V. V. Przyjalkowski, C. A. Shramov, Fano weighted complete intersections of large codimension, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 2, 377–384

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.212>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.197.8

April 26, 2023, 07:55:32

ВЗВЕШЕННЫЕ ПОЛНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ФАНО БОЛЬШОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов

Аннотация. Дана классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано большой коразмерности.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.212

Ключевые слова: взвешенное полное пересечение, индекс Фано, коразмерность.

§ 1. Введение

Рассмотрим гладкое многообразие Фано X над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{C}$ нулевой характеристики. Обозначим символом i_X индекс Фано многообразия X , т. е. наибольшее целое положительное число, на которое канонический класс K_X делится в группе Пикара многообразия X . Известно, что $i_X \leq \dim X + 1$ (см. [1, следствие 3.1.15]). Цель настоящей работы — доказать следующую теорему (все необходимые определения могут быть найдены в [2, 3] или в § 2 ниже).

Теорема 1.1. *Рассмотрим гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ размерности $n \geq 2$ и коразмерности $k = N - n$, которое не является пересечением с линейным конусом. Выполнены следующие утверждения.*

- (i) *Имеет место неравенство $k \leq n - i_X + 1$.*
- (ii) *Если $k = n - i_X + 1$, то X является полным пересечением $n - i_X + 1$ квадрик в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$.*
- (iii) *Предположим, что $k = n - i_X \geq 2$ (в частности, $n \geq 3$). Тогда X является полным пересечением $n - i_X - 1$ квадрик и кубики в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$.*

Отметим, что предположение теоремы 1.1 о том, что X хорошо сформировано, а также предположение о том, что X не является пересечением с линейным конусом, может быть опущено, если $n \geq 3$ и X достаточно общее (см. предложение 2.9 ниже).

§ 2. Предварительные сведения

Рассмотрим набор $a_0, \dots, a_N$ положительных целых чисел. Он задает градуировку на алгебре многочленов $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$, при которой переменная x_i имеет вес a_i . Положим

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N) = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N].$$

Работа В. В. Пржиялковского поддержана грантом МД-30.2020.1. Работа К. А. Шрамова поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Оба автора являются обладателями премии «Молодая математика России» и благодарны ее спонсорам и жюри.

Взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}$ называется *хорошо сформированным*, если наибольший общий делитель любых N весов a_i равен 1. Всякое взвешенное проективное пространство изоморфно хорошо сформированному взвешенному проективному пространству (см. [2, 1.3.1]). Подмногообразие $X \subset \mathbb{P}$ называется *хорошо сформированным*, если $\mathbb{P}$ хорошо сформировано и

$$\operatorname{codim}_X(X \cap \operatorname{Sing} \mathbb{P}) \geq 2,$$

где размерность пустого множества считается равной -1 .

Будем говорить, что подмногообразие $X \subset \mathbb{P}$ коразмерности k является *взвешенным полным пересечением мультистепени* $(d_1, \dots, d_k)$, если его взвешенный однородный идеал в $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$ порожден регулярной последовательностью из k однородных элементов степеней $d_1, \dots, d_k$. Отметим, что само взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}$ можно считать взвешенным полным пересечением коразмерности 0 в самом себе.

Теорема 2.1 (см. [4, предложение 8]). Пусть $X \subset \mathbb{P}$ — хорошо сформированное взвешенное полное пересечение. Тогда

$$\operatorname{Sing} X = X \cap \operatorname{Sing} \mathbb{P}.$$

Следующее свойство является аналогом гладкости для подмногообразий во взвешенном проективном пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [4, определение 6.3]. Рассмотрим естественную проекцию $p: \mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}$. Подмногообразие $X \subset \mathbb{P}$ называется *квазигладким*, если прообраз $p^{-1}(X)$ является гладким многообразием.

Лемма 2.3. Пусть $X \subset \mathbb{P}$ — взвешенное полное пересечение. Тогда X изоморфно взвешенному полному пересечению X' той же коразмерности в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}'$. Более того, если X квазигладко, то X' также квазигладко, а если X является общим взвешенным полным пересечением соответствующей мультистепени в $\mathbb{P}$, то X' также является общим взвешенным полным пересечением соответствующей мультистепени в $\mathbb{P}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что наибольший общий делитель весов $a_0, \dots, a_N$ равен 1. Предположим, что взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}$ не является хорошо сформированным. Это значит, что с точностью до перенумерации $a_i = aa'_i$, где $a'_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ при $i = 1, \dots, N$ и $a \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Полагая $a'_0 = a_0$, получаем изоморфизм $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}' = \mathbb{P}(a'_0, \dots, a'_N)$, заданный отображением Веронезе степени a (см., например, [3, лемма 5.7]). Образ X при этом изоморфизме — взвешенное полное пересечение $X' \subset \mathbb{P}'$. Действительно, по соображениям однородности a делит все степени, в которых переменная x_0 входит в уравнения, определяющие X . Таким образом, уравнения, определяющие X' , получаются из определяющих уравнений для X заменой x_0^a на x'_0 и заменой x_i на x'_i при $i = 1, \dots, N$, где x_i и x'_i — взвешенные однородные координаты на $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}'$ весов a_i и a'_i соответственно. Повторяя эту процедуру достаточное количество раз, можно считать, что $\mathbb{P}'$ хорошо сформировано.

Аффинный конус над X' является фактором аффинного конуса над X по группе, порожденной квазиотражениями. Таким образом, многообразие X' квазигладко если и только если многообразие X квазигладко. Утверждение про общность X' очевидно. $\square$

Хотя условие квазигладкости является очень естественным для подмногообразий во взвешенных проективных пространствах, мы все же в большей степени интересуемся гладкими многообразиями в обычном понимании.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4 [5, следствие 2.14]. Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение. Тогда X квазигладко.

Следующее утверждение дает необходимое условие гладкости для взвешенных полных пересечений.

Лемма 2.5 [5, лемма 2.5]. Пусть $X \subset \mathbb{P}$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$. Тогда для каждого r и для каждого выбора r весов $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$, $i_1 < \dots < i_r$, наибольший общий делитель δ которых больше 1, найдется r степеней $d_{s_1}, \dots, d_{s_r}$, $s_1 < \dots < s_r$, наибольший общий делитель которых делится на δ .

Следующее определение описывает взвешенные полные пересечения, которые в некотором смысле аналогичны полным пересечениям в обычном проективном пространстве, содержащемся в гиперплоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6 (ср. [3, определение 6.5]). Взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}$ называют *пересечением с линейным конусом*, если при некоторых i и j выполнено равенство $d_j = a_i$.

Теорема 2.7 (ср. [3, определение 6.5]). Пусть $X \subset \mathbb{P}$ — квазигладкое взвешенное полное пересечение размерности не меньше трех. Предположим, что $\mathbb{P}$ хорошо сформировано, X не является пересечением с линейным конусом и X является общим в семействе взвешенных полных пересечений соответствующей мультистепени в $\mathbb{P}$. Тогда X хорошо сформировано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Теорема 2.7 не выполняется в размерности меньше трех. В качестве контрпримера можно взять гиперповерхность степени 9 в $\mathbb{P}(1, 2, 2, 3)$, которая гладкая и квазигладкая, но при этом не является хорошо сформированной (см. [3, 6.15(ii)]).

Следующий результат показывает, что достаточно общее квазигладкое взвешенное полное пересечение изоморфно взвешенному полному пересечению с хорошими свойствами.

Предложение 2.9. Пусть $X \subset \mathbb{P}$ — квазигладкое взвешенное полное пересечение размерности не меньше трех. Предположим, что X является общим в семействе взвешенных полных пересечений соответствующей мультистепени в $\mathbb{P}$. Тогда существует квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение X' , изоморфное X , которое не является пересечением с линейным конусом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X является пересечением с линейным конусом. Пусть $(d_1, \dots, d_k)$ — мультистепень взвешенного полного пересечения X . Можно считать, что $d_k = a_N$. Обозначим через x_i , $i = 0, \dots, N$, взвешенную однородную координату веса a_i на $\mathbb{P}$. Так как X является общим в семействе взвешенных полных пересечений соответствующей мультистепени в $\mathbb{P}$, во взвешенном однородном идеале, задающем X , найдется однородный многочлен степени d_k , имеющий вид $f_k = f - x_N$, где многочлен f зависит только от переменных $x_0, \dots, x_{N-1}$. Подставляя f вместо x_N в остальные многочлены $f_1, \dots, f_{k-1}$, порождающие идеал взвешенного полного пересечения X , можно

считать, что эти многочлены не зависят от x_N . Таким образом, естественная проекция

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a_0, \dots, a_{N-1}, a_N) &\dashrightarrow \mathbb{P}' = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_{N-1}), \\ (x_0 : \dots : x_{N-1} : x_N) &\mapsto (x_0 : \dots : x_{N-1}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

задает изоморфизм X со взвешенным полным пересечением X' мультистепени $(d_1, \dots, d_{k-1})$ в $\mathbb{P}'$. Квазигладкость X означает, что якобиева матрица многочленов, порождающих идеал X , невырождена. Так как переменная x_N входит только в многочлен f_k и только в первой степени, квазигладкость взвешенного полного пересечения X влечет квазигладкость взвешенного полного пересечения X' . По предположению общности для X заключаем, что X' — общее взвешенное полное пересечение мультистепени $(d_1, \dots, d_{k-1})$ в $\mathbb{P}'$.

Повторяя эту процедуру достаточно много раз, можно считать, что X' не является пересечением с линейным конусом. Ввиду леммы 2.3 можно также предполагать, что X' является квазигладким взвешенным полным пересечением в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве; при этом в результате применения леммы 2.3 оно может снова оказаться пересечением с линейным конусом. Делая поочередно эти шаги, рано или поздно придем к квазигладкому взвешенному полному пересечению X' в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве, которое не является пересечением с линейным конусом, поскольку проекция (1) уменьшает размерность объемлющего взвешенного проективного пространства, а применение леммы 2.3 оставляет ее неизменной. Остается применить теорему 2.7, согласно которой X' хорошо сформировано. $\square$

Если взвешенное полное пересечение X гладко и хорошо сформировано, то оно квазигладко по замечанию 2.4. Тем не менее априори мы не можем предполагать гладкость вместо квазигладкости в предложении 2.9, так как X не обязательно хорошо сформировано.

Вопрос 2.10. *Выполняется ли все-таки предложение 2.9, если в его предположениях заменить квазигладкость гладкостью?*

§ 3. Доказательство основного результата

В этом параграфе докажем теорему 1.1. Взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ всегда будем обозначать через $\mathbb{P}$. Будем говорить, что взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}$ мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$ *нормализовано*, если выполнены неравенства $a_0 \leq \dots \leq a_N$ и $d_1 \leq \dots \leq d_k$. Напомним, что если $X \subset \mathbb{P}$ является гладким хорошо сформированным взвешенным полным пересечением Фано мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$ и размерности не меньше двух, то $i_X = \sum a_i - \sum d_j$ (см. [6, следствие 2.8]). Отметим, что в более общей ситуации выполнена следующая версия формулы присоединения.

Теорема 3.1 (см. [2, теорема 3.3.4; 3, 6.14]). *Рассмотрим квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение X . Пусть ω_X — дуализирующий пучок на X . Тогда*

$$\omega_X = \mathcal{O}_X(-i_X).$$

В частности, из теоремы 3.1 следует, что если X — квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение любой размерности, то оно является многообразием Фано если и только если $i_X > 0$.

В доказательстве теоремы 1.1 будем использовать следующие вспомогательные результаты.

Теорема 3.2 (см. [7, теорема 1.2]). Рассмотрим нормализованное гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}$ коразмерности k , которое является многообразием Фано или Калаби — Яу и не является пересечением с линейным конусом. Тогда $a_{k-1} = 1$. Более того, общий элемент линейной системы $|\mathcal{O}_X(1)|$ гладок.

Следующий результат в неявном виде содержится в [7]. Докажем его для удобства читателя.

Лемма 3.3. Рассмотрим нормализованное гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \subset \mathbb{P}$ размерности n и мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$, которое не является пересечением с линейным конусом. Пусть X' — общий элемент линейной системы $|\mathcal{O}_X(1)|$. Тогда X' является хорошо сформированным взвешенным полным пересечением мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$ в $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(a_1, \dots, a_N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По классификации одномерных гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано (см., например, [6, лемма 2.6]) можно предполагать, что $\dim X \geq 2$.

Линейная система $|\mathcal{O}_X(1)|$ непуста по теореме 3.2, и каждый элемент системы $|\mathcal{O}_X(1)|$ высекается на X взвешенной гиперповерхностью в $\mathbb{P}$ степени 1 (см., к примеру, [6, следствие 3.3]). Таким образом, X' можно рассматривать как взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}'$ мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$.

Предположим, что взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}'$ не хорошо сформировано. Тогда найдется $N - 1$ чисел среди $a_1, \dots, a_N$ таких, что их наибольший общий делитель равен как минимум двум. Можно предполагать, что это — числа $a_2, \dots, a_N$. Пусть x_i — взвешенная однородная координата на $\mathbb{P}$ веса a_i , и пусть $\Lambda \subset \mathbb{P}$ — подмножество, заданное уравнениями $x_0 = x_1 = 0$. Тогда $\dim \Lambda = N - 2$. Так как $\dim X \geq 2$, пересечение $X \cap \Lambda$ непусто. С другой стороны, по [3, 5.15] взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}$ особо вдоль Λ , и по теореме 2.1 взвешенное полное пересечение X особо вдоль $X \cap \Lambda$. Полученное противоречие показывает, что $\mathbb{P}'$ хорошо сформировано.

По [3, 5.15] имеем $\text{Sing } \mathbb{P}' \subset \text{Sing } \mathbb{P}$. С другой стороны, так как X гладко и хорошо сформировано, оно не пересекается с $\text{Sing } \mathbb{P}$ по теореме 2.1. Значит, X' не пересекается с $\text{Sing } \mathbb{P}$ и, таким образом, также с $\text{Sing } \mathbb{P}'$, а это означает, что X' хорошо сформировано. $\square$

Следствие 3.4. Рассмотрим нормализованное гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}$ коразмерности k , которое является многообразием Фано или Калаби — Яу и не является пересечением с линейным конусом. Тогда $a_{k+i_X-1} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X является многообразием Калаби — Яу, то наше утверждение следует из теоремы 3.2. Таким образом, можно считать, что X является многообразием Фано. Положим $n = \dim X$. По [9, лемма 2.6] можно считать, что $\dim X \geq 2$. Более того, по [6, следствие 3.8(i),(ii)] можно считать, что $i_X \leq n - 1$.

Применяя теорему 3.2 последовательно i_X раз и помня, что общий элемент линейной системы $|\mathcal{O}_X(1)|$ хорошо сформирован по лемме 3.3, видим, что $a_0 = \dots = a_{i_X-1} = 1$, и существует нормализованное гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Калаби — Яу коразмерности k в $\mathbb{P}(a_{i_X}, \dots, a_N)$ (ср. с теоремой 3.1). Ясно, что полученное взвешенное полное

пересечение не является пересечением с линейным конусом. Осталось еще раз применить теорему 3.2 и заключить, что $a_{i_X} = \dots = a_{k+i_X-1} = 1$. $\square$

Теорема 3.5 [3, лемма 18.4]. Рассмотрим нормализованное квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}$ коразмерности k , которое не является пересечением с линейным конусом. Тогда $d_{k-j} > a_{N-j}$ для всех $1 \leq j \leq k$.

Лемма 3.6 (см. [8, предложение 3.1(1)]). Рассмотрим нормализованное квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}$ коразмерности k , которое не является пересечением с линейным конусом. Тогда $d_k \geq 2a_N$.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1.1.

Лемма 3.7 (ср. [8, доказательство теоремы 1.3]). Рассмотрим гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \subset \mathbb{P}$ размерности n и коразмерности k , которое не является пересечением с линейным конусом. Тогда $k \leq n$. Более того, если $k = n$, то X является полным пересечением n квадрик в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что X нормализовано. Предположим, что $k \geq n$. Тогда $a_0 = \dots = a_n = 1$ по следствию 3.4. Пусть X имеет мультистепень $(d_1, \dots, d_k)$. По теореме 3.5

$$1 \leq i_X = \sum_{i=0}^N a_i - \sum_{j=1}^k d_j = a_0 + \dots + a_n + (a_{n+1} - d_1) + \dots + (a_N - d_k) \leq n+1-k \leq 1.$$

Отсюда следует, что $k = n$ и $d_j - a_{n+j} = 1$ для всех $1 \leq j \leq k$. В частности, по лемме 3.6 имеем $1 = d_k - a_N \geq a_N$, так что $a_N = 1$ и $d_k = 2$. Это означает, что $a_i = 1$ для всех $0 \leq i \leq N$ и $d_j = 2$ для всех $1 \leq j \leq k$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. На самом деле первое утверждение леммы 3.7 выполнено при более слабом предположении, что X является квазигладким хорошо сформированным взвешенным пересечением Фано (см. [8, теорема 1.3]). Однако квазигладкости не хватает для второго утверждения. К примеру, общая гиперповерхность степени 30 в $\mathbb{P}(6, 10, 15)$ является квазигладкой хорошо сформированной кривой Фано, для которой это утверждение не выполнено.

Так же, как и лемму 3.7, докажем следующий результат (который тоже является частным случаем теоремы 1.1).

Лемма 3.9. Рассмотрим гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \subset \mathbb{P}$ размерности n и коразмерности k , которое не является пересечением с линейным конусом. Пусть $k = n-1 \geq 2$. Тогда X является либо полным пересечением $n-1$ квадрик в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{2n-1}$, либо полным пересечением $n-2$ квадрик и одной кубики в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{2n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что X нормализовано. Тогда $a_0 = \dots = a_{n-1} = 1$ по следствию 3.4. Пусть X имеет мультистепень $(d_1, \dots, d_k)$. По теореме 3.5

$$\begin{aligned} 1 \leq i_X &= \sum_{i=0}^N a_i - \sum_{j=1}^k d_j = a_0 + \dots + a_{n-1} + a_n + (a_{n+1} - d_1) + \dots + (a_N - d_k) \\ &= a_0 + a_1 + (a_{n+1} + a_2 - d_1) + \dots + (a_{N-1} + a_{n-1} - d_{k-1}) + (a_N + a_n - d_k) \\ &= 2 + (a_{n+1} + 1 - d_1) + \dots + (a_{N-1} + 1 - d_{k-1}) + (a_N + a_n - d_k) \\ &\leq 2 + (a_N + a_n - d_k). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Пусть $a_N = 1$. Это означает, что $a_i = 1$ для всех $0 \leq i \leq N$, так что X является полным пересечением в обычном проективном пространстве. Из (3.1) следует, что $d_k < 4$. Если $d_k = 2$, то X является полным пересечением $k = n - 1$ квадратик. Если $d_k = 3$, то, еще раз рассмотрев (3.1), видим, что для всех $1 \leq j \leq k - 1$ выполнено $d_j = a_{n+j} + 1 = 2$. Это означает, что X является полным пересечением $k = n - 2$ квадратик и одной кубики.

Предположим, что $a_N > 1$. Если $a_n = a_N$, то по лемме 2.5 как минимум $k + 1$ степеней среди $d_1, \dots, d_k$ делятся на a_n , что невозможно. Таким образом, $a_n < a_N$. Из (3.1) получаем

$$1 \leq 2 + (a_n + a_N - d_k) < 2 + (2a_N - d_k) \leq 2$$

по лемме 3.6. Это означает, что $d_k = 2a_N$ и $a_N = a_n + 1$. Еще раз взглянув на (3.1) и помня, что $k \geq 2$ по предположению, видим, что

$$d_1 = a_{n+1} + 1. \quad (3.2)$$

Так как $a_N = a_n + 1$, то либо $a_{n+1} = a_n$, либо $a_{n+1} = a_N$. В первом случае (3.2) дает $d_1 = a_{n+1} + 1 = a_n + 1 = a_N$. Это противоречит предположению, что X не является пересечением с линейным конусом. Во втором случае по лемме 2.5 число a_N делит все k степеней d_j . Так как X не является пересечением с линейным конусом, видим, что $d_j \geq 2a_N$ для всех $1 \leq j \leq k$. Используя (3.2), получим

$$2a_N \leq d_1 = a_{n+1} + 1 = a_N + 1,$$

что опять дает противоречие. $\square$

Докажем теорему 1.1 в общем случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Предположим, что $i_X \geq 2$. По теореме 3.2 линейная система $|\mathcal{O}_X(1)|$ непуста. Рассмотрим общий дивизор X' линейной системы $|\mathcal{O}_X(1)|$. Он гладок по теореме 3.2. Более того, он является хорошо сформированным взвешенным полным пересечением мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$ в $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(a_1, \dots, a_N)$ по лемме 3.3 и не является пересечением с линейным конусом. Более того, X' является многообразием Фано по теореме 3.1. Заметим, что теорема 1.1 выполнена для X тогда и только тогда, когда она выполнена для X' . Заметим также, что если размерность многообразия X' не больше трех, то утверждение теоремы 1.1 выполнено для X' по классификации гладких взвешенных пересечений Фано малых размерностей (см., к примеру, [9, табл. 1, 2]).

Таким образом, повторяя описанную выше процедуру несколько раз и используя теорему 3.1, можем считать, что $i_X = 1$, так как и k , и $n - i_X + 1$ не меняются при переходе к гиперплоскому сечению. Теперь $k \leq n = n - i_X + 1$ по лемме 3.7, что доказывает утверждение (i). Более того, если $k = n = n - i_X + 1$, то X является полным пересечением n квадратик в $\mathbb{P}^{2n}$ по лемме 3.9, что доказывает утверждение (ii). Наконец, если $k = n - 1 = n - i_X$ и $k \geq 2$, то X является полным пересечением $n - 2$ квадратик и одной кубики в $\mathbb{P}^{2n-1}$ по лемме 3.9, что доказывает утверждение (iii). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Утверждение (iii) теоремы 1.1 не выполнено без предположения, что $k \geq 2$. Действительно, кроме кубической гиперповерхности в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{n+1}$ существует два других типа гладких хорошо сформированных взвешенных гиперповерхностей Фано размерности n и индекса Фано $n - 1$:

гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1^n, 2, 3)$ и гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1^{n+1}, 2)$ (ср. [6, следствие 3.8(iii)]).

Кажется правдоподобным, что аналог теоремы 1.1 для $k = n - i_X - 1$ выглядит не так красиво. К примеру, существует по 5 семейств пятимерных и шестимерных взвешенных полных пересечений такой коразмерности. Одним из таких многообразий является шестимерное полное пересечение мультистепени $(2, 2, 2, 6)$ в $\mathbb{P}(1^{10}, 3)$.

Вопрос 3.11. Конечно ли число серий гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений коразмерности $n - i_X - 1$?

Благодарности. Мы благодарны Михаилу Александровичу Овчаренко, обнаружившему неточность в первой версии нашей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Iskovskikh V., Prokhorov Yu. Fano varieties. Berlin: Springer-Verl., 1999. (Encyclopaedia Math. Sci.; 47).
2. Dolgachev I. Weighted projective varieties // Lect. Notes Math. Berlin: Springer-Verl., 1982. V. 956. P. 34–71.
3. Iano-Fletcher A. R. Working with weighted complete intersections // Explicit birational geometry of 3-folds. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2000. P. 101–173. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 281).
4. Dimca A. Singularities and coverings of weighted complete intersections // J. Reine Angew. Math. 1986. V. 366. P. 183–193.
5. Przyjalkowski V., Shramov C. Bounds for smooth Fano weighted complete intersections. <http://arxiv.org/1611.09556>.
6. Пржиялковский В. В., Шрамов К. А. Автоморфизмы взвешенных полных пересечений // Алгебра, теория чисел и алгебраическая геометрия. Сборник статей. Посвящается памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН. 2019. Т. 307. DOI:10.4213/tm4043.
7. Pizzato M., Sano T., Tasin L. Effective nonvanishing for Fano weighted complete intersections // Algebra Number Theory. 2017. V. 11, N 10. P. 2369–2395.
8. Chen J.-J., Chen J., Chen M. On quasismooth weighted complete intersections // J. Algebraic Geom. 2011. V. 20, N 2. P. 239–262.
9. Przyjalkowski V., Shramov C. Hodge level for weighted complete intersections // Collect. Math. <http://arxiv.org/1801.10489>.

Поступила в редакцию 19 июля 2019 г.

После доработки 19 июля 2019 г.

Принята к публикации 25 декабря 2019 г.

Пржиялковский Виктор Владимирович, Шрамов Константин Александрович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
victorprz@mi-ras.ru, costya.shramov@gmail.com