»: «во всякой ли группе множество всех ограниченно энгелевых элементов является подгруппой?» и «верно ли, что группа бинарно нильпотентна, если в ней любое 4-элементное подмножество содержит два элемента, порождающие нильпотентную подгруппу?».

DOI 10.33048/smzh.2019.60.617

Ключевые слова: энгелевы группы, энгелевы и ограниченно энгелевы элементы.

Элемент a произвольной группы G называется *энгелевым*, если для любого элемента $b \in G$ существует такое зависящее от него натуральное число $n = n(b)$, что выполняется равенство $[\dots [[b, a], a], \dots, a] = [b, {}_n a] = 1$; если при этом число n можно выбрать одно и то же для всех $b \in G$, то элемент a называется *ограниченным энгелевым* или *n -энгелевым*. Группа, состоящая из энгелевых (n -энгелевых) элементов, называется *энгелевой* (*n -энгелевой*) [1, Д26]. Свойства энгелевых элементов и их расположение в группе изучались многими авторами. Составляют ли энгелевы элементы подгруппу (радикал [1, Д20]) — один из основных рассматриваемых вопросов. Исследования групп с энгелевыми элементами стимулируются также изучением групп с различными условиями конечности и групп с элементами малых порядков (см., например, [1, Д26] и комментарии к вопросам 9.50, 11.11 из «Коуровской тетради» [2]).

Группа G с энгелевым элементом a порядка 2 удовлетворяет условиям теоремы Бэра — Сузуки, поскольку подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ в G являются конечными 2-подгруппами. Действительно, $[b, a] \in \langle a, a^b \rangle$ и $[b, {}_n a] \in \langle a, a^b \rangle$ для всех n , и равенства $|a| = 2$ и $[b, {}_n a] = 1$ возможны только в случае, когда порядок группы диэдра $\langle a, a^b \rangle$ равен 2^m , где $m \leq n$. Поэтому в любой 2-группе инволюции являются энгелевыми элементами, а в группе периода 2^n — $(n+1)$ -энгелевыми. Для любого $n \geq 100$ существуют простые 2-группы периода 2^n (см. [2, архив, 4.74а]), порожденные $(n+1)$ -энгелевыми элементами.

С использованием конструкции n -периодического произведения для достаточно большого четного n [3] в [4] построены бесконечные простые непримарные группы ограниченного четного периода, в которых произведение любых двух инволюций есть 2-элемент. В этих группах каждая инволюция является конечным ограниченным энгелевым элементом. Группы из §3 работы [4] (контрпримеры к вопросу 11.11(а) А. В. Боровика из [2]) также дают отрицательный ответ на следующий вопрос В. В. Блудова 16.15а) из [2].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

16.15. Элемент g группы G называется *энгелевым*, если для каждого элемента $h \in G$ существует такое k , что $[h, g, \dots, g] = 1$, где g встречается k раз; если существует k , не зависящее от h , то g называется *ограниченно энгелевым*.

(а) (Б. И. Плоткин). Во всякой ли группе множество всех ограничено энгелевых элементов является подгруппой?

В качестве контрпримера G к вопросу вначале возьмем удобный для доказательства пример — подгруппу N из теоремы 3(2) в [4]. Согласно теореме группа $G = N$ порождена элементами порядка 3 и проста и каждая конечная подгруппа в G либо удовлетворяет тождеству $x^{2^{48}} = 1$, либо имеет порядок 3. Значит, инволюции в G являются ограниченно энгелевыми элементами и в силу простоты группа G ими порождена.

Пусть b — элемент порядка 3 из G и $a \in G \setminus \langle b \rangle$. Допустим, что $[a, {}_k b] = 1$, где k — минимальное с данным свойством число, и обозначим $g = [a, {}_{k-2} b]$. В силу свойств группы G имеем $[a, {}_{k-1} b] \in \langle b \rangle$, $[a, {}_{k-1} b] = g^{-1}b^{-1}gb = b^\alpha$, $\alpha = \pm 1$ и $g^{-1}b^{-1}g = b^{\alpha-1}$, т. е. $g \in N_G(\langle b \rangle)$. Но тогда $g \in \langle b \rangle$ в силу свойств группы G и, значит, $[a, {}_{k-1} b] = 1$ вопреки выбору числа k . Следовательно, элемент b не является энгелевым, и в группе G множество всех ограниченных энгелевых элементов не является подгруппой.

Контрпримерами к вопросу 16.15(а) также являются некоторые из n -периодических произведений $G = \prod_{l \in I}^n G_l$ теоремы 2 из [4], в которых $n = 2^m \geq 2^{48}$, $|I| \geq 2$, а множители G_l — нетривиальные периодические группы без инволюций. По [4, лемма 1] любая конечная подгруппа из G сопряжена с подгруппой из некоторого множителя G_l или в ней выполняется тождество $x^n = 1$. Если, например, один из множителей G_l является циклической p -группой $\langle b \rangle$, а другие множители G_l не содержат p -элементов, то в силу доказанного выше элемент b не энгелев в G .

Наконец, воспользуемся тем, что каждый из множителей n -периодического произведения $G = \prod_{l \in I}^n G_l$ канонически вложен в G [4, теорема Сонкина]. Если неединичный элемент $b \in G_l$ не является энгелевым в множителе G_l , то он не будет энгелевым и в G . Отрицательный ответ на вопрос 16.15(а), видимо, можно получить также в классе 2-групп, но автор не знает такого доказательства.

В 17-м издании «Коуровской тетради» [2] А. Абдоллахи поставил следующий вопрос.

17.3. Пусть G — группа, в которой любое 4-элементное подмножество содержит два элемента, порождающие нильпотентную подгруппу. Верно ли, что любая 2-порожденная подгруппа группы G нильпотентна?

Пусть x, y — произвольные элементы группы G , удовлетворяющей условиям вопроса, и допустим, что подгруппа $\langle x, y \rangle$ не нильпотентна. Тогда $y \neq x^{-1}yx$, и так как

$$\langle x, y \rangle = \langle x, yx \rangle = \langle y, yx \rangle = \langle x, x^{-1}yx \rangle = \langle yx, x^{-1}yx \rangle,$$

подмножество $\{x, y, yx, x^{-1}yx\}$ состоит из четырех различных элементов и в силу условий подгруппа $\langle y, x^{-1}yx \rangle$ нильпотентна. Из этого следует, что в G любые два сопряженных элемента порождают нильпотентную подгруппу и G — энгелева группа.

Далее, пусть при тех же предположениях, что и выше, $x^2 \neq 1$. Тогда

$$\langle x, y \rangle = \langle x, yx \rangle = \langle y, yx \rangle = \langle x, yx^2 \rangle = \langle yx, yx^2 \rangle,$$

элементы x, y, yx, yx^2 различны и подгруппа $\langle y, yx^2 \rangle = \langle y, x^2 \rangle$ нильпотентна. Отсюда следует, что каждый элемент конечного нечетного порядка с любым элементом (произвольного порядка) порождает в G нильпотентную подгруппу. В частности, для периодических групп без инволюций вопрос 17.3 имеет положительное решение.

Укажем конкретный контрпример к вопросу 17.3 в классе 2-групп. В [5, предложение 1] среди других примеров построены 2-порожденные бесконечномерные финитно-аппроксимируемые ассоциативные нильалгебры вида $A = \langle \langle x, y \mid f_1, f_2, \dots \rangle \rangle$ над полем Φ из двух элементов, в которых каждая подалгебра, порожденная тремя элементами из A^2 , нильпотентна. Пусть $G = \langle x, y \rangle$ — подгруппа присоединенной группы алгебры A и $H = G \cap A^2$. Тогда G — бесконечная финитно-аппроксимируемая 2-группа, H — нормальная в G подгруппа индекса 4 и фактор-группа G/H элементарная абелева.

Покажем, что группа G удовлетворяет условиям вопроса 17.3. В силу теорем Пуанкаре и Бернсайда о базисе [6, теорема 12.2.1] каждая максимальная подгруппа M в G , имеющая конечный индекс, нормальна в G и содержит подгруппу H . Поэтому в G точно три максимальные нормальные подгруппы индекса 2, это $X = \langle x, H \rangle$, $Y = \langle y, H \rangle$ и $Z = \langle xy, H \rangle$ (здесь через xy обозначено групповое произведение относительно операции присоединенного умножения). В силу свойств алгебры A^2 в подгруппе H любые три элемента порождают конечную 2-подгруппу. Если $f \in G \setminus H$ и $g \in H$, то $f^2 \in H$ и подгруппа $K = \langle f^2, g, f^{-1}gf \rangle$ конечна и нормальна в подгруппе $L = \langle f, g \rangle$. Поскольку $[L : K] = 2$, подгруппа $L = \langle f, g \rangle$ конечна. Отсюда следует, что подгруппы X , Y и Z бинарно конечны (2-нильпотентны). Учитывая равенство $G = X \cup Y \cup Z$, приходим к выводу, что любое 4-элементное подмножество из G содержит не менее двух общих элементов хотя бы с одной из подгрупп X, Y, Z . В силу доказанного выше эти два общих элемента порождают нильпотентную подгруппу. Таким образом, группа G удовлетворяет условиям вопроса 17.3 А. Абдоллахи и является к нему контрпримером.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
2. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 19-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.
3. Sonkin D. M. On groups of large exponents n and n -periodic products: PhD Thez, Vanderbilt Univ., Nashville, Tennessee, 2005, 83 pp. etd.library.vanderbilt.edu/available/etd-06032005-025224/.
4. Мазуров В. Д., Ольшанский А. Ю., Созутов А. И. О бесконечных группах конечного периода // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 243–251.
5. Созутов А. И. О примерах ассоциативных нильалгебр // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 3. С. 445–450.
6. Холл М. Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 7 декабря 2018 г.

После доработки 6 марта 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Созутов Анатолий Ильич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
sozutov.ai@mail.ru