A. B. Altaeva, B. Sh. Kulpeshov, Binariness of almost ω -categorical quite o -minimal theories, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 484–498

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.301>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 18:19:26

УДК 510.67

БИНАРНОСТЬ ПОЧТИ ω -КАТЕГОРИЧНЫХ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

А. Б. Алтаева, Б. Ш. Кулпешов

Аннотация. Исследуются свойства почти ω -категоричных вполне о-минимальных теорий. Доказаны ортогональность произвольного семейства попарно слабо ортогональных неалгебраических 1-типов в исследуемых теориях, а также бинарность этих теорий.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.301

Ключевые слова: почти ω -категоричность, слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, бинарная теория.

К 80-летию академика Ю. Л. Ершова

1. Предварительные сведения

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L -структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, имеем $c \in A$.

Слабо о-минимальной структурой называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M . Вспомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M . Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M . Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ (соответственно $b < A$) означает, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Для произвольного типа p обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M . Для произвольного кортежа $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ длины n обозначаем через $\bar{b}_i$ кортеж $\langle b_1, b_2, \dots, b_i \rangle$ для каждого $1 \leq i \leq n-1$. Если $B \subseteq M$ и E — отношение эквивалентности на B , то обозначаем через B/E множество представителей E -классов, лежащих в B . Если f — функция на M , то

Данные исследования поддержаны грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (AP05132546).

мы обозначаем через $\text{Dom}(f)$ область определения функции f , а через $\text{Range}(f)$ — ее область значений. Теория T бинарная, если любая формула теории T эквивалентна в T булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

В следующих определениях M — слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, $M|A|^+$ -насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ неалгебраические.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [2]. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A -определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Иными словами, тип p является *слабо ортогональным* типу q , если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A .

Лемма 1.2 [2, следствие 34(iii)]. *Отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [3]. Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), если существует A -определимая биекция $f : p(M) \rightarrow q(M)$. Будем говорить что слабо о-минимальная теория *вполне о-минимальная*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно, что любая о-минимальная теория вполне о-минимальна, поскольку в случае не слабой ортогональности 1-типов над произвольным множеством A существует A -определимая строго монотонная биекция между множествами реализаций этих типов.

ПРИМЕР 1.4 [1]. Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M — дизъюнктное объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченным, как обычно, а P_1 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\text{Dom}(f) = P_1(M)$, $\text{Range}(f) = P_2(M)$ и определяется равенством $f((n, m)) = n$ для всех $(n, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Можно доказать, что $\text{Th}(M)$ — слабо о-минимальная теория. Пусть $p(x) := \{P_1\}$, $q(x) := \{P_2\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$, $p \not\perp^w q$, но $p \perp^q q$, т. е. $\text{Th}(M)$ не вполне о-минимальна.

ПРИМЕР 1.5. Пусть $\mathcal{M} = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^2, E_2^2, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, так что $\mathcal{M}$ — дизъюнктное объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(\mathcal{M}) < P_2(\mathcal{M})$. Мы отождествляем интерпретации P_1 и P_2 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1(x, y)$ и $E_2(x, y)$ — это отношения эквивалентности на $P_1(\mathcal{M})$ и $P_2(\mathcal{M})$ соответственно такие, что для всех $x = (n_1, m_1), y = (n_2, m_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$E_i(x, y) \Leftrightarrow n_i = n_2, \quad \text{где } i = 1, 2.$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\text{Dom}(f) = P_1(\mathcal{M})$ и $\text{Range}(f) = P_2(\mathcal{M})$ и определяется посредством $f((n, m)) = (n, -m)$ для всех $(n, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Можно понять, что $E_1(x, y)$ и $E_2(x, y)$ — $\emptyset$ -определимые отношения эквивалентности, разбивающие $P_1(\mathcal{M})$ и $P_2(\mathcal{M})$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Утверждаем, что f является строго убывающей на каждом $E_1(a, \mathcal{M})$, где $a \in P_1(\mathcal{M})$, и f — строго возрастающая на $P_1(\mathcal{M})/E_1$. Можно доказать, что $\text{Th}(\mathcal{M})$ — вполне о-минимальная теория.

Теория $\text{Th}(\mathcal{M})$ не о-минимальна, поскольку $E_1(a, M)$ определяет выпуклое множество, не являющееся интервалом в $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 [4, 5]. Пусть $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(T)$. Тип $q(x_1, \dots, x_n) \in S(T)$ называется $(p_1, \dots, p_n)$ -*типом*, если $q(x_1, \dots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^n p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1, \dots, p_n)$ -типов теории T обозначается через $S_{p_1, \dots, p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти ω -категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S(T)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1, \dots, p_n}(T)$.

Вполне о-минимальные теории являются подклассом класса слабо о-минимальных теорий, наследующим многие свойства о-минимальных теорий. В [6] была решена проблема Воота для вполне о-минимальных теорий: было доказано, что любая счетная вполне о-минимальная теория является либо счетно категоричной, либо эренфойхтовой, либо имеет максимальное число счетных моделей. Этот результат обобщает теорему Майер [7], являющуюся решением проблемы Воота для о-минимальных теорий. Также отметим, что в [8] рассматривались алгебры распределений бинарных формул для вполне о-минимальных теорий, а в [9] найден критерий максимальности счетного спектра в малых бинарных вполне о-минимальных теориях конечного ранга выпуклости.

Почти ω -категоричность тесно связана с понятием эренфойхтовости теории. Так, в [4] доказано, что если T — почти ω -категоричная теория с условием $I(T, \omega) = 3$, то в теории T интерпретируется плотный линейный порядок. В [10] были установлены почти ω -категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий и выполнимость принципа замены для алгебраического замыкания в почти ω -категоричных вполне о-минимальных теориях. В настоящей работе доказана ортогональность семейства попарно слабо ортогональных неалгебраических 1-типов в почти ω -категоричных вполне о-минимальных теориях (теорема 3.7) и бинарность этих теорий (теорема 4.8). Заметим, что эти свойства не выполняются для малых вполне о-минимальных теорий в общем (пример 3.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 [11]. *Дизъюнктивным объединением* $\bigsqcup_{n \in \omega} \mathcal{M}_n$ попарно не пересекающихся структур $\mathcal{M}_n$ попарно не пересекающихся предикатных сигнатур Σ_n , $n \in \omega$, называется структура сигнатуры $\bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n \cup \{P_n^{(1)} \mid n \in \omega\}$ с носителем $\bigsqcup_{n \in \omega} M_n$, $P_n = M_n$, и интерпретациями предикатных символов из Σ_n , совпадающими с их интерпретациями в структурах $\mathcal{M}_n$, $n \in \omega$. *Дизъюнктивным объединением теорий* T_n попарно не пересекающихся предикатных сигнатур Σ_n соответственно, $n \in \omega$, называется теория

$$\bigsqcup_{n \in \omega} T_n \equiv \text{Th}\left(\bigsqcup_{n \in \omega} \mathcal{M}_n\right),$$

где $\mathcal{M}_n \models T_n$, $n \in \omega$.

Заметим, что почти ω -категоричные вполне о-минимальные теории не эренфойхтовы в общем. В качестве примера такой теории можно взять дизъюнктивное объединение счетного числа копий примера Эренфойхта с тремя счетными моделями, упорядоченных по типу ω . Данная теория имеет счетное число неизоллированных 1-типов над $\emptyset$, поэтому имеет максимальное число счетных моделей.

Заметим также, что почти ω -категоричные вполне о-минимальные теории не являются малыми в общем. В качестве примера такой теории можно рассмотреть структуру $M = \langle \mathbb{Q}, <, q \rangle_{q \in \mathbb{Q}}$. Тогда $\text{Th}(M)$ имеет 2^ω 1-типов над $\emptyset$, т. е. не является малой.

2. Поведение 2-формул

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [12]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $M|A|^+$ -насыщенна и $p \in S_1(A)$ неалгебраический.

(1) A -определимая формула $F(x, y)$ называется p -стабильной, если существуют $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ такие, что $F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < F(M, \alpha) < \gamma_2$.

(2) p -Стабильная формула $F(x, y)$ называется *выпуклой вправо (влево)*, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M, \alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(M, \alpha)$ и $\alpha \in F(M, \alpha)$.

Пусть $F_1(x, y), F_2(x, y)$ — p -стабильные выпуклые вправо (влево) формулы. Будем говорить, что $F_2(x, y)$ *больше, чем* $F_1(x, y)$, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [13]. Будем говорить, что p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x, y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$, имеет место

$$M \models \forall x (x \geq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta))) \quad (M \models \forall x (x \leq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)))).$$

Лемма 2.3 [13]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $M|A|^+$ -насыщенна и $p \in S_1(A)$ неалгебраический, $F(x, y)$ — p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула. Предположим, что $F(x, y)$ не является эквивалентность-генерирующей. Тогда существуют $\alpha, \beta \in p(M)$ такие, что

$$M \models F(\beta, \alpha) \wedge \exists x (\neg F(x, \alpha) \wedge F(x, \beta)).$$

Лемма 2.4 [13]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $M|A|^+$ -насыщенна и $p \in S_1(A)$ неалгебраический, $F(x, y)$ — p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула. Тогда формула

$$F'(x, y) := \exists z (F(z, y) \wedge F(x, z))$$

также p -стабильная выпуклая вправо (влево).

Лемма 2.5 [13]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ неалгебраический и $M|A|^+$ -насыщенна. Предположим, что $F(x, y)$ — p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда

(1) $G(x, y) := F(y, x)$ — p -стабильная выпуклая влево (вправо) формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей.

(2) $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Предложение 2.6. Пусть T — почти ω -категоричная слабо о-минимальная теория и $p \in S_1(\emptyset)$ неалгебраический. Тогда любая p -стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: существует p -стабильная выпуклая вправо формула $F(x, y)$, не являющаяся эквивалентность-генерирующей.

Тогда по лемме 2.3 в некоторой модели M теории T существуют $\alpha, \beta \in p(M)$ такие, что

$$M \models F(\beta, \alpha) \wedge \exists x (\neg F(x, \alpha) \wedge F(x, \beta)).$$

Рассмотрим следующую формулу:

$$F_1(x, y) := \exists z (F(z, y) \wedge F(x, z)).$$

В силу леммы 2.4 $F_1(x, y)$ также является p -стабильной выпуклой вправо формулой. Определим следующие формулы:

$$F_n(x, y) := \exists z (F_{n-1}(z, y) \wedge F(x, z)), \quad n \geq 2.$$

Нетрудно понять, что для любого $\alpha \in p(M)$

$$F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha) \subset \dots \subset F_n(M, \alpha) \subset \dots$$

Рассмотрим для каждого натурального $n \geq 2$ следующее множество формул:

$$p_n(x, y) := p(x) \cup p(y) \cup \{F_n(x, y) \wedge \neg F_{n-1}(x, y)\}.$$

Оно локально совместно. Тогда число (p_1, p_2) -типов бесконечно, где $p_i(x_i) := p(x_i)$, $i = 1, 2$. Последнее противоречит почти ω -категоричности T . $\square$

Следствие 2.7. Пусть T — почти ω -категоричная слабо о-минимальная теория и $p \in S_1(\emptyset)$ неалгебраический. Если $a_1 < a_2$ — реализации типа p , то существует a_3 такой, что $a_1 < a_3 < a_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M \models T$ и $a_1, a_2 \in M$. Допустим противное: не существует $a_3 \in M$ такого, что $a_1 < a_3 < a_2$. Рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, a_1) := a_1 \leq x \wedge \forall z (a_1 \leq z \leq x \rightarrow z = a_1 \vee z = x).$$

Нетрудно понять, что $F(x, y)$ p -стабильная выпуклая вправо и $F(x, y)$ не является эквивалентность-генерирующей, что противоречит предложению 2.6. $\square$

Следствие 2.8. Пусть T — почти ω -категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ неалгебраический и $E(x, y)$ — $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на выпуклые классы, причем имеется не менее двух таких классов. Тогда E разбивает $p(M)$ на бесконечное число таких классов, так что индуцированный порядок на классах является плотным порядком без концевых точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существуют $a_1, a_2 \in p(M)$ такие, что $a_1 < a_2$, $\neg E(a_1, a_2)$ и для любого $a \in M$ такого, что $a_1 < a < a_2$, следует $\models E(a_1, a)$ или $\models E(a, a_2)$, то рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, a_1) := \exists y (a_1 \leq x \leq y \wedge \neg E(a_1, y) \wedge \forall z (a_1 \leq z \leq y \rightarrow E(a_1, z) \vee E(z, y))).$$

Очевидно, что $F(x, y)$ p -стабильная выпуклая вправо и $F(x, y)$ не является эквивалентность-генерирующей, что противоречит предложению 2.6. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9 [14]. Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T , и пусть $\phi(x)$ — произвольная M -определимая формула с одной свободной переменной. Ранг выпуклости формулы $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом:

- (1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

(2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечная последовательность элементов $b_i, i \in \omega$, такие, что

- для любых $i, j \in \omega$ всякий раз, когда $i \neq j$, имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$,
- для каждого $i \in \omega$ имеем $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$.

(3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α , то говорим, что $RC(\phi(x))$ *определяется*. В противном случае (т. е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α) полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Рангом выпуклости 1-типа p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т. е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

Ранг выпуклости произвольной одноместной формулы $\phi(x)$ назовем *бинарным* и будем обозначать через $RC_{\text{bin}}(\phi(x))$, если в определении 2.9 параметрически определимые отношения эквивалентности заменим $\emptyset$ -определимыми (т. е. бинарными) отношениями эквивалентности.

Лемма 2.10. Пусть T — почти ω -категоричная слабо о-минимальная теория и $p \in S_1(\emptyset)$ неалгебраический. Тогда $RC_{\text{bin}}(p) < \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: $RC_{\text{bin}}(p) \geq \omega$. Тогда существует бесконечное число $\emptyset$ -определимых отношений эквивалентности $\{E_i(x, y) \mid i \in \omega\}$ такое, что либо для любого $a \in p(M)$

$$E_1(a, M) \subset E_2(a, M) \subset \dots \subset E_i(a, M) \subset \dots,$$

либо для любого $a \in p(M)$

$$E_1(a, M) \supset E_2(a, M) \supset \dots \supset E_i(a, M) \supset \dots$$

Пусть $E_0(x, y) := x = y$. Для каждого $n \in \omega$ рассмотрим следующее множество формул:

$$p_n(x, y) := p(x) \cup p(y) \cup \{E_n(x, y) \wedge \neg E_{n-1}(x, y)\}.$$

Оно локально совместно. Тогда число (p_1, p_2) -типов бесконечно, где $p_i(x_i) := p(x_i), i = 1, 2$. Последнее противоречит почти ω -категоричности T . $\square$

3. Ортогональность

Лемма 3.1. Пусть T — произвольная полная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $M|A^+$ -насыщенна, $m, n < \omega$, $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, $\bar{a}' = \langle a'_1, \dots, a'_m \rangle \in M^m$ и $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_n \rangle \in M^n$ такие, что $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$, $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1} \rangle/A) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'_{n-1} \rangle/A)$ и $tp(\langle a_i, b_n \rangle/A) = tp(\langle a'_i, b'_n \rangle/A)$ для всех $1 \leq i \leq m$. Тогда $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle/A)$ влечет существование $b''_n \in M$ такого, что

$$tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle/A) = tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle/A), \quad tp(\langle a_i, b_n \rangle/A) = tp(\langle a_i, b''_n \rangle/A)$$

для всех $1 \leq i \leq m$ и

$$tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle/A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle/A)$, существует A -определимая формула $R(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $M \models R(\bar{a}, \bar{b}) \wedge \neg R(\bar{a}', \bar{b}')$.

Пусть $p(\bar{y}) := tp(\bar{b}/A)$, $q_i(x, y) := tp(\langle a_i, b_n \rangle/A)$, где $1 \leq i \leq m$. Для любых $\phi(\bar{y}) \in p$, $\psi^i(x, y) \in q_i$ (где $1 \leq i \leq m$) рассмотрим следующую формулу:

$$K_{\phi, \psi^i}(\bar{x}, \bar{y}_{n-1}) := \forall y \left(\phi(\bar{y}_{n-1}, y) \wedge \bigwedge_{i=1}^m \psi^i(x_i, y) \rightarrow R(\bar{x}, \bar{y}_{n-1}, y) \right).$$

Допустим противное: для любого $b''_n \in M$ такого, что $tp(\bar{b}_{n-1}, b_n)/A = tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle/A)$ и $tp(\langle a_i, b_n \rangle/A) = tp(\langle a_i, b''_n \rangle/A)$ для всех $1 \leq i \leq m$, следует, что $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle/A) = tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle/A)$. Тогда $M \models K_{\phi, \psi^i}(\bar{a}, \bar{b}_{n-1})$ для всех $\phi(\bar{y}) \in p$ и $\psi^i(x, y) \in q_i$, где $1 \leq i \leq m$. Но поскольку $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1} \rangle/A) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'_{n-1} \rangle/A)$, имеем $M \models K_{\phi, \psi^i}(\bar{a}', \bar{b}'_{n-1})$ для всех $\phi(\bar{y}) \in p$ и $\psi^i(x, y) \in q_i$, где $1 \leq i \leq m$, что противоречит допущению. $\square$

Лемма 3.2. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ неалгебраические и $p \perp^w q$. Тогда для любых $a, a' \in p(M)$, $b_1 < b_2, b'_1 < b'_2 \in q(M)$ таких, что $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset)$,

$$tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a', b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: предположим что существуют $a, a' \in p(M)$, $b_1 < b_2, b'_1 < b'_2 \in q(M)$ такие, что $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset)$, но $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a', b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset)$. В силу слабой ортогональности p и q

$$tp(\langle a, b_1 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a', b'_1 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a', b'_2 \rangle/\emptyset).$$

Тогда по лемме 3.1 существует $b''_2 \in q(M)$ такой, что

$$tp(\langle a, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a, b''_2 \rangle/\emptyset), \quad tp(\langle b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle b_1, b''_2 \rangle/\emptyset)$$

и $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a, b_1, b''_2 \rangle/\emptyset)$.

Пусть $p' := tp(a/\{b_1\})$, $q' := tp(b_2/\{b_1\})$. В силу слабой ортогональности p и q имеем $p'(M) = p(M)$. Также можно понять, что q' неалгебраический. Действительно, если бы q являлся алгебраическим, то легко построили бы q -стабильную выпуклую вправо формулу, не являющуюся эквивалентность-генерирующей, противореча предложению 2.6. Очевидно, что $b_2, b''_2 \in q'(M)$, откуда получаем $p' \not\perp^w q'$. В силу вполне о-минимальности существуют $\{b_1\}$ -определимая биекция $f_{b_1} : p'(M) \rightarrow q'(M)$ и, стало быть, $b''_2 \in q'(M)$ такие, что $f_{b_1}(a) = b''_2$, т. е. $b''_2 \in \text{dcl}(\{a, b_1\})$. Пусть $q'' := tp(b_1/\{a\})$. Очевидно, что $q''(M) = q(M)$ и $b_1, b''_2 \in q''(M)$, откуда получаем q'' -стабильную выпуклую вправо формулу, не являющуюся эквивалентность-генерирующей, снова противореча предложению 2.6. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3 [1]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $D \subseteq M$ бесконечно и $f : D \rightarrow M$ — функция. Будем говорить, что f *локально возрастающая* (локально убывающая, локально константа) на D , если для любого $x \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x , так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J .

Будем также говорить, что функция f *локально монотонная* на множестве $D \subseteq M$, если f либо локально возрастающая, либо локально убывающая на D .

Пусть f — A -определимая функция на $D \subseteq M$, E — A -определимое отношение эквивалентности на D . Будем говорить, что f *строго возрастающая* (убывающая) на D/E , если для любых $a, b \in D$ с условиями $a < b$ и $\neg E(a, b)$ имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Предложение 3.4 [15]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$ и $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Тогда любая функция, область определения которой содержит множество $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.

Лемма 3.5. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ неалгебраические, $p \perp^w q$, $a \in p(M)$, $b \in q(M)$, $q' := tp(b/\{a\})$. Предположим что существует $\{a\}$ -определимая функция f такая, что $q'(M) \subseteq \text{Dom}(f)$ и f не является константой на $q'(M)$. Тогда существует $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $q'(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f строго монотонна на $q'(M)/E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу слабой ортогональности p и q имеем $q'(M) = q(M)$. Поскольку f не является константой на $q'(M)$, существует $\{a\}$ -определимое отношение эквивалентности $E'_a(x, y)$, разбивающее $q'(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что f строго монотонна на $q'(M)/E'_a$. Допустим противное: предположим, что E'_a не является $\emptyset$ -определимым. В силу леммы 2.10 существует $n < \omega$ такой, что $RC_{\text{bin}}(q) = n$. Тогда существуют $\emptyset$ -определимые формулы $E_1(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$, образующие полный список $\emptyset$ -определимых нетривиальных отношений эквивалентности, каждое из которых разбивает $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что E_i утончает E_{i+1} для каждого $1 \leq i \leq n-2$. Тогда либо $E'_a(b, M) \subset E_1(b, M)$, либо $E_i(b, M) \subset E'_a(b, M) \subset E_{i+1}(b, M)$ для некоторого $i \leq n-2$, либо $E_{n-1}(b, M) \subset E'_a(b, M)$ для всех $b \in q'(M)$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда существуют $b, b', b'' \in q'(M)$ такие, что

$$M \models b < b' < b'' \wedge E'_a(b, b') \wedge \neg E'_a(b', b'') \wedge E_1(b, b''),$$

т. е. $tp(\langle b, b' \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, b'' \rangle / \emptyset)$, но $tp(\langle a, b, b' \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, b'' \rangle / \emptyset)$, что противоречит лемме 3.2. $\square$

Пусть $A \subseteq B \subseteq M$, B конечно, $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(A)$ неалгебраические. Будем говорить, что семейство 1-типов $\{p_1, \dots, p_s\}$ слабо ортогонально над B , если каждый s -кортеж $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in p_1(M) \times \dots \times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над B . Будем говорить, что семейство 1-типов $\{p_1, \dots, p_s\}$ ортогонально над B , если для любой последовательности $(n_1, \dots, n_s) \in \omega^s$, для любых возрастающих кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}, \dots, \bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/B) = tp(\bar{a}'_1/B)$, $\dots$, $tp(\bar{a}_s/B) = tp(\bar{a}'_s/B)$, имеем $tp(\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s \rangle / B) = tp(\langle \bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_s \rangle / B)$.

Если $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ и $p_1 \perp^w p_2$, то очевидно, что $\{p_1, p_2\}$ слабо ортогонально над A .

Лемма 3.6. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория и $p_1, \dots, p_m \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда $\{p_1, \dots, p_m\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по $m \geq 2$. Шаг $m = 2$ является очевидным. Предположим, что лемма установлена для множеств из $m-1$ типов. Докажем лемму для множеств из m типов. Рассмотрим произвольный кортеж $\langle a_1, a_2, \dots, a_{m-3} \rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times \dots \times p_{m-3}(M)$, и пусть $T' = T(a_1, a_2, \dots, a_{m-3})$. Нетрудно понять, что T' все еще остается почти ω -категоричной вполне о-минимальной теорией. Рассмотрим типы p_{m-2}, p_{m-1} и p_m . В силу индукционного предположения они имеют единственные расширения p'_{m-2}, p'_{m-1} и p'_m до типов над $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-3}\}$ соответственно, более того,

$p_{m-2}(M) = p'_{m-2}(M)$, $p_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$ и $p_m(M) = p'_m(M)$. Индукционное предположение также гарантирует, что они попарно слабо ортогональны. Для удобства обозначений переименуем p'_{m-2}, p'_{m-1} и p'_m через p_1, p_2 и p_3 соответственно и покажем, что $\{p_1, p_2, p_3\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$, т. е. $\{p'_{m-2}, p'_{m-1}, p'_m\}$ слабо ортогонально над $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-3}\}$. В силу произвольности выбора $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-3}\}$ тогда заключаем, что $\{p_1, \dots, p_m\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$.

Допустим противное: пусть существуют кортежи $\langle a, b, c \rangle, \langle a', b', c' \rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times p_3(M)$ такие, что $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a', b', c' \rangle / \emptyset)$. Поскольку p_1, p_2 и p_3 попарно слабо ортогональны, то $tp(\langle a, b \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', b' \rangle / \emptyset)$, $tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', c' \rangle / \emptyset)$ и $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b', c' \rangle / \emptyset)$. Тогда в силу леммы 3.1 существует $c'' \in p_3(M)$ такой, что $tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c'' \rangle / \emptyset)$, $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c'' \rangle / \emptyset)$ и $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, c'' \rangle / \emptyset)$.

Пусть $p'_1 := tp(a / \{b\})$, $p'_3 := tp(c / \{b\})$. В силу попарной слабой ортогональности типов p_1, p_2 и p_3 имеем $p'_1(M) = p_1(M)$ и $p'_3(M) = p_3(M)$. Следовательно, $c'' \in p'_3(M)$, откуда $p'_1 \not\leq^w p'_3$. В силу вполне о-минимальности существует $\{b\}$ -определяемая биекция $f_b : p'_1(M) \rightarrow p'_3(M)$. Таким образом, существует $c_0 \in p'_3(M)$ такой, что $f_b(a) = c_0$, т. е. $c_0 \in \text{dcl}(\{a, b\})$. В силу леммы 3.5 существует $\emptyset$ -определяемое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p_2(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f_b строго монотонна на $p_1(M)/E$. Не умаляя общности, предположим, что f_b строго возрастающая на $p_1(M)/E$. Возьмем $a_1 \in p_1(M)$ с условием $a < a_1$ и $\neg E''(a, a_1)$ и рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(y, a, a_1, b) := f_b(a) = f_y(a_1),$$

$$\Phi_n(y, a, a_1, b) := \exists y_0 (\Phi_{n-1}(y_0, a, a_1, b) \wedge f_{y_0}(a) = f_y(a_1)), \quad n \geq 2.$$

Очевидно, что $M \models \exists! y \Phi_n(y, a, a_1, b)$ для каждого $n < \omega$ и

$$\dots < \Phi_n(M, a, a_1, b) < \dots < \Phi_2(M, a, a_1, b) < \Phi_1(M, a, a_1, b) < b.$$

Тогда для каждого $n \in \omega$ рассмотрим следующее множество формул:

$$p_2(x_1) \cup p_1(x_2) \cup p_1(x_3) \cup p_2(x_4) \cup \{x_2 < x_3 \wedge \neg E''(x_2, x_3)\} \cup \{\Phi_n(x_1, x_2, x_3, x_4)\}.$$

Оно локально совместно. Тем самым число (q_1, q_2, q_3, q_4) -типов, где $q_1(x_1) := p_2(x_1)$, $q_2(x_2) := p_1(x_2)$, $q_3(x_3) := p_1(x_3)$, $q_4(x_4) := p_2(x_4)$, бесконечно, противоречит почти ω -категоричности T' . $\square$

Теорема 3.7. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория и $p_1, \dots, p_m \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда $\{p_1, \dots, p_m\}$ ортогонально над $\emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по $m \geq 2$.

Шаг 2. Докажем индукцией по (n_1, n_2) , что для любых возрастающих

$$\bar{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n_1} \rangle, \quad \bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_{n_1} \rangle \in [p_1(M)]^{n_1},$$

$$\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n_2} \rangle, \quad \bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_{n_2} \rangle \in [p_2(M)]^{n_2},$$

где $tp(\bar{a} / \emptyset) = tp(\bar{a}' / \emptyset)$, $tp(\bar{b} / \emptyset) = tp(\bar{b}' / \emptyset)$, имеем $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$. Случай $(1, 1)$ тривиален. Пусть шаг 2 установлен для любого $(k_1, k_2) <_{\text{lex}} (n_1, n_2)$, докажем его для (n_1, n_2) . Допустим противное: предположим что

$tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$. В силу слабой ортогональности типов p_1 и p_2 имеем $tp(\langle a_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$ для всех $1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2$. Тогда по лемме 3.1 существует $b''_{n_2} \in p_2(M)$ такой, что

$$tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset), \quad tp(\langle a_i, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_i, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$$

для всех $1 \leq i \leq n_1$ и $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$. Пусть $A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$. В силу индукционного предположения

$$tp(\langle b_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A).$$

СЛУЧАЙ 1. $tp(b_{n_2-1}/A) = tp(b_{n_2}/A)$. Пусть $p'_1(x) := tp(a_{n_1}/A)$, $p'_2(y) := tp(b_{n_2-1}/A)$. Также в силу индукционного предположения $p'_1 \perp^w p'_2$ и, следовательно, по лемме 3.2 имеем $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A)$, противоречия предположению.

СЛУЧАЙ 2. $tp(b_{n_2-1}/A) \neq tp(b_{n_2}/A)$. Пусть p'_1 и p'_2 будут, как в случае 1, и пусть $p'_3(z) := tp(b_{n_2}/A)$. В силу индукционного предположения $p'_1 \perp^w p'_2$, $p'_1 \perp^w p'_3$ и, следовательно $p'_2 \perp^w p'_3$. Тогда по лемме 3.6 $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A)$; противоречие с предположением.

ШАГ m . Предположим, что теорема установлена для множеств из k 1-типов для любого $k \leq m-1$, и докажем ее для множеств из m 1-типов. По лемме 3.6 случай $n_1 = 1, n_2 = 1, \dots, n_m = 1$ имеет место. Предположим, что шаг m установлен для всех $(k_1, k_2, \dots, k_m) <_{\text{lex}} (n_1, n_2, \dots, n_m)$, и докажем его для $(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Возьмем произвольные возрастающие кортежи $\bar{a}_{n_1} \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{a}_{n_2} \in [p_2(M)]^{n_2}$, $\dots$, $\bar{a}_{n_{m-2}} \in [p_{m-2}(M)]^{n_{m-2}}$. Индукционное предположение гарантирует, что p_{m-1} и p_m имеют единственные расширения до типов p'_{m-1} и p'_m соответственно над $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}}\}$, т. е. $p_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$, $p_m(M) = p'_m(M)$. Пусть $M' = \langle M, \bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}} \rangle$. Индукционное предположение также гарантирует, что p'_{m-1} и p'_m слабо ортогональны в M' . В силу шага 2 $\{p'_{m-1}, p'_m\}$ ортогонально над $\emptyset$ в M' и, следовательно, $\{p_{m-1}, p_m\}$ ортогонально над $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}}\}$ в M . В силу произвольности $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}}\}$ имеем, что $\{p_1, \dots, p_m\}$ ортогонально над $\emptyset$. $\square$

ПРИМЕР 3.8 [6]. Пусть $\mathcal{M} = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, P_3^1, f^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M — дизъюнктное объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 , P_2 и P_3 , при этом $P_1(\mathcal{M}) < P_2(\mathcal{M}) < P_3(\mathcal{M})$. Мы отождествляем каждую интерпретацию P_i ($1 \leq i \leq 3$) с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченным, как обычно. Символ f интерпретируется частичной бинарной функцией с $\text{Dom}(f) = P_1(\mathcal{M}) \times P_2(\mathcal{M})$ и $\text{Range}(f) = P_3(\mathcal{M})$ и определяется равенством $f(a, b) = a + b$ для всех $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Можно доказать, что $\text{Th}(M)$ — вполне о-минимальная теория. Поскольку для каждого конечного множества $A \subseteq M$ существует не более чем счетное множество 1-типов над A , заключаем, что $\text{Th}(M)$ — малая теория. Пусть $p_i(x) := \{P_i(x)\}$ для каждого $1 \leq i \leq 3$. Очевидно, что $p_i \in S_1(\emptyset)$ для каждого $1 \leq i \leq 3$. Типы p_1, p_2 и p_3 попарно слабо ортогональны, но $\{p_1, p_2, p_3\}$ не ортогонально над $\emptyset$.

4. Бинарность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 [7]. Тип $p \in S_1(\emptyset)$ называется *простым*, если для всех $n \in \omega$ всякий раз, когда $f(x_1, \dots, x_n)$ — нетривиальная $\emptyset$ -определимая n -арная

функция и $a_1, \dots, a_n$ — реализации типа p , $f(a_1, \dots, a_n)$ не является реализацией типа p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 [16]. Пусть $p \in S_1(A)$ неалгебраический. Будем говорить, что тип p является *бинарным над A* , если для каждого $n < \omega$ и любых возрастающих кортежей $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_n \rangle \in [p(M)]^n$ таких, что $tp(\langle b_i, b_j \rangle / A) = tp(\langle b'_i, b'_j \rangle / A)$ для всех $1 \leq i < j \leq n$, имеем $tp(\bar{b} / A) = tp(\bar{b}' / A)$. Если $p \in S_1(\emptyset)$ неалгебраический и p бинарный над $\emptyset$, будем говорить, что p *бинарный*.

Предложение 4.3. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория и $p \in S_1(\emptyset)$ неалгебраический. Тогда p бинарный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что для любого $s < \omega$ и любых возрастающих кортежей $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_s \rangle \in [p(M)]^s$ таких, что $tp(\langle b_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$ для всех $1 \leq i < j \leq s$, следует, что $tp(\bar{b} / \emptyset) = tp(\bar{b}' / \emptyset)$.

Допустим противное: существуют возрастающие кортежи $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_s \rangle \in [p(M)]^s$ такие, что $tp(\langle b_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$ для всех $1 \leq i < j \leq s$ и $tp(\bar{b} / \emptyset) \neq tp(\bar{b}' / \emptyset)$, и s минимальное с таким свойством.

В силу минимальности s имеем $tp(\langle b_1, \dots, b_{s-1} \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_1, \dots, b'_{s-1} \rangle / \emptyset)$. По лемме 3.1 существует $b''_s \in p(M)$ такой, что $tp(\langle b_i, b_s \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_i, b''_s \rangle / \emptyset)$ для всех $1 \leq i < s$ и $tp(\langle b_1, \dots, b_{s-1}, b_s \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle b_1, \dots, b_{s-1}, b''_s \rangle / \emptyset)$.

В силу леммы 2.10 $RC_{\text{bin}}(p) < \omega$, поэтому существуют $k < \omega$ и $\emptyset$ -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), \dots, E_k(x, y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E_i для каждого $2 \leq i \leq k$ разбивает каждый E_{i-1} -класс на бесконечное число бесконечных выпуклых E_i -подклассов.

Пусть $E_0(x, y) := x = y$.

Существуют натуральные числа $i_1, i_2, \dots, i_{s-1}$ такие, что $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{s-1} \leq k$ и

$$\begin{aligned} M \models & E_{i_1}(b_1, b_2) \wedge \neg E_{i_1-1}(b_1, b_2) \wedge E_{i_2}(b_2, b_3) \wedge \neg E_{i_2-1}(b_2, b_3) \wedge \\ & \dots \wedge E_{i_{s-2}}(b_{s-2}, b_{s-1}) \wedge \neg E_{i_{s-2}-1}(b_{s-2}, b_{s-1}) \wedge E_{i_{s-1}}(b_{s-1}, b_s) \wedge \neg E_{i_{s-1}-1}(b_{s-1}, b_s). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} p'(x) &:= p(x) \cup \{x < b_2\} \cup \{E_{i_1}(x, b_2) \wedge \neg E_{i_1-1}(x, b_2)\}, \\ p''(x) &:= p(x) \cup \{x > b_{s-1}\} \cup \{E_{i_{s-1}}(x, b_{s-1}) \wedge \neg E_{i_{s-1}-1}(x, b_{s-1})\}. \end{aligned}$$

В силу минимальности s выполняется $p', p'' \in S_1(\{b_2, \dots, b_{s-1}\})$. Так как $b_1 \in p'(M)$, $b_s, b''_s \in p''(M)$, то $p' \not\prec^w p''$. Ввиду вполне о-минимальности существуют $\{b_2, \dots, b_{s-1}\}$ -определимая биекция $f : p'(M) \rightarrow p''(M)$ и, следовательно, $b_s^0 \in p''(M)$ такие, что $b_s^0 \in \text{dcl}(\{b_1, b_2, \dots, b_{s-1}\})$.

СЛУЧАЙ 1: $i_1 < i_2 < \dots < i_{s-1}$. Рассмотрим следующее множество формул:

$$p_0(x) := p(x) \cup \{x < b_3\} \cup \{E_{i_2}(x, b_3) \wedge \neg E_{i_2-1}(x, b_3)\}.$$

Утверждаем, что $p_0 \in S_1(\{b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0\})$. Тогда $b_1, b_2 \in p_0(M)$ и $b_2 \in \text{dcl}(\{b_1, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0\})$. Следовательно, $\{b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0\}$ -определимая формула $\phi_1(x_1, x_2, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0)$ такая, что

$$M \models \phi_1(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0) \wedge \exists! y \phi_1(b_1, y, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0).$$

Пусть

$$\phi_n(x, y, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0) := \exists t [\phi_{n-1}(x, t, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0) \wedge \phi_1(t, y, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0)].$$

Рассмотрим для каждого $n \in \omega$ следующее множество формул:

$$p_0(x_1) \cup p_0(x_2) \cup p(x_3) \cup \dots \cup p(x_s) \cup \{x_1 < x_2 < \dots < x_s\} \cup \{\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_s)\}.$$

Оно локально совместно. Следовательно, число $(p_1, p_2, \dots, p_s)$ -типов бесконечно (где $p_i(x_i) := p(x_i)$), что противоречит почти ω -категоричности.

СЛУЧАЙ 2: $i_l = i_{l+1}$ для некоторого $1 \leq l \leq s-1$. Рассмотрим следующее множество формул:

$$p_0(x) := p(x) \cup \{x > b_l\} \cup \{x < b_{l+3}\} \cup \{E_{i_l}(x, b_l) \wedge \neg E_{i_l-1}(x, b_l)\}.$$

Утверждаем, что $p_0 \in S_1(\{b_1, \dots, b_l, b_{l+3}, \dots, b_{s-1}, b_s^0\})$. Тогда $b_{l+1}, b_{l+2} \in p_0(M)$ и

$$b_{l+2} \in \text{dcl}(\{b_1, \dots, b_l, b_{l+1}, b_{l+3}, \dots, b_{s-1}, b_s^0\}).$$

Отсюда аналогично получим противоречие почти ω -категоричности. $\square$

Следствие 4.4. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория и $p \in S_1(\emptyset)$ неалгебраический. Тогда p простой.

Лемма 4.5. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ неалгебраические и $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда для любых $a \in p_1(M)$, $b \in p_2(M)$ и $c_1, c_2 \in M$ таких, что $tp(\langle a, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c_2 \rangle / \emptyset)$, $tp(\langle b, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c_2 \rangle / \emptyset)$, имеем $tp(\langle a, b, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, b, c_2 \rangle / \emptyset)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $p_1 \not\perp^w p_2$, существует $\emptyset$ -определимая биекция $g : p_1(M) \rightarrow p_2(M)$, откуда существуют $b_0 \in p_2(M)$ и $a_0 \in p_1(M)$ такие, что $g(a) = b_0$ и $g^{-1}(b) = a_0$.

Допустим противное: существуют $a \in p_1(M)$, $b \in p_2(M)$ и $c_1, c_2 \in M$ такие, что $tp(\langle a, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c_2 \rangle / \emptyset)$, $tp(\langle b, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c_2 \rangle / \emptyset)$ и $tp(\langle a, b, c_1 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, c_2 \rangle / \emptyset)$. Тогда a, b, c_1 попарно алгебраически независимы над пустым множеством. Пусть $p'_1 := tp(a / \{b\})$, $p'_3 := tp(c_1 / \{b\})$. Поскольку $c_2 \in p'_3(M)$, получаем, что $p'_1 \not\perp^w p'_3$. Следовательно, существует $\{b\}$ -определимая биекция $f_b : p'_1(M) \rightarrow p'_3(M)$, откуда существует $c_0 \in p'_3(M)$ такой, что $f_b(a) = c_0$, т. е. $c_0 \in \text{dcl}(\{a, b\})$. Так как имеет место принцип замены для алгебраического замыкания, $c_0 \in \text{dcl}(\{b, b_0\}) \cap \text{dcl}(\{a, a_0\})$. Если $c_1 \in p_2(M)$, то получаем противоречие с тем, что p_2 простой. Аналогично можно понять, что $c_1 \notin p_1(M)$. Таким образом, существует неалгебраический тип $p_3 \in S_1(\emptyset)$ такой, что $c_1, c_2 \in p_3(M)$. Если $p_1 \perp^w p_3$, то рассмотрим $p''_1 := tp(a / \{c_0\})$. В силу слабой ортогональности p_1 и p_3 имеем $p''_1(M) = p_1(M)$. Поскольку $a, a_0 \in p''_1(M)$ и $c_0 \in \text{dcl}(a, a_0)$, получаем, что p''_1 не является простым. Поэтому предположим что $p_1 \not\perp^w p_3$. Тогда $p_2 \not\perp^w p_3$ и существуют $\emptyset$ -определимые биекции $t : p_1(M) \rightarrow p_3(M)$ и $r : p_2(M) \rightarrow p_3(M)$. Следовательно, существуют $c'_0, c''_0 \in p_3(M)$ такие, что $t(a) = c'_0$ и $r(b) = c''_0$, откуда $c_0 \in \text{dcl}(\{c'_0, c''_0\})$, и получаем противоречие с тем, что p_3 простой. $\square$

Лемма 4.6. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно и $p_1, p_2, p_3 \in S_1(A)$ неалгебраические. Тогда для любых $a, a' \in p_1(M)$, $b, b' \in p_2(M)$, $c, c' \in p_3(M)$ таких, что $tp(\langle a, b \rangle / A) =$

$tp(\langle a', b' \rangle / A), \quad tp(\langle a, c \rangle / A) = tp(\langle a', c' \rangle / A), \quad tp(\langle b, c \rangle / A) = tp(\langle b', c' \rangle / A)$, имеем $tp(\langle a, b, c \rangle / A) = tp(\langle a', b', c' \rangle / A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: предположим, что $tp(\langle a, b, c \rangle / A) \neq tp(\langle a', b', c' \rangle / A)$. Тогда по лемме 3.1 существует $c'' \in p_3(M)$ такой, что

$$tp(\langle a, c \rangle / A) = tp(\langle a, c'' \rangle / A), \quad tp(\langle b, c \rangle / A) = tp(\langle b, c'' \rangle / A)$$

и $tp(\langle a, b, c \rangle / A) \neq tp(\langle a, b, c'' \rangle / A)$. Если p_1, p_2, p_3 попарно слабо ортогональны, то имеем противоречие с леммой 3.6. Предположим что p_1, p_2, p_3 не являются попарно слабо ортогональными, скажем $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда получаем противоречие с леммой 4.5. $\square$

Лемма 4.7. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$ и $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ неалгебраические и $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда для любых $n_1, n_2 < \omega$ и для любых возрастающих

$$\bar{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n_1} \rangle, \quad \bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_{n_1} \rangle \in [p_1(M)]^{n_1}, \\ \bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n_2} \rangle, \quad \bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_{n_2} \rangle \in [p_2(M)]^{n_2}$$

таких, что $tp(\bar{a}/\emptyset) = tp(\bar{a}'/\emptyset)$, $tp(\bar{b}/\emptyset) = tp(\bar{b}'/\emptyset)$ и $tp(\langle a_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$ для всех i, j таких, что $1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2$, имеем $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по (n_1, n_2) . Шаг $(1, 1)$ тривиален. Предположим, что лемма установлена для всех (k_1, k_2) таких, что $(k_1, k_2) <_{\text{lex}} (n_1, n_2)$, и докажем ее для (n_1, n_2) . Допустим противное: предположим, что $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$. Тогда по лемме 3.1 существует $b''_{n_2} \in p_2(M)$ такой, что

$$tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset), \quad tp(\langle a_i, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_i, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$$

для всех $1 \leq i \leq n_1$ и $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$. Пусть $A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$. В силу индукционного предположения

$$tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_1}, b''_{n_2} \rangle / A), \quad tp(\langle b_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A),$$

$p'_1 := tp(a_{n_1}/A), p'_2 := tp(b_{n_2-1}/A)$. Если $tp(b_{n_2-1}/A) = tp(b_{n_2}/A)$, то $p'_1 \not\perp^w p'_2$, и тогда имеем противоречие с леммой 4.5. Предположим, что $tp(b_{n_2-1}/A) \neq tp(b_{n_2}/A)$, и пусть $p'_3 := tp(b_{n_2}/A)$. Тогда приходим к противоречию с леммой 4.6. $\square$

Теорема 4.8. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория. Тогда T бинарная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное натуральное число $s < \omega$, и пусть $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$ неалгебраические. Докажем индукцией по $(s; n_1, n_2, \dots, n_s)$, где $s \geq 2$, что для любых $n_1, n_2, \dots, n_s < \omega$ и для любых возрастающих $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}, \bar{a}_2, \bar{a}'_2 \in [p_2(M)]^{n_2}, \dots, \bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/\emptyset) = tp(\bar{a}'_1/\emptyset), tp(\bar{a}_2/\emptyset) = tp(\bar{a}'_2/\emptyset), \dots, tp(\bar{a}_s/\emptyset) = tp(\bar{a}'_s/\emptyset)$, для всех i_1, i_2, j, k таких, что $1 \leq i_1 < i_2 \leq s, 1 \leq j \leq n_{i_1}, 1 \leq k \leq n_{i_2}$, $tp(\langle a_{i_1 j}, a_{i_2 k} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_{i_1 j}, a'_{i_2 k} \rangle / \emptyset)$, имеем

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_s \rangle / \emptyset). \quad (*)$$

Рассмотрим случай $(2; n_1, n_2)$. Если $p_1 \perp^w p_2$, то по теореме 3.7 $\{p_1, p_2\}$ ортогонально над $\emptyset$, т. е. $(*)$ выполняется. Если $p_1 \not\perp^w p_2$, то $(*)$ следует из леммы 4.7.

Предположим, что теорема установлена для всех $(s; k_1, k_2, \dots, k_s) <_{\text{lex}} (s; n_1, n_2, \dots, n_s)$, и докажем ее для $(s; n_1, n_2, \dots, n_s)$. Допустим противное: предположим, что $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_s \rangle / \emptyset)$. В силу индукционного предположения $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_{s-1} \rangle / \emptyset)$. Тогда по лемме 3.1 существует $a''_{n_s} \in p_s(M)$ такой, что

$$tp(\langle \bar{a}_{n_s-1}, a_{n_s} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_{n_s-1}, a''_{n_s} \rangle / \emptyset), \quad tp(\langle a_{ij}, a_{n_s} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_{ij}, a''_{n_s} \rangle / \emptyset)$$

для всех $1 \leq i \leq s-1, 1 \leq j \leq n_i$ и

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, a_{n_s} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, a''_{n_s} \rangle / \emptyset).$$

Пусть $A := \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{s-3}, \bar{a}_{n_s-2-1}, \bar{a}_{n_s-1-1}, \bar{a}_{n_s-1}\}$. Тогда

$$tp(\langle a_{n_s-2}, a_{n_s-1}, a_{n_s} \rangle / A) \neq tp(\langle a_{n_s-2}, a_{n_s-1}, a''_{n_s} \rangle / A).$$

В силу индукционного предположения

$$tp(\langle a_{n_s-2}, a_{n_s} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_s-2}, a''_{n_s} \rangle / A), \quad tp(\langle a_{n_s-1}, a_{n_s} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_s-1}, a''_{n_s} \rangle / A).$$

Пусть $p'_{s-2} := tp(a_{n_s-2}/A)$, $p'_{s-1} := tp(a_{n_s-1}/A)$, $p'_s := tp(a_{n_s}/A)$. Ясно, что типы p'_{s-2} , p'_{s-1} и p'_s неалгебраические. Тогда по лемме 4.6 $tp(\langle a_{n_s-2}, a_{n_s-1}, a_{n_s} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_s-2}, a_{n_s-1}, a''_{n_s} \rangle / A)$; противоречие с предположением. $\square$

Заметим, что существует малая вполне о-минимальная теория, не являющаяся бинарной (пример 3.8).

Следствие 4.9. Пусть T — почти ω -категоричная вполне о-минимальная теория. Тогда любой неалгебраический $p \in S_1(\emptyset)$ имеет конечный ранг выпуклости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.8 T бинарная, откуда $RC(p) = RC_{\text{bin}}(p)$ для любого 1-типа p . В силу леммы 2.10 $RC(p) < \omega$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. P. 5435–5483.
2. Baizhanov B. S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // J. Symb. Log. 2001. V. 66. P. 1382–1414.
3. Кулпешов Б. Ш. Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2003. Т. 227. С. 26–31.
4. Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // Math. Logic Quart. 1998. V. 44, N 2. P. 161–166.
5. Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. Ч. 1, 2.
6. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Ann. Pure Appl. Logic. 2017. V. 168, N 1. P. 129–149.
7. Mayer L. L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // J. Symb. Log. 1988. V. 53. P. 146–159.
8. Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 6. С. 662–683.
9. Кулпешов Б. Ш. Максимальность счетного спектра в малых вполне о-минимальных теориях // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 2. С. 200–209.
10. Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 3. С. 413–424.
11. Woodrow R. E. Theories with a finite number of countable models and a small language: Ph. D. Thes. Simon Fraser Univ., 1976. 99 p.
12. Baizhanov B. S. One-types in weakly o-minimal theories // Proc. Informatics and Control Problems Institute. Almaty: Informatics and Control Problems Inst., 1996. P. 75–88.

13. Baizhanov B. S., Kulpeshov B. Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia: Proc. 9th Asian Logic Conf. Singapore: World Sci., 2006. P. 31–40.
14. Kulpeshov B. Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // J. Symb. Log. 1998. V. 63. P. 1511–1528.
15. Kulpeshov B. Sh. Countably categorical quite o-minimal theories // J. Math. Sci. 2013. V. 188, N 4. P. 387–397.
16. Kulpeshov B. Sh. Binary types in $\aleph_0$ -categorical weakly o-minimal theories // Math. Logic Quart. 2011. V. 57. P. 246–255.

Поступила в редакцию 19 сентября 2019 г.

После доработки 19 сентября 2019 г.

Принята к публикации 25 декабря 2019 г.

Алтаева Айжан Бакаткалиевна

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

пр. аль-Фараби, 71, Алматы 050040, Казахстан;

Институт математики и математического моделирования,

ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан,

`vip.altayeva@mail.ru`

Кулпешов Бейбут Шайыкович

Казахстанско-Британский технический университет,

ул. Толеби, 59, Алматы 050000, Казахстан;

Новосибирский государственный технический университет,

пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск 630073

`b.kulpeshov@kbtu.kz`