M. Sh. Shabozov, M. R. Langarshoev, Best linear approximation methods for some classes of analytic functions on the unit disk, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 6, 1414–1423

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.618>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.6.47.48

April 26, 2023, 13:56:15

О НАИЛУЧШИХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев

Аннотация. В банаховых пространствах Харди и весовом пространстве Бергмана найдены точные значения бернштейнских, колмогоровских, гельфандовских и линейных n -поперечников классов аналитических в единичном круге функций, у которых усредненные с весом модули непрерывности r -х производных мажорируются заданной функцией, удовлетворяющей некоторым ограничениям.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.618

Ключевые слова: наилучшие линейные методы приближения, модуль непрерывности, весовое пространство Бергмана, мажоранта, n -поперечники, наилучший метод кодирования.

1. Пусть X — произвольное банахово пространство, S — единичный шар в X , $\Lambda_n \subset X$ — произвольное подпространство размерности n , $\Lambda^n \subset X$ — линейное подпространство коразмерности n , $\mathcal{L}(f, \Lambda_n)$ — линейный непрерывный оператор, переводящий X в Λ_n . Через $E(f, \Lambda_n)_X$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами $\varphi \in \Lambda_n$:

$$E(f, \Lambda_n)_X = \inf\{\|f - \varphi\|_X : \varphi \in \Lambda_n\},$$

а через

$$\mathcal{E}(f, \mathcal{L}(f, \Lambda_n))_X = \|f - \mathcal{L}(f, \Lambda_n)\|_X$$

— уклонение функции $f \in X$ от линейного непрерывного оператора $\mathcal{L}(f, \Lambda_n)$ в метрике пространства X . Для центрально-симметричного множества $\mathcal{M} \subset X$ полагаем

$$E(\mathcal{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{E(f, \Lambda_n)_X : f \in \mathcal{M}\},$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \Lambda_n)_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\mathcal{E}(f, \mathcal{L}(f, \Lambda_n))_X : f \in \mathcal{M}\}.$$

Величины

$$b_n(\mathcal{M}; X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : (\varepsilon S \cap \Lambda_{n+1}) \subset \mathcal{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset X\}, \quad (1)$$

$$d^n(\mathcal{M}; X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in \mathcal{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset X\}, \quad (2)$$

$$d_n(\mathcal{M}; X) = \inf\{E(\mathcal{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \in X\}, \quad (3)$$

$$\delta_n(\mathcal{M}; X) = \inf\{\inf\{\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \Lambda_n)_X : \mathcal{L} : X \rightarrow \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset X\} \quad (4)$$

соответственно называют *бернштейновским*, *гельфандовским*, *колмогоровским*, *линейным n -поперечниками*. Между указанными величинами выполняются соотношения [1, 2]

$$b_n(\mathcal{M}; X) \leq \frac{d_n(\mathcal{M}; X)}{d^n(\mathcal{M}; X)} \leq \delta_n(\mathcal{M}; X). \quad (5)$$

2. В пространствах Харди H_q , $q \geq 1$, и Бергмана $\mathcal{B}_{q,\gamma}$, $q \geq 1$, с весом $\gamma \geq 0$ вопросы вычисления точных значений различных n -поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций и построения наилучших линейных методов приближения рассматривались, например, в монографиях [1, 2] и работах [3–20]. Продолжим исследование в этом направлении и вычислим точные значения всех перечисленных выше n -поперечников классов аналитических в единичном круге функций $W_a^{(r)}X(\Phi, \mu)$, $r \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 1$ (X — пространство H_q либо весовое пространство Бергмана $\mathcal{B}_{q,\gamma}$), у которых усредненные с весом модули непрерывности r -х производных по аргументу мажорируются заданной функцией Φ , удовлетворяющей некоторым определенным естественным ограничениям.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, положительных и комплексных чисел соответственно, $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ — круг радиуса ρ ($0 < \rho \leq 1$), $U_1 = U$, $A(U_\rho)$ — множество аналитических в круге U_ρ функций.

Для произвольной $f \in A(U_\rho)$ положим

$$M_q(f; \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. При $q = \infty$ будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\bar{U}_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$. Символом H_q , $1 \leq q \leq \infty$, обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(f; \rho). \quad (6)$$

Известно, что норма (6) реализуется на угловых граничных значениях $f(t) := f(e^{it})$ функций $f \in H_q$. Символом $H_{q,\rho}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$, $H_{q,1} \equiv H_q$, обозначим пространство Харди функций $f \in A(U_\rho)$, для которых $\|f(z)\|_{q,\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \|f(\rho z)\|_q < \infty$. Для любого $r \in \mathbb{N}$ через $f_a^{(r)}(z)$ обозначим производную r -го порядка функции $f \in A(U)$ по аргументу комплексного переменного $z = \rho \exp(it)$. При этом

$$f_a^{(1)}(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial t} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z)zi \quad \text{и} \quad f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}_a^{(1)}, \quad r \geq 2.$$

Под $H_{q,a}^{(r)}$ будем понимать класс функций $f \in A(U)$, у которых $f_a^{(r)} \in H_q$, $q \geq 1$.

Через $l_q \stackrel{\text{def}}{=} l_q(U)$, $1 \leq q < \infty$, обозначим банахово пространство комплекснозначных в круге U функций f , имеющих конечную норму

$$\|f\|_{l_q} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^q dx dy \right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^q d\rho dt \right)^{1/q},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(|z|) \geq 0$ — некоторая измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U . Через $l_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} l_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$, обозначим множество комплекснозначных функций f , для которых $\gamma^{1/q} f \in l_q(U)$, $\|f\|_{l_{q,\gamma}} = \|\gamma^{1/q} f\|_{l_q}$. Под $\mathcal{B}_{q,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_q(U, \gamma)$, $1 \leq q < \infty$, понимаем банахово пространство функций $f \in A(U)$ таких, что $f \in l_{q,\gamma}$. При этом

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{q,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_q^q(f, \rho) d\rho \right)^{1/q}.$$

В частном случае, когда $\gamma \equiv 1$, пространство $\mathcal{B}_q := \mathcal{B}_{q,1}$ является обычным пространством Бергмана. Символом $\mathcal{B}_{q,\gamma,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq 1$, $\mathcal{B}_{q,\gamma,1} \equiv \mathcal{B}_{q,\gamma}$) обозначим пространство функций $f \in A(U_\rho)$, для которых

$$\|f(z)\|_{\mathcal{B}_{q,\gamma,\rho}} \stackrel{\text{def}}{=} \|f(\rho z)\|_{\mathcal{B}_{q,\gamma}} < \infty,$$

а под $\mathcal{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$ будем понимать класс функций $f \in A(U)$, у которых $f_a^{(r)} \in \mathcal{B}_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$. В [16] доказано, что по сравнению с $\mathcal{B}_q$ пространство $\mathcal{B}_{q,\gamma}$ позволяет изучать функции $f \in A(U)$ с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи граничной окружности $\Gamma := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$. Очевидно, что $H_q \subset \mathcal{B}_q \subset \mathcal{B}_{q,\gamma}$, $1 \leq q < \infty$. Под $X := X(U)$ будем понимать любое из вышеприведенных банаховых пространств H_q , $\mathcal{B}_{q,\gamma}$, а $X_\rho := X_\rho(U)$ означает $H_{q,\rho}$ или $\mathcal{B}_{q,\gamma,\rho}$. Аналогичным образом под $X_a^{(r)} := X_a^{(r)}(U)$ будем понимать $H_{q,a}^{(r)}$ либо $\mathcal{B}_{q,\gamma,a}^{(r)}$, а под $X_{\rho,a}^{(r)} — H_{q,\rho,a}^{(r)}$ либо $\mathcal{B}_{q,\gamma,\rho,a}^{(r)}$.

Для произвольной функции $f \in X(U)$ запишем модуль непрерывности

$$\omega(f; 2t)_X = \sup\{\|f(ze^{ih}) - f(ze^{-ih})\|_X : |h| \leq t\}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество комплексных алгебраических полиномов

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{C})$$

степени n , а равенством

$$E_n(f)_X = E(f, \mathcal{P}_n)_X \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\|f - p_n\|_X : p_n \in \mathcal{P}_n\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in X(U)$ элементами $\mathcal{P}_n$.

Пусть $\Phi(u)$ — положительная неубывающая функция, определенная для $u \geq 0$ и удовлетворяющая условию $\lim_{u \rightarrow 0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$. Используя функцию Φ в качестве мажоранты, для произвольных $\mu \geq 1$ и любых $r \in \mathbb{N}$ введем в рассмотрение класс функций

$$W_a^{(r)} X(\Phi, \mu) = \left\{ f \in X_a^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega(f_a^{(r)}; 2t)_X \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leq \Phi(h), h \in (0, \pi] \right\}.$$

В [18, 19] соответственно при $X = H_q$ и $X = \mathcal{B}_{q,\gamma}$ доказано, что если при заданном $\mu \geq 1$ и любых $h \in (0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, мажоранта Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2\mu n))} \geq \frac{\pi}{2\mu} \int_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right] dt, \quad (7)$$

где

$$(\sin u)_* = \begin{cases} \sin u, & \text{если } 0 < u \leq \pi/2, \\ 1, & \text{если } u > \pi/2, \end{cases}$$

то при любых $n, r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} b_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu); X(U)) &= d_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu); X(U)) \\ &= E_{n-1}(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu))_{X(U)} = \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

При этом условие (7) выполняется, например, для мажоранты $\Phi_*(h) = h^\alpha$, где

$$\alpha := \alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2 \int_0^1 t \cos\left(\frac{\pi t}{2\mu}\right) \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right] dt. \quad (9)$$

Из равенства (9) вытекает, что $\alpha(1) = (\pi/2) - 1$, $\lim\{\alpha(\mu) : \mu \rightarrow \infty\} = 1$ и при всех значениях $\mu \in [1, \infty)$ имеет место неравенство $(\pi/2) - 1 \leq \alpha(\mu) \leq 1$.

Так как $X \subset X_\rho$ ($0 < \rho \leq 1$), представляет несомненный интерес распространить равенство (8) с перечисленных выше n -поперечников (1)–(4) на более общее пространство X_ρ ($0 < \rho \leq 1$):

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu) : X_\rho(U)) &= E_{n-1}(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu))_{X_\rho(U)} \\ &= \mathcal{E}(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu), \mathcal{L}_{\rho, r-1}, \mathcal{P}_{n-1})_{X_\rho(U)} = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, либо $\delta_n(\cdot)$.

В самом деле, для всех n -поперечников равенство (10) в случае, когда X есть $\mathcal{B}_{q, \gamma}$, следует из результата теорем 2.1 и 3.1 в [18], а в случае $X = H_q$, оно выводится практически аналогичным образом. При этом наилучший линейный метод, реализующий точное значение линейного n -поперечника, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n; z) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{k, \rho, r-1} c_k(f) z^k, \quad (11)$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Тейлора функции f ,

$$\begin{aligned} \mu_{k, \rho, r-1} &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \rho^{2(n-k)} \left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1} \left\{1 - \gamma_{k, n} \left(1 - \frac{k^2}{(2n-k)^2}\right)\right\}, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ \gamma_{k, n} &\stackrel{\text{def}}{=} n\mu \int_0^{\pi/(2n)} \cos kx \cos nx \, dx, \quad k = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Следуя [13], символом $\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}$ обозначим n -мерное подпространство, порожденное базисом

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_k(z) &= \left\{1 - \left(\frac{k}{2n-1}\right)^{r-1} \left[1 - \gamma_{k, n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-1}\right)^2\right)\right] |z|^{2(n-k)}\right\} z^k, \\ k &= 0, 1, \dots, n-1, \quad r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Для произвольной функции $f \in X(U)$ полагаем

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{r-1}(f, \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) \tilde{\varphi}_k(z).$$

В принятых обозначениях справедлива

Теорема 1. Для любых $\mu \geq 1$, $r, n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu); l_{q, \gamma}) &= \bar{\lambda}_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu); \mathcal{B}_{q, \gamma}) \\ &= \mathcal{E}(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu), \widetilde{\mathcal{L}}_{r-1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1})_{\mathcal{B}_{q, \gamma}} \\ &= \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, а $\bar{\lambda}_n(\cdot)$ — один из n -поперечников $d^n(\cdot)$ либо $b_n(\cdot)$.

Доказательство. В самом деле, повторяя буквально схему рассуждений доказательства теоремы 2 в [13], убедимся, что для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q(\Phi; \mu)$ имеет место неравенство

$$M_q(f - \widetilde{\mathcal{L}}_{r-1}(f, \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}); \rho) \leq \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \quad (13)$$

Возведя обе части неравенства (13) в степень q ($1 \leq q \leq \infty$), затем умножая на $\rho \gamma(\rho)$ и интегрируя по ρ в пределах от 0 до 1, с учетом определения пространства $\mathcal{B}_{q, \gamma}$ запишем

$$\mathcal{E}(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu), \widetilde{\mathcal{L}}_{r-1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{n-1})_{\mathcal{B}_{q, \gamma}} \leq \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}. \quad (14)$$

Отсюда, учитывая определение линейного n -поперечника, получаем

$$\delta_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu); \mathcal{B}_{q, \gamma}) \leq \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}. \quad (15)$$

Так как пространство $\mathcal{B}_{q, \gamma}$ изоморфно и изометрично вложено в пространство $l_{q, \gamma}$, на основании определений и свойств бернштейновского и гильфандовского n -поперечников [2, гл. II, § 3, предложение 3.2] получаем равенства

$$\begin{aligned} d^n(W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu); \mathcal{B}_{q, \gamma}) &= d^n(W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu); l_{q, \gamma}), \\ b_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu); \mathcal{B}_{q, \gamma}) &= b_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu); l_{q, \gamma}). \end{aligned} \quad (16)$$

Из неравенств (5), (15) и равенств (16) получаем оценки сверху всех рассматриваемых n -поперечников. Для получения оценок снизу указанных n -поперечников введем рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{\mathcal{B}_{q, \gamma}} \leq \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q} \right\}$$

и докажем включение $\widetilde{\mathcal{S}}_{n+1} \subset W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu)$. Отметим, что для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\omega((p_n)_a^{(r)}; 2t)_X \leq 2n^r (\sin nt)_* \|p_n\|_X, \quad (17)$$

доказательство которого при $X = H_q$ имеется в [4], а при $X = \mathcal{B}_{q,\gamma}$ — в [18]. В [16] доказано, что для любого полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при всех $1 \leq q \leq \infty$ и любых $r, n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{H_q} \leq n^r \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \|p_n\|_{\mathcal{B}_{q,\gamma}}. \quad (18)$$

Из неравенства (17), учитывая (18), получаем

$$\omega((p_n)_a^{(r)}; 2t)_{H_q} \leq 2n^r (\sin nt)_* \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \|p_n\|_{\mathcal{B}_{q,\gamma}}. \quad (19)$$

Используя неравенство (19) для произвольной $p_n \in \tilde{S}_{n+1}$, с учетом ограничения (7) будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^h \omega((p_n)_a^{(r)}; 2t)_{H_q} \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \\ & \leq 2n^r \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \|p_n\|_{\mathcal{B}_{q,\gamma}} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h (\sin nt)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \\ & \leq \frac{\pi}{2\mu} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \int_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right] dt \leq \Phi(h), \end{aligned}$$

откуда сразу следует включение $\tilde{S}_{n+1} \subset W_a^{(r)} H_q(\Phi; \mu)$. Из доказанного включения и определения бернштейновского n -поперечника получаем оценку снизу:

$$\begin{aligned} b_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \mu); \mathcal{B}_{q,\gamma}) & \geq b_n(\tilde{S}_{n+1}; \mathcal{B}_{q,\gamma}) \\ & \geq \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (20)$$

Требуемые равенства (12) следуют из сопоставления неравенств (15), равенств (16) и неравенств (20). Теорема 1 доказана.

В экстремальных задачах теории аппроксимации аналитических в круге функций определенный интерес представляет вычисление точных верхних границ модулей коэффициентов Тейлора (см., например, [13, 16]) на различных классах аналитических функций. Приведем решение указанной задачи для рассматриваемых нами классов функций.

Теорема 2. Пусть $L_n(\mathcal{M}) := \sup\{|c_n(f)| : f \in \mathcal{M}\}$. Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $q \in [1, \infty]$ справедливы равенства

$$L_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \mu)) = \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right), \quad (21)$$

$$L_n(W_a^{(r)} \mathcal{B}_{q,\gamma}(\Phi; \mu)) = \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, для произвольной функции $f \in A(U)$ коэффициент Тейлора $c_n(f)$ представим в виде

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} f(\zeta) \zeta^{-n-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} [f(\rho e^{it}) - \mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho e^{it})] e^{-int} dt, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho e^{it})$ — линейный оператор, определенный равенством (11). Из (21) на основании неравенства Гёльдера и равенств (10) для произвольной функции $f \in W_a^{(r)} H_q(\Phi; \mu)$ имеем

$$|c_n(f)| \leq \rho^{-n} \mathcal{E}(f; \mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n))_{H_{q, \rho}} \leq \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right),$$

откуда сразу вытекает оценка сверху:

$$L_n(W_a^{(r)} H_q(\Phi; \mu)) \leq \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).$$

С другой стороны, для любых $\rho, R \in (0, 1)$, записав коэффициент $c_n(f)$ в виде

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi(\rho R)^n} \int_0^{2\pi} [f(\rho R e^{i\tau}) - \mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho R e^{i\tau})] e^{-in\tau} d\tau,$$

в силу неравенства Гёльдера запишем

$$R^n |c_n(f)| \leq \rho^{-n} M_q(f - \mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n); \rho R),$$

откуда с учетом определения нормы в пространствах $X(U)$ для произвольной функции $f \in W_a^{(r)} X(\Phi; \mu)$ имеем

$$|c_n(f)| \leq \rho^{-n} \mathcal{E}(f; \mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n); X_\rho) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q}.$$

Из этого неравенства и соотношений (10) получаем оценки сверху:

$$\begin{aligned} L_n(W_a^{(r)} X(\Phi; \mu)) &\leq \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \begin{cases} 1, & \text{если } X(U) = H_q, \\ \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1}, & \text{если } X(U) = \mathcal{B}_{q, \gamma}. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \frac{1}{(in)^r} \cdot \frac{\pi}{4\mu} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \frac{z^n}{\|z^n\|_X} \in W_a^{(r)} X(\Phi; \mu).$$

Для этой функции согласно определению величины $L_n(\cdot)$ записываем оценки снизу:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(W_a^{(r)} X(\Phi; \mu)) &\geq |c_n(f_0)| \\ &= \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \begin{cases} 1, & \text{если } X(U) = H_q, \\ \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1}, & \text{если } X(U) = \mathcal{B}_{q, \gamma}. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Равенства (21) и (22) получаем из сравнения оценок сверху (24) и снизу (25). Теорема 2 доказана.

3. В пп. 1, 2 вычислены точные значения различных поперечников указанных классов аналитических в единичном круге функций. С поперечниками рассматриваемых классов функций можно связать задачи оптимального восстановления и кодирования функций в интерпретации Н. П. Корнейчука [21, гл. 8, § 8.3; 22].

Приведем необходимые понятия и определения. Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор $M_n := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ определенных на X функционалов μ_k , $k = \overline{1, n}$. Множество M_n можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий функции $f \in X$ вектору $T(f, M_n) = \{\mu_1(f), \dots, \mu_n(f)\}$. Задачу восстановления функции f по информации T решают, сопоставляя вектору $T(f, M_n)$ функцию

$$A(f, M_n; G_n, \Gamma_n : z) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mu_k(f) g_k(z),$$

где $G_n = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ и $\Gamma_n = \{\gamma_k\}_{k=1}^n \in \text{Im}$ соответственно произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов, позволяющий наилучшим образом воспроизводить элементы класса $\mathcal{M} \subset X$, $\text{Im} = \{\Gamma_n\}$ — вектор числовых коэффициентов. Погрешность восстановления на классе $\mathcal{M}$ считают равной

$$\mathcal{R}_n(\mathcal{M}; M_n, G_n) = \inf\{\sup\{\|f - A(f; M_n, G_n, \Gamma_n)\|_{B_{q,\gamma}} : f \in \mathcal{M}\} : \Gamma_n \subset C^n\} \quad (26)$$

и полагают $\mathcal{R}_n(\mathcal{M}, X) = \inf\{\mathcal{R}_n(\mathcal{M}; M_n, G_n) : M_n, G_n\}$.

Пусть M'_n — набор заданных на X линейных ограниченных функционалов. Тогда рассматривают следующую характеристику:

$$\mathcal{R}'_n(\mathcal{M}, X) = \inf\{\mathcal{R}_n(\mathcal{M}; M'_n, G_n) : M'_n, G_n\}.$$

Метод восстановления $(\overset{\circ}{M}_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n) \{\overset{\circ}{M}'_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n\}$, для которого

$$\mathcal{R}_n(\mathcal{M}, X) = \sup\{\|f - A(f, \overset{\circ}{M}_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n)\|_X : f \in \mathcal{M}\},$$

$$\{\mathcal{R}'_n(\mathcal{M}, X) = \sup\{\|f - A(f, \overset{\circ}{M}'_n, \overset{\circ}{G}_n, \overset{\circ}{\Gamma}_n)\|_X : f \in \mathcal{M}\}\},$$

называют *оптимальным (оптимальным линейным) методом восстановления* функций из класса $\mathcal{M}$. Справедливы соотношения [21]

$$\mathcal{R}'_n(\mathcal{M}, X) = \lambda_n(\mathcal{M}, X), \quad \mathcal{R}_n(\mathcal{M}, X) \geq d_n(\mathcal{M}, X), \quad (27)$$

причем если $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}} \otimes L$, где $\widetilde{\mathcal{M}}$ — компакт, а L — конечномерное подпространство, то в (27) везде имеет место равенство.

Наряду с (26) рассматривают также величину

$$\mathcal{K}(\mathcal{M}, M_n) = \sup\{\|f_1 - f_2\|_X : f_1, f_2 \in \mathcal{M}, T(f_1, M_n) = T(f_2, M_n)\},$$

которую можно интерпретировать как погрешность метода кодирования на классе $\mathcal{M}$ с помощью фиксированного набора функционалов M_n .

Полагая

$$\nu^n(\mathcal{M}, X) = \inf\{\mathcal{K}(\mathcal{M}, M_n) : M_n\},$$

где нижняя грань берется по всем наборам M_n линейных функционалов, определенных на сопряженном пространстве X^* , получаем

$$\nu^n(\mathcal{M}, X) \leq 2\mathcal{R}'_n(\mathcal{M}, X),$$

а если $\mathcal{M}$ — центрально-симметричное выпуклое множество, то

$$\nu^n(\mathcal{M}, X) = 2d^n(\mathcal{M}, X).$$

Теорема 3. При выполнении условия (7) наилучший метод кодирования функций из класса $W_a^{(r)}X(\Phi; \mu)$ в банаховом пространстве $X_\rho(U)$ доставляет набор $\overset{\circ}{M}_n$ линейных функционалов

$$\overset{\circ}{\mu}_k(f) = c_k(f), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (28)$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\overset{\circ}{M}'_n, \overset{\circ}{G}'_n, \overset{\circ}{\Gamma}'_n$ функций $f(z)$ класса $W_a^{(r)}X(\Phi; \mu)$ в пространстве $X_\rho(U)$ является определенный равенством (11) линейный метод $\mathcal{L}_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_{n-1}; z)$. При этом для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \nu^n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu), X_\rho(U)) &= \mathcal{R}_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu), X_\rho(U)) \\ &= \mathcal{R}'_n(W_a^{(r)}X(\Phi; \mu), X_\rho(U)) = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned}$$

Теорема 4. При выполнении условия (7) оптимальным линейным методом восстановления элементов $f(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu)$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}_{q, \gamma}$ является определенный в п. 2 линейный метод $\tilde{V}_{r-1}(f, \tilde{\mathcal{P}}_n, z)$, а наилучшим методом кодирования — набор функционалов (28). При этом для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^n(W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu), \mathcal{L}_{q, \gamma}) &= \mathcal{R}_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu), \mathcal{L}_{q, \gamma}) \\ &= \mathcal{R}'_n(W_a^{(r)}H_q(\Phi; \mu), \mathcal{L}_{q, \gamma}) = \frac{\pi}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho\right)^{-1/q}. \end{aligned}$$

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
2. Pinkus A. *n*-Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verl., 1985.
3. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.
4. Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–294.
5. Айнуллоев Н., Тайков Л. В. Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.
6. Двейрин М. З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1975. Т. 6. С. 41–54.
7. Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 5. С. 197–198.
8. Farkov Yu. A. *n*-Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // J. Complexity. 1996. V. 2, N 1. P. 58–79.
9. Fisher S. D., Stessin M. I. The *n*-widths of the unit ball of H^q // J. Approx. Theory. 1991. V. 67, N 3. P. 347–356.
10. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.
11. Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186–193.
12. Вакарчук С. Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 665–669.

13. Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155–1171.
14. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближения функций классов L . В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329.
15. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН Респ. Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2009. Т. 136, № 3. С. 7–23.
16. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.
17. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Докл. АН. 2013. Т. 450, № 5. С. 518–521.
18. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Значения n -поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. № 3. С. 40–57.
19. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники некоторых классов функций в пространстве Харди // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2014. Т. 57, № 2. С. 97–102.
20. Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах приближения и точных значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67, № 10. С. 1366–1379.
21. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
22. Корнейчук Н. П. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 2. С. 266–290.

Поступила в редакцию 9 января 2017 г.

После доработки 31 мая 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Шабозов Мирганд Шабозович
Университет Центральной Азии,
ул. Дружбы народов, 47А, Душанбе 734013, Таджикистан;
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17, Душанбе 734025, Таджикистан
shabozov@mail.ru

Лангаршоев Мухтор Рамазонович
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17, Душанбе 734025, Таджикистан
mukhtor77@mail.ru