V. V. Aseev, Adherence of the images of points under multivalued quasimöbius mappings, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 499–512

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.302>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.87.193.239

April 26, 2023, 10:03:29

О ПРИМЫКАНИИ ОБРАЗОВ ТОЧЕК У МНОГОЗНАЧНЫХ КВАЗИМЁБИУСОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. В. Асеев

Аннотация. Продолжено изучение многозначных отображений со свойством BAD (bounded angular distortion), начатое в работах автора в 2018 г. С использованием техники ультрафильтров получено полное описание областей взаимного примыкания образов точек при отображениях класса BAD. Построен пример, иллюстрирующий все возможные случаи в общей формуле для области примыкания.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.302

Ключевые слова: многозначное отображение, мёбиусова структура, мёбиусово пространство, птолемеева полуметрика, квазиконформное отображение, квазимёбиусово отображение, фильтр, ультрафильтр.

Статья завершает исследование взаимного расположения образов точек при многозначных отображениях с обобщенным свойством квазимёбиусовости (свойство BAD), начатое автором в статьях 2018 г., и является непосредственным продолжением работы [1]. Учитывая, что история вопроса и его проблематика, мотивация к введению и изучению многозначных отображений со свойством BAD [1–5], а также их связь с квазимёбиусовыми отображениями [6] и отображениями с ограниченным искажением в смысле Ю. Г. Решетняка [7] достаточно освещены в [1], ограничимся здесь лишь списком основных определений и теорем, необходимых для понимания излагаемых результатов.

Введение

Согласно С. В. Буяло [8] *мёбиусовой структурой* на множестве X , содержащем не менее четырех точек, называется семейство $\mathcal{M}$ всех полуметрик на X , связанных отношением *мёбиусовой эквивалентности* $\rho \sim \sigma$, означающим, что

$$\frac{\rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4)}{\rho(x_1, x_3)\rho(x_2, x_4)} = \frac{\sigma(x_1, x_2)\sigma(x_3, x_4)}{\sigma(x_1, x_3)\sigma(x_2, x_4)}$$

для любой *тетрады* (т. е. четверки попарно различных точек) в X . Пару $(X, \mathcal{M})$ называем *мёбиусовым пространством*. Если хотя бы одна (а значит, любая) полуметрика $\rho \in \mathcal{M}$ удовлетворяет *неравенству Птолемея*

$$\rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4) + \rho(x_1, x_4)\rho(x_2, x_3) \geq \rho(x_1, x_3)\rho(x_2, x_4),$$

Работа выполнена при поддержке бюджетной темы НИР (номер проекта 0314–2019–0007).

то мёбиусово пространство $(X, \mathcal{M})$ называем *птолемеевым*. Все рассматриваемые в этой статье метрики и полуметрики считаются по умолчанию птолемеевыми. Как показано в [3, теорема 1.4], в любой птолемеевой структуре $\mathcal{M}$ имеется ограниченная метрика $\rho \in \mathcal{M}$, $\rho(\cdot, \cdot) \leq 1$. При этом все метрики из $\mathcal{M}$ порождают одну и ту же топологию в X (см. [4, утверждение 1.2]), которую называем *метрической топологией* в птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ и по умолчанию считаем, что X наделено именно этой топологией. В птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ *птолемеева характеристика тетрады*

$$\alpha(a_1, a_2; b_1, b_2) := \frac{\rho(a_1, a_2)\rho(b_1, b_2)}{\rho(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2) + \rho(a_1, b_2)\rho(a_2, b_1)} \leq 1$$

не зависит от выбора полуметрики $\rho \in \mathcal{M}$, т. е. является *мёбиусово инвариантной* величиной. *Обобщенным углом* называем любую четверку множеств $\Psi = (A_1, A_2; B_1, B_2)$, у которой $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$ и $B_1 \cup B_2$ содержит две различные точки. *Величиной обобщенного угла* $\Psi = (A_1, A_2; B_1, B_2)$ в птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ является число

$$\alpha(\Psi) = \alpha(A_1, A_2; B_1, B_2) := \inf_{a_1 \in A_1; a_2 \in A_2} \left(\sup_{b_1 \in B_1; b_2 \in B_2} \alpha(a_1, a_2; b_1, b_2) \right) \leq 1,$$

не зависящее от выбора полуметрики $\rho \in \mathcal{M}$. Тетрада $(a_1, a_2; b_1, b_2)$ рассматривается как частный случай обобщенного угла.

Многозначное отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ называем *гиперинъективным*, если $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (F(x_1) \cap F(x_2) = \emptyset)$. Гиперинъективное отображение переводит обобщенные углы в обобщенные углы.

В птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{M}')$ гиперинъективное отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ обладает *свойством* BAD (bounded angular distortion), если существует положительная неубывающая функция $\eta : (0, 1] \rightarrow R_+$ (*контрольная функция*), при которой

$$\alpha(F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2)) \geq \eta(\alpha(a_1, a_2; b_1, b_2))$$

для любой тетрады $(a_1, a_2; b_1, b_2)$ в X . В этом случае также используем запись $F \in \eta$ -BAD. Заметим, что если две контрольные функции $\eta_1 : (0, 1] \rightarrow R_+$ и $\eta_2 : (0, 1] \rightarrow R_+$ связаны соотношением $\eta_2(t) \leq \eta_1(t)$ при всех $t \in (0, 1]$, то из $F \in \eta_1$ -BAD следует $F \in \eta_2$ -BAD. Поэтому, заменив $\eta(t)$ функцией $\min\{\eta(t), 1\}$, можно без нарушения общности считать, что контрольная функция η в формуле $F \in \eta$ -BAD удовлетворяет неравенству $\eta(t) \leq 1$ при всех $t \in (0, 1]$.

§ 1. Некоторые свойства отображений класса BAD

Непустые непересекающиеся множества A, B в метрическом пространстве (X, ρ) *примыкают друг к другу*, если $\inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} = 0$.

1.1. Утверждение [1, утверждение 2.4]. *Если непустые непересекающиеся множества $A, B \subset X$ в птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ примыкают друг к другу в некоторой метрике из $\mathcal{M}$, то они примыкают друг к другу в любой ограниченной метрике из $\mathcal{M}$.*

Образ точки при многозначном отображении будем называть *толстой точкой*.

1.2. Теорема [3, теорема 6.1]. Пусть $F : X \rightarrow 2^Y$ — многозначное отображение класса BAD в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$ и $(Y, \mathcal{M}')$. Тогда для любой метрики $\sigma \in \mathcal{M}'$ реализуется одна из следующих ситуаций:

- (I) в Y нет толстых точек, примыкающих друг к другу;
- (II) существует пара $F(p), F(q) \subset Y$ толстых точек, не примыкающих друг к другу и таких, что любая толстая точка, отличная от $F(q)$ и $F(p)$, примыкает к $F(p)$;
- (III) все толстые точки в Y примыкают друг к другу.

Свойство примыкания толстых точек не является мёбиусово инвариантным, но оно не зависит от выбора ограниченной метрики в мёбиусовой структуре $(Y, \mathcal{M}')$. При этом альтернатива (I)–(III) остается справедливой при любой метрике (даже неограниченной) из $\mathcal{M}'$.

1.3. Теорема [3, теорема 6.2]. Пусть $F : X \rightarrow 2^Y$ — многозначное отображение класса BAD в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M})$ и $(Y, \mathcal{M}')$. Тогда для левого обратного отображения $f : F(X) \rightarrow X$ в любой точке $y_0 \in F(X)$ реализуется одна из ситуаций:

- (I) отображение f непрерывно в точке y_0 ;
- (II) в любой сколь угодно малой окрестности точки y_0 отображение f принимает все значения из X , кроме, может быть, одного.

Стоит заметить, что поведение функции f в этой теореме аналогично поведению аналитической функции в окрестности изолированной особой точки.

Ситуация (I) в теореме 1.2 подробно изучена в [1]. В частности, получена

1.4. Теорема [1, теоремы 3.2, 3.5]. Пусть птолемеево мёбиусово пространство $(Y, \mathcal{M}')$ компактно в своей метрической топологии, многозначное отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ птолемеева мёбиусова пространства $(X, \mathcal{M})$ обладает свойством ω -BAD и все толстые точки замкнуты в Y . Тогда

- (i) для любой точки $x_0 \in X$ и любой открытой окрестности V толстой точки $F(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $F(U) \subset V$;
- (ii) если x_0 — предельная точка в X , то существует топологический предел $L(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \neq x_0} F(x) \subset F(x_0)$; кроме того, для любой метрики $\sigma \in \mathcal{M}'$ и инверсной метрики $h(z, w) := \sigma(z, w) / (\sigma(z, q)\sigma(w, q))$ с полюсом $q \in F(X) \setminus F(x_0)$ в любой точке $p \in F(x_0)$ справедлива оценка

$$\text{dist}_h(p, L(x_0)) \leq \text{diam}_h(L(x_0)) / (2\omega(1));$$

отображение $F^0(x) = \{F(x) \text{ в изолированной точке}; L(x) \text{ в предельной точке}\}$ имеет свойство ω -BAD с той же контрольной функцией ω .

В данной статье исследованы ситуации (II) и (III) в теореме 1.2 и дано полное описание характера примыкания толстых точек в общем случае.

§ 2. Области примыкания

Изучение примыкания толстых точек к фиксированной толстой точке $A = F(x)$ будет проведено в терминах ультрафильтров на множестве A .

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на множестве X , содержащем непустые подмножества A и B , задана метрика ρ . Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $U_\rho^\varepsilon(A; B) := \{x \in A : \rho(x, B) < \varepsilon\}$. Если B примыкает к A в метрике ρ , то семейство подмножеств $(U_\rho^\varepsilon(A; B))_{\varepsilon > 0}$ образует базис фильтра $R_\rho(A; B)$ в A . *Областью примыкания* множества B к множеству A назовем семейство $\mathcal{N}_\rho(A; B)$

всех ультрафильтров в A , мажорирующих фильтр $R_\rho(A; B)$. При этом полагаем $\mathcal{N}_\rho(A; B) = \emptyset$ в том и только в том случае, когда B не примыкает к A .

2.2. Лемма. Пусть $(X, \mathcal{M})$ — птолемеева мёбиусова структура и непустые подмножества $A, B \subset X$ примыкают друг к другу в некоторой метрике $\rho \in \mathcal{M}$. Тогда (см. [1, утверждение 2.4]) они примыкают друг к другу в любой ограниченной метрике из $\mathcal{M}$. При этом для любых ограниченных метрик $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{N}_{\rho_1}(A; B) = \mathcal{N}_{\rho_2}(A; B), \quad (2.2.1)$$

т. е. область примыкания $\mathcal{N}(A; B) := \mathcal{N}_\rho(A; B)$ не зависит от выбора ограниченной метрики $\rho \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, нашлось такое $\delta > 0$, что для любого натурального $n \in \mathbf{N}$ имеется точка $x_n \in U_{\rho_1}^{1/n}(A; B) \setminus U_{\rho_2}^\delta(A; B)$. Последовательность $\{x_n\}$ образует множество $A_0 \subset A$, не примыкающее к B в метрике ρ_2 . Тогда в силу [1, утверждение 2.4] A_0 не примыкает к B и в метрике ρ_1 . Это противоречит тому, что $\rho_1(x_n, B) < 1/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, найдется такой номер $n(\delta) \in \mathbf{N}$, что при всех $n > n(\delta)$ справедливо включение $U_{\rho_1}^{1/n}(A; B) \subset U_{\rho_2}^\delta$, и это означает, что всякое множество из базиса фильтра $R_{\rho_2}(A; B)$ содержит множество из базиса фильтра $R_{\rho_1}(A; B)$, т. е. (см. [9, гл. 1, § 6.3, предложение 4]) фильтр $R_{\rho_1}(A; B)$ мажорирует фильтр $R_{\rho_2}(A; B)$. Так как ограниченные метрики ρ_1 и ρ_2 в этом рассуждении равноправны, фильтр $R_{\rho_2}(A; B)$ мажорирует фильтр $R_{\rho_1}(A; B)$. Значит, эти фильтры совпадают, поэтому $\mathcal{N}_{\rho_1}(A; B) = \mathcal{N}_{\rho_2}(A; B)$. Лемма доказана.

Наиболее простую ситуацию демонстрирует

2.3. Утверждение. Пусть X компактно в метрической топологии, порожденной птолемеевой мёбиусовой структурой на X , и непустые множества $A, B \subset X$ примыкают друг к другу. Тогда область примыкания $\mathcal{N}(A; B)$ состоит из всех ультрафильтров в A , имеющих предел в $\bar{A} \cap \bar{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу компактности X множество $\bar{A} \cap \bar{B}$ непустое. Покажем, что любой фильтр $\mathbf{F}$ в A , мажорирующий фильтр $R(A; B)$, имеет точку прикосновения в $\bar{A} \cap \bar{B}$. Действительно, в противном случае каждая точка $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, не будучи точкой прикосновения для $\mathbf{F}$, имела бы окрестность $U(x)$, не пересекающуюся с некоторым множеством $F(x) \in \mathbf{F}$. Взяв конечное покрытие $\{U(x_j) : j = 1, \dots, m\}$ компактного множества $\bar{A} \cap \bar{B}$, получим элемент $F = \bigcap_{j=1}^m F(x_j) \in \mathbf{F}$, который не пересекается с $U = \bigcup_{j=1}^m U(x_j)$ — окрестностью множества $\bar{A} \cap \bar{B}$. Но $\mathbf{F}$ мажорирует $R(A, B)$ и должен содержать множество $U \cap A$, в частности $(U \cap A) \subset F$, что противоречит $F \cap U = \emptyset$.

В частности, любой ультрафильтр $\mathbf{F} \in \mathcal{N}(A; B)$ имеет точку прикосновения (а значит, и предел, см. [9, гл. 1, § 7, следствие]) в $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Обратно, если $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, то любой ультрафильтр $\mathbf{F}$ в A , имеющий предел x , мажорирует фильтр, порожденный системой окрестностей точки x в A . Значит, он мажорирует фильтр $R(A; B)$, т. е. $\mathbf{F} \in \mathcal{N}(A; B)$.

Утверждение доказано.

2.4. Утверждение. Пусть непустые множества A, B, C в птолемеевом мёбиусовом пространстве $(X, \mathcal{M})$ таковы, что $\mathcal{N}(A; B) \neq \emptyset \neq \mathcal{N}(A; C)$. Тогда

$$(\mathcal{N}(B; C) = \emptyset) \Rightarrow (\mathcal{N}(A; B) \cap \mathcal{N}(A; C) = \emptyset). \quad (2.4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем ограниченную метрику $\rho \in \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{N}(B; C) = \emptyset$. Тогда $\delta = \inf\{\rho(u, v) : u \in B, v \in C\} > 0$. Множества $U_\rho^{\delta/3}(A; B)$ и $U_\rho^{\delta/3}(A; C)$ не пересекаются, ибо в противном случае для их общей точки x нашлись бы такие $u \in B$ и $v \in C$, что $\rho(x, u) < \delta/3$ и $\rho(x, v) < \delta/3$, и это привело бы к противоречию: $\rho(u, v) \leq \rho(u, x) + \rho(x, v) < 2\delta/3 < \delta$. Так как $U_\rho^{\delta/3}(A; B) \in R(A; B)$ и $U_\rho^{\delta/3}(A; C) \in R(A; C)$, не существует фильтра (и ультрафильтра), мажорирующего оба фильтра $R(A; B)$ и $R(A; C)$. Это означает, что области примыкания $\mathcal{N}(A; B)$ и $\mathcal{N}(A; C)$ не могут иметь общего элемента. Утверждение доказано.

§ 3. Структура области примыкания толстых точек

В этом параграфе $(X, \mathcal{M}')$ и $(Y, \mathcal{M})$ — птолемеевы мёбиусовы пространства и отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ обладает свойством η -BAD.

3.1. Лемма. Если для попарно различных точек $a, b, c, d \in X$ и их образов $A = F(a)$, $B = F(b)$, $C = F(c)$, $D = F(d)$ области примыкания $\mathcal{N}(A; B)$ и $\mathcal{N}(A; D)$ непусты, то

$$\mathcal{N}(A; B) \setminus \mathcal{N}(A; C) = \mathcal{N}(A; D) \setminus \mathcal{N}(A; C). \quad (3.1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для случая (1а) $\mathcal{N}(A; C) \neq \emptyset$ и случая (2а) $\mathcal{N}(A; C) = \emptyset$, отмечая те пункты, где требуется различать эти случаи.

Фиксируем ограниченную метрику $\sigma \in \mathcal{M}$. Толстые точки B, D в (3.1.1) равноправны, поэтому достаточно установить включение

$$\mathcal{N}(A; B) \setminus \mathcal{N}(A; C) \subset \mathcal{N}(A; D) \setminus \mathcal{N}(A; C) \quad (3.1.2)$$

в случае (1а) и включение

$$\mathcal{N}(A; B) \subset \mathcal{N}(A; D) \quad (3.1.2')$$

в случае (2а).

Допустим от противного, что на множестве A имеется ультрафильтр $\mathbf{Z}$, мажорирующий $R_\sigma(A; B)$, но не мажорирующий фильтр $R_\sigma(A; D)$ (а также не мажорирующий фильтр $R_\sigma(A; C)$ в случае (1а)).

Фраза «фильтр $\mathbf{Z}$ не мажорирует фильтр $R_\sigma(A; D)$ » означает, что существует элемент $U_\sigma^{\delta'}(A; D) = \{u \in A : \sigma(u, D) < \delta'\}$ базиса фильтра $R_\sigma(A; D)$, не входящий в $\mathbf{Z}$. Так как $\mathbf{Z}$ — ультрафильтр, дополнение в A к этому элементу (т. е. множество $\{u \in A : \sigma(u, D) \geq \delta'\}$) входит в $\mathbf{Z}$ (см. [9, гл. 1, § 6.4, предложение 5]). Аналогично фраза «ультрафильтр $\mathbf{Z}$ не мажорирует фильтр $R_\sigma(A; C)$ » (в случае (1а)) означает, что для некоторого $\delta'' > 0$ множество $\{u \in A : \sigma(u, C) \geq \delta''\}$ принадлежит $\mathbf{Z}$. В случае (2а) толстые точки A и C не примыкают друг к другу и в качестве δ'' можно взять $\delta'' = \inf\{\sigma(u, v) : u \in A, v \in C\} > 0$. Положим $\delta_0 = \min\{\delta', \delta''\} > 0$. Тогда из соотношений

$$\{u \in A : \sigma(u, C) \geq \delta''\} \subset \{u \in A : \sigma(u, C) \geq \delta_0\} \in \mathbf{Z} \quad \text{в случае (1а),}$$

$$\{u \in A : \sigma(u, D) \geq \delta'\} \subset A = \{u \in A : \sigma(u, C) \geq \delta_0\} \in \mathbf{Z} \quad \text{в случае (2а)}$$

и

$$\{u \in A : \sigma(u, D) \geq \delta'\} \subset \{u \in A : \sigma(u, D) \geq \delta_0\} \in \mathbf{Z}$$

следует, что в обоих случаях (1а) и (2а)

$$\{u \in A : \sigma(u, C \cup D) \geq \delta_0\} \in \mathbf{Z}. \quad (3.1.3)$$

Фраза «ультрафильтр $\mathbf{Z}$ мажорирует фильтр $R_\sigma(A; B)$ » означает, что при любом $\varepsilon > 0$ элемент $\{u \in A : \sigma(u, B) < \varepsilon\}$ базиса фильтра $R_\sigma(A; B)$ принадлежит $\mathbf{Z}$. С учетом (3.1.3) при любом $\varepsilon > 0$ множество

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &:= \{u \in A : \sigma(u, B) < \varepsilon\} \cap \{u \in A : \sigma(u, D \cup C) \geq \delta_0\} \\ &= \{u \in A : \sigma(u, B) < \varepsilon, \sigma(u, D \cup C) \geq \delta_0\} \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

непустое. Значит, при любом $\varepsilon > 0$ имеются точки $u_1^{(\varepsilon)} \in A$ и $u_2^{(\varepsilon)} \in B$, у которых $\sigma(u_1^{(\varepsilon)}, u_2^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$, но $\sigma(u_1^{(\varepsilon)}, C \cup D) \geq \delta_0$. В частности, для любых $v_1 \in C$, $v_2 \in D$ выполняются оценки $\sigma(u_1^{(\varepsilon)}, v_1) \geq \delta_0$, $\sigma(u_1^{(\varepsilon)}, v_2) \geq \delta_0$ и неравенство

$$\begin{aligned} \alpha(u_1^{(\varepsilon)}, u_2^{(\varepsilon)}; v_1, v_2) &= \frac{\sigma(u_1^{(\varepsilon)}, u_2^{(\varepsilon)})\sigma(v_1, v_2)}{\sigma(u_1^{(\varepsilon)}, v_1)\sigma(u_2^{(\varepsilon)}, v_2) + \sigma(u_1^{(\varepsilon)}, v_2)\sigma(u_2^{(\varepsilon)}, v_1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta_0} \cdot \frac{\sigma(v_1, v_2)}{\sigma(u_2^{(\varepsilon)}, v_1) + \sigma(u_2^{(\varepsilon)}, v_2)} \leq \frac{\varepsilon}{\delta_0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{v_1 \in C; v_2 \in D} \alpha(u_1^{(\varepsilon)}, u_2^{(\varepsilon)}; v_1, v_2) \leq \varepsilon/\delta_0$$

и для образа $F(\Psi) = (A, B; C, D)$ тетрады $\Psi = (a, b; c, d)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \alpha(F(\Psi)) &= \inf_{u_1 \in A; u_2 \in B} \left(\sup_{v_1 \in C; v_2 \in D} \alpha(u_1, u_2; v_1, v_2) \right) \\ &\leq \sup_{v_1 \in C; v_2 \in D} \alpha(u_1^{(\varepsilon)}, u_2^{(\varepsilon)}; v_1, v_2) \leq \varepsilon/\delta_0, \end{aligned}$$

выполняющуюся при любом $\varepsilon > 0$. Но это противоречит свойству η -BAD отображения F , согласно которому $\alpha(F(\Psi)) \geq \eta(\alpha(\Psi)) > 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теперь можно существенно уточнить ситуацию (II) в теореме 1.2.

3.2. Теорема. Пусть в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M}')$ и $(Y, \mathcal{M})$ задано отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ со свойством BAD. Пусть в некоторой ограниченной метрике $\sigma \in \mathcal{M}'$ имеются толстые точки, примыкающие друг к другу, и толстые точки, не примыкающие друг к другу. Тогда возможны только две ситуации:

(II.a) имеется единственная толстая точка Q , не примыкающая ни к одной из остальных толстых точек, при этом для любых попарно различных толстых точек P, A, B , отличных от Q , $\mathcal{N}(A; B) \neq \emptyset$ и

$$\mathcal{N}(P; A) = \mathcal{N}(P; B) \neq \emptyset; \quad (3.2.1)$$

(II.b) имеется единственная пара не примыкающих друг к другу толстых точек P и Q , при этом для любой пары различных толстых точек A и B , отличных от P и Q , $\mathcal{N}(A; B) \neq \emptyset$ и выполняются равенства (3.2.1) и

$$\mathcal{N}(Q; A) = \mathcal{N}(Q; B) \neq \emptyset. \quad (3.2.2)$$

Доказательство. Так как реализуется ситуация (II) в теореме 1.2, существуют толстые точки P и Q , не примыкающие друг к другу и такие, что любая другая толстая точка примыкает к P . Тогда для любых толстых точек A и B ,

отличных от Q , $\mathcal{N}(P; A) \neq \emptyset \neq \mathcal{N}(P; B)$ и $\mathcal{N}(P; Q) = \emptyset$. Лемма 3.1 дает равенство (3.2.1)

$$\mathcal{N}(P; A) = \mathcal{N}(P; A) \setminus \mathcal{N}(P; Q) = \mathcal{N}(P; B) \setminus \mathcal{N}(P; Q) = \mathcal{N}(P; B),$$

а утверждение 2.4 — соотношение $\mathcal{N}(A; B) \neq \emptyset$.

Итак, все толстые точки, отличные от Q , примыкают друг к другу. Если ни одна из них не примыкает к Q , то реализуется ситуация (II.a).

Рассмотрим случай, когда имеется толстая точка A , отличная от P , Q и примыкающая к Q . Тогда $\mathcal{N}(A; Q) \neq \emptyset \neq \mathcal{N}(A; P)$, и лемма 3.1 дает равенство

$$\mathcal{N}(A; P) \setminus \mathcal{N}(A; B) = \mathcal{N}(A; Q) \setminus \mathcal{N}(A; B).$$

Так как в силу утверждения 2.4 $\mathcal{N}(A; P) \cap \mathcal{N}(A; Q) = \emptyset$, это равенство возможно лишь в том случае, когда $\mathcal{N}(A; P) \subset \mathcal{N}(A; B)$ и

$$\emptyset \neq \mathcal{N}(A; Q) \subset \mathcal{N}(A; B). \quad (3.2.3)$$

Предположение $\mathcal{N}(B; Q) = \emptyset$ приводит в силу утверждения 2.4 к равенству $\mathcal{N}(A; B) \cap \mathcal{N}(A; Q) = \emptyset$, противоречащему (3.2.3). Значит, любая толстая точка B , отличная от P и Q , примыкает как к P , так и к Q . При этом по лемме 3.1

$$\mathcal{N}(Q; A) \setminus \mathcal{N}(Q; P) = \mathcal{N}(Q; B) \setminus \mathcal{N}(Q; P)$$

и в силу равенства $\mathcal{N}(Q; P) = \emptyset$ получаем (3.2.2). Заметим, что в этом случае P и Q — единственная пара толстых точек, не примыкающих друг к другу, и точки P , Q в этой паре равноправны. Таким образом, реализуется ситуация (II.b).

Теорема доказана.

Теперь можно снять в лемме 3.1 ограничение $\mathcal{N}(A; B) \neq \emptyset \neq \mathcal{N}(A; D)$.

3.3. Лемма. Равенство

$$\mathcal{N}(A; B) \setminus \mathcal{N}(A; C) = \mathcal{N}(A; D) \setminus \mathcal{N}(A; C) \quad (3.3.1)$$

выполняется для любых попарно различных толстых точек A, B, C, D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 3.1 осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{N}(A; B) = \emptyset$ или $\mathcal{N}(A; D) = \emptyset$. Так как B и D в (3.3.1) равноправны, достаточно ограничиться случаем $\mathcal{N}(A; D) = \emptyset$. Тогда требуемое равенство (3.3.1) имеет вид

$$\mathcal{N}(A; B) \setminus \mathcal{N}(A; C) = \emptyset \quad (3.3.2)$$

и тривиально верно при $\mathcal{N}(A; B) = \emptyset$.

Пусть теперь $\mathcal{N}(A; B) \neq \emptyset$. Среди толстых точек A, B, C, D есть пара A, B примыкающих друг к другу и пара A, D не примыкающих друг к другу толстых точек, т. е. выполнены условия теоремы 3.2 с $P = A$, $Q = D$. По этой теореме все толстые точки, отличные от D , примыкают к A и имеют в A совпадающие области примыкания, т. е. $\mathcal{N}(A; B) = \mathcal{N}(A; C)$ — требуемое равенство (3.3.2).

Лемма доказана.

Основным результатом данной статьи является

3.4. Теорема. Пусть в птолемеевых мёбиусовых пространствах $(X, \mathcal{M}')$ и $(Y, \mathcal{M})$ задано отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ со свойством ВАД. Тогда для любой точки $a \in X$ справедлива формула

$$\bigcup_{x \in X \setminus \{a\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} \left(\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \right). \quad (3.4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить включение

$$\bigcup_{x \in X \setminus \{a\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \subset \bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} \left(\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \right), \quad (3.4.2)$$

так как обратное включение очевидно.

Для толстой точки C , отличной от $A = F(a)$, и ультрафильтра $\mathbf{Z} \in \mathcal{N}(A; C)$ возможны две ситуации.

(b1) $\mathbf{Z} \in \mathcal{N}(A; F(x))$ для любой толстой точки $F(x)$, отличной от A . Тогда (см. [10, гл. II, § 4.3, предложение 2])

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} \in \bigcap_{x \in X \setminus \{a\}} \mathcal{N}(A; F(x)) &= \bigcap_{b \in X \setminus \{a\}} \left(\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(A; F(x)) \right) \\ &\subset \bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} \left(\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(A; F(x)) \right). \end{aligned}$$

(b2) Имеется толстая точка $B = F(b) \neq A$, для которой $\mathbf{Z} \notin \mathcal{N}(A; B)$. Так как $\mathbf{Z} \in \mathcal{N}(A; C) \setminus \mathcal{N}(A; B)$, (по лемме 3.3) $\mathbf{Z} \in \mathcal{N}(A; F(x)) \setminus \mathcal{N}(A; B)$ для любой толстой точки $F(x)$, отличной от A и B , т. е.

$$\mathbf{Z} \in \bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(A; F(x)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{Z} \in \bigcup_{X \setminus \{a\}} \left(\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(A; F(x)) \right).$$

В силу произвольного выбора толстой точки C с непустым $\mathcal{N}(A; C)$ и ультрафильтра $\mathbf{Z} \in \mathcal{N}(A; C)$ включение (3.4.2) справедливо и в этой ситуации.

Теорема доказана.

В семействе всех ультрафильтров на множестве $A = F(a)$, $a \in X$, полученная формула (3.4.1) позволяет изобразить область примыкания толстой точки A к остальным толстым точкам в виде цветка «ромашки». Множество ультрафильтров

$$S_a := \bigcap_{b \in X \setminus \{a\}} \left(\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \right) = \bigcap_{x \in X \setminus \{a\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \quad (3.4.3)$$

образует «сердцевину ромашки». Каждой точке $b \in X \setminus \{a\}$ соответствует «лепесток ромашки», образованный множеством ультрафильтров

$$L_{a,b} := \left(\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \right) \setminus \mathcal{N}(F(a); F(b)). \quad (3.4.4)$$

При этом область примыкания (3.4.1) есть дизъюнктное объединение

$$\bigcup_{x \in X \setminus \{a\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \left(\bigsqcup_{b \in X \setminus \{a\}} L_{a,b} \right) \sqcup S_a, \quad (3.4.5)$$

в котором множества могут быть пустыми.

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (3.4.3) следует из того, что X содержит более двух точек, поэтому $X \setminus \{a\} = \bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} (X \setminus \{a, b\})$. Остается применить формулу для пересечений в [10, гл. 2, § 4.2, предложение 2].

§ 4. Пример

Построим пример, демонстрирующий возможность реализации любой из возможных комбинаций в формуле (3.4.5) для области примыкания.

Пусть множество X содержит не менее четырех точек. Добавив к нему «внешнюю» точку θ , отметим некоторое непустое подмножество $J \subset X^* := X \sqcup \{\theta\}$. Обозначив через $\mathbf{N}$ множество натуральных чисел, рассмотрим прямое произведение $Y := X \times \mathbf{N} \times J$, точки которого записываем в виде $x_{n,j}$, где $x \in X$, $n \in \mathbf{N}$, $j \in J$. Многочисленное гиперинъективное отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ задаем формулой $F(x) = \{x\} \times \mathbf{N} \times J$.

Для $n \in \mathbf{N}$ и $j \in J$ на множестве X введем полуметрики

$$\rho_{n,j}(x, y) := \begin{cases} 1/n & \text{при } j \notin \{x, y\}, x \neq y, \\ 1 & \text{при } j \in \{x, y\}, x \neq y, \end{cases}$$

и рассмотрим на Y полуметрику σ , заданную формулой

$$\sigma(x_{n,j}, y_{m,i}) := \begin{cases} 1 & \text{при } (n, j) \neq (m, i); x, y \in X; x \neq y, \\ \rho_{n,j}(x, y) & \text{при } m = n, j = i \in J; x, y \in X. \end{cases}$$

Непосредственная (но кропотливая) проверка показывает, что σ является птолеевой метрикой на Y , при этом для любой тетрады $(a, b; c, d)$ в X выполняется оценка

$$\alpha(F(a), F(b); F(c), F(d)) \geq 1/2 \geq (1/2)\alpha(a, b; c, d)$$

при любой птолеевой метрике ρ в X . Таким образом, отображение $F : X \rightarrow 2^Y$ имеет свойство η -BAD с контрольной функцией $\eta(t) = t/2$.

Фиксируем $a \in X$ и найдем в толстой точке $F(a)$ области примыкания к ней остальных толстых точек $F(x)$, $x \in X \setminus \{a\}$, в зависимости от задания непустого множества $J \subset X \sqcup \{\theta\}$. Все дальнейшие утверждения в этом параграфе относятся только к рассматриваемому примеру.

4.1. Утверждение. Толстая точка $F(x)$ примыкает к $F(a)$ в том и только в том случае, когда $J \setminus \{a, x\} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует $j' \in J \setminus \{a, x\}$, то

$$\inf_{n, m \in \mathbf{N}} (\inf_{j, i \in J} \sigma(a_{n,j}, x_{m,i})) = \inf_{n \in \mathbf{N}} (\inf_{j \in J} \rho_{n,j}(a, x)) \leq \inf_{n \in \mathbf{N}} \rho_{n,j'}(a, x) = \inf_n (1/n) = 0$$

и $F(x)$ примыкает к $F(a)$.

Если $J \setminus \{a, x\} = \emptyset$, то

$$\inf_{n, m \in \mathbf{N}} (\inf_{j, i \in J} \sigma(a_{n,j}, x_{m,i})) = \inf_{n \in \mathbf{N}} (\inf_{j \in J} \rho_{n,j}(a, x)) = \inf_{n \in \mathbf{N}} (1) = 1$$

и $F(x)$ не примыкает к $F(a)$. Утверждение доказано.

Для непустого подмножества $T \subset J \setminus \{a\}$ обозначаем через $\mathcal{N}_T$ множество всех ультрафильтров в $F(a)$, мажорирующих фильтр R_T с базисом $(\{a\} \times \{n : n > k\} \times T)_{k=1,2,\dots}$. В случае бесконечного множества J символом $\mathcal{N}_{\{\infty\}}$ обозначаем множество всех ультрафильтров в $F(a)$, мажорирующих фильтр R_{∞} , базисом которого служит семейство множеств вида $\{a\} \times \{n : n > k\} \times (J \setminus K)$, где $k \in \mathbf{N}$ и $K \subset J$ — произвольное конечное подмножество.

4.2. Утверждение. Если $x \in X \setminus \{a\}$ и $J \setminus \{a, x\} \neq \emptyset$, то базис фильтра $R_\sigma(F(a); F(x))$ образован множествами

$$U_\sigma^{1/k}(F(a); F(x)) = \{a\} \times \{n : n > k\} \times (J \setminus \{a, x\})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{N}(F(a); F(x)) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a, x\}}. \quad (4.2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 4.1 толстая точка $F(x)$ примыкает к $F(a)$, поэтому множества в (4.2.1) непустые. Базис фильтра $R_\sigma(F(a); F(x))$ в $F(a)$ образован множествами

$$\begin{aligned} U_\sigma^{1/k}(F(a); F(x)) &= \{a_{n,j} : \sigma(a_{n,j}, F(x)) < 1/k\} \\ &= \{a_{n,j} : (\exists(m, i)) \sigma(a_{n,j}, x_{m,i}) < 1/k\} \\ &= \{a_{n,j} : \sigma(a_{n,j}, x_{n,j}) = \rho_{n,j}(a, x) = 1/n < 1/k\} \\ &= \{a_{n,j} : n > k, j \in J \setminus \{a, x\}\} = \{a\} \times \{n : n > k\} \times (J \setminus \{a, x\}). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

4.3. Утверждение. Пусть $\emptyset \neq T \subset J$ и реализуется один из следующих случаев:

(v1) T — конечное множество;

(v2) T — бесконечное множество, но $J \setminus T$ — конечное множество.

Тогда

$$\mathcal{N}_T = \left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{N}_{\{t\}} \right) \sqcup \begin{cases} \emptyset & \text{в случае (v1),} \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}} & \text{в случае (v2),} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

и если T не является одноточечным множеством, т. е. $\#(T) \geq 2$, то

$$\left(\bigcap_{t \in T} \mathcal{N}_{T \setminus \{t\}} \right) = \begin{cases} \emptyset & \text{в случае (v1),} \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}} & \text{в случае (v2).} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент $\{a\} \times \{n : n > k\} \times \{z\}$ базиса фильтра $R_{\{z\}}$ не пересекается с элементами $\{a\} \times \{n : n > k\} \times \{w\}$ (при $w \neq z$) и $\{a\} \times \{n : n > k\} \times (J \setminus \{z\})$ (в случае (v2)) базисов фильтров $R_{\{w\}}$ и R_∞ соответственно. Поэтому не существует ультрафильтра, мажорирующего оба фильтра $R_{\{z\}}$ и $R_{\{w\}}$ или оба фильтра $R_{\{z\}}$ и R_∞ , т. е. $\mathcal{N}_{\{z\}} \cap \mathcal{N}_{\{w\}} = \emptyset$ при $z \neq w$ и $\mathcal{N}_{\{z\}} \cap \mathcal{N}_{\{\infty\}} = \emptyset$ в случае (v2). Таким образом, все множества в правой части (4.3.1) попарно не пересекаются и их объединение является дизъюнктивным объединением.

Любой элемент $\{a\} \times \{n : n > k\} \times T$ базиса фильтра R_T содержит элемент $\{a\} \times \{n : n > k\} \times \{t\}$ базиса фильтра $R_{\{t\}}$ при любом $t \in T$ и в случае (v2) (где $T = J \setminus L$ с конечным множеством L) является элементом $\{a\} \times \{n : n > k\} \times (J \setminus L)$ базиса фильтра R_∞ . Это означает, что фильтр R_T мажорируется фильтром $R_{\{t\}}$ при любом $t \in T$ и в случае (v2) мажорируется фильтром R_∞ , т. е. $\mathcal{N}_{\{t\}} \subset \mathcal{N}_T$ при любом $t \in T$ и в случае (v2) $\mathcal{N}_{\{\infty\}} \subset \mathcal{N}_T$. Это доказывает включение

$$\mathcal{N}_T \supset \left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{N}_{\{t\}} \right) \sqcup \begin{cases} \emptyset & \text{в случае (v1),} \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}} & \text{в случае (v2).} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Остается доказать обратное включение. Имеем

$$\mathcal{N}_T \subset \left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{N}_{\{t\}} \right) \sqcup \begin{cases} \emptyset & \text{в случае (v1),} \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}} & \text{в случае (v2).} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Пусть $\mathbf{Z} \in \mathcal{N}_T$, т. е. $\mathbf{Z}$ мажорирует фильтр R_T . Допустим, что $\mathbf{Z}$ не мажорирует ни один из фильтров $R_{\{t\}}$, $t \in T$. Тогда для каждого $t \in T$ найдется $k(t) \in \mathbf{N}$ такое, что элемент $\{a\} \times \{n : n > k(t)\} \times \{t\}$ базиса фильтра $R_{\{t\}}$ не входит в $\mathbf{Z}$. По основному свойству ультрафильтров (см. [9, гл. 1, § 6.4, предложение 5]) $F(A) \setminus (\{a\} \times \{n : n > k(t)\} \times \{t\}) \in \mathbf{Z}$. Тогда для произвольного непустого конечного $L_0 \subset T$ и $k(L_0) := \max\{k(t) : t \in L_0\}$, большее множество $F(A) \setminus (\{a\} \times \{n : n > k(L_0)\} \times \{t\})$ также входит в $\mathbf{Z}$ при любом $t \in L_0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bigcap_{t \in L_0} (F(A) \setminus (\{a\} \times \{n : n > k(L_0)\} \times \{t\})) \\ = F(A) \setminus (\{a\} \times \{n : n > k(L_0)\} \times L_0) \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

при любом выборе непустого конечного множества $L_0 \subset T$.

В случае (v1) при $L_0 = T$ элемент $\{a\} \times \{n : n > k(T)\} \times T$ базиса фильтра R_T не входит в $\mathbf{Z}$ и это противоречит выбору ультрафильтра $\mathbf{Z} \in \mathcal{N}_T$. Таким образом, в случае (v1) $\mathbf{Z}$ мажорирует один из фильтров $R_{\{t\}}$, $t \in T$, поэтому $\mathbf{Z} \in \bigcup_{t \in T} \mathcal{N}_{\{t\}}$, что дает требуемое включение (4.3.4).

Продолжим рассуждение для случая (v2): $T = J \setminus L$ с конечным множеством $L \subset J$. Допустим, что $\mathbf{Z}$ не мажорирует также и фильтр R_∞ . Тогда для некоторого $k_1 \in \mathbf{N}$ и конечного множества $L_1 \subset J$ элемент $\{a\} \times \{n : n > k_1\} \times (J \setminus L_1)$ базиса фильтра R_∞ не входит в $\mathbf{Z}$. Пусть непустое конечное множество $L_0 \subset T$ таково, что $(L_1 \cap T) \subset L_0 \subset T$ и $k' = \max\{k_1, k(L_0)\}$. Тогда множество

$$\begin{aligned} \{a\} \times \{n : n > k'\} \times (T \setminus L_0) \subset \{a\} \times \{n : n > k_1\} \\ \times (J \setminus (L_1 \cap T)) \subset \{a\} \times \{n : n > k_1\} \times (J \setminus L_1) \end{aligned}$$

не входит в $\mathbf{Z}$. Так как в силу (4.3.5) множество

$$\{a\} \times \{n : n > k'\} \times L_0 \subset \{a\} \times \{n : n > k(L_0)\} \times L_0$$

также не входит в $\mathbf{Z}$, их объединение $\{a\} \times \{n : n > k'\} \times T$ не входит в $\mathbf{Z}$. Это противоречит тому, что $\mathbf{Z}$ мажорирует фильтр R_T . Таким образом, в случае (v2) ультрафильтр $\mathbf{Z}$ мажорирует либо один из фильтров $R_{\{t\}}$ с $t \in T$, либо фильтр R_∞ , т. е. $\mathbf{Z} \in \left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{N}_{\{t\}}\right) \cup \mathcal{N}_{\{\infty\}}$. Это доказывает включение (4.3.4) в случае (v2).

Из (4.3.3) и (4.3.4) получаем требуемое равенство (4.3.1).

Из (4.3.1) следует, что $\mathcal{N}_{T \setminus \{t\}} = \mathcal{N}_T \setminus \mathcal{N}_{\{t\}}$ при любом $t \in T$, поэтому

$$\bigcap_{t \in T} \mathcal{N}_{T \setminus \{t\}} = \bigcap_{t \in T} (\mathcal{N}_T \setminus \mathcal{N}_{\{t\}}) = \mathcal{N}_T \setminus \left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{N}_{\{t\}}\right) = \begin{cases} \emptyset & \text{в случае (v1),} \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}} & \text{в случае (v2).} \end{cases}$$

Утверждение доказано.

4.4. Теорема. При любом непустом множестве $J \subset X \sqcup \{\theta\}$ и любом выборе $a \in X$ область примыкания толстой точки $F(a)$ к остальным толстым точкам в Y имеет вид

$$\bigcup_{x \in X \setminus \{a\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \left(\bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} L_{a,b} \right) \sqcup S_a, \quad (4.4.1)$$

где

$$S_a = \begin{cases} \emptyset & \text{при } \theta \notin J, \\ \mathcal{N}_\theta & \text{при } \theta \in J \end{cases} \sqcup \begin{cases} \emptyset, & \text{если } J \text{ — конечное множество,} \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}}, & \text{если } J \text{ — бесконечное множество,} \end{cases} \quad (4.4.2)$$

и для любого $b \in X \setminus \{a\}$

$$L_{a,b} = \begin{cases} \emptyset & \text{при } b \notin J, \\ \mathcal{N}_{\{b\}} & \text{при } b \in J. \end{cases} \quad (4.4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим исключительные случаи при задании конечного множества J .

СЛУЧАЙ $J \setminus \{a\} = \emptyset$. Для любого $x \in X \setminus \{a\}$ имеем $J \setminus \{a, x\} = \emptyset$, $\mathcal{N}(F(a); F(x)) = \emptyset$ по утверждению 4.1; область примыкания в (4.4.1) — пустое множество; $S_a = \emptyset = L_{a,b}$ для любого $b \in X \setminus \{a\}$.

СЛУЧАЙ $J \setminus \{a\} = \{x_0\}$, $x_0 \in X \setminus \{a\}$. В этом случае $J \setminus \{a, x_0\} = \emptyset$ и $\mathcal{N}(F(a); F(x_0)) = \emptyset$ (утверждение 4.1); $\mathcal{N}(F(a); F(x)) = \mathcal{N}_{\{x_0\}}$ при $x \in X \setminus \{a, x_0\}$ (утверждение 4.2); левая часть в (4.4.1) есть $\mathcal{N}_{\{x_0\}}$; $S_a = \emptyset$; $L_{a,x_0} = \mathcal{N}_{\{x_0\}}$ и $L_{a,b} = \emptyset$ при $b \in X \setminus \{a, x_0\}$.

СЛУЧАЙ $J \setminus \{a\} = \{\theta\}$. Для любого $x \in X \setminus \{a\}$ имеем: $J \setminus \{a, x\} = \{\theta\}$ и $\mathcal{N}(F(a); F(x)) = \mathcal{N}_{\{\theta\}}$ (утверждение 4.2); область примыкания в (4.4.1) есть $\mathcal{N}_{\{\theta\}}$; $S_a = \mathcal{N}_{\{\theta\}}$; $L_{a,b} = \mathcal{N}_{\{\theta\}} \setminus \mathcal{N}_{\{\theta\}} = \emptyset$ при любом $b \in X \setminus \{a\}$.

Так как во всех этих случаях формулы (4.4.1)–(4.4.3) истинны, в дальнейшем доказательстве считаем, что $J \setminus \{a\}$ содержит более одной точки.

При вычислении S_a по формуле (3.4.3) заметим, что $\theta \notin X$ и потому

$$S_a = \bigcap_{x \in X \setminus \{a\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \bigcap_{x \in X \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)).$$

Используя формулы (4.2.1) и (4.3.1), получаем равенство

$$\begin{aligned} \bigcap_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) &= \bigcap_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}_{J \setminus \{a, x\}} \\ &= \bigcap_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} (\mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \mathcal{N}_{\{x\}}) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \left(\bigcup_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}_{\{x\}} \right) \\ &= \left[\left(\bigcup_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}_{\{x\}} \right) \sqcup \begin{cases} \emptyset & \text{при } \theta \notin J, \\ \mathcal{N}_{\{\theta\}} & \text{при } \theta \in J \end{cases} \right] \sqcup \begin{cases} \emptyset & \text{при } \#J < \infty, \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}} & \text{при } \#J = \infty \end{cases} \\ &\setminus \left(\bigcup_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}_{\{x\}} \right) = \begin{cases} \emptyset & \text{при } \theta \notin J, \\ \mathcal{N}_{\{\theta\}} & \text{при } \theta \in J \end{cases} \sqcup \begin{cases} \emptyset & \text{при } \#J < \infty, \\ \mathcal{N}_{\{\infty\}} & \text{при } \#J = \infty \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Для любой точки $x \in P := (X \setminus \{a, \theta\}) \setminus (J \setminus \{a, \theta\})$ (если $P \neq \emptyset$) имеем равенство $\mathcal{N}(F(a); F(x)) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a, x\}} = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}}$. Поэтому при $P \neq \emptyset$ в силу (4.4.4) выполняется включение

$$\bigcap_{x \in P} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \supset \bigcap_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)).$$

Значит, в любом из случаев $P = \emptyset$ и $P \neq \emptyset$ получаем равенство

$$S_a = \bigcap_{x \in J \setminus \{a, \theta\}} \mathcal{N}(F(a); F(x))$$

и тогда формула (4.4.4) дает требуемое равенство (4.4.2).

Если $b \notin J$, то $J \setminus \{a, b\} = J \setminus \{a\} \neq \emptyset$; $\mathcal{N}(F(a); F(b)) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a, b\}} = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}}$ (см. (4.2.1)); $\mathcal{N}(F(a); F(x)) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a, x\}} \subset \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}}$ (см. (4.3.1)) для любого $x \in X \setminus \{a, b\} \neq \emptyset$. Поэтому

$$\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \subset \mathcal{N}(F(a); F(b)),$$

$$L_{a,b} = \bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) \setminus \mathcal{N}(F(a); F(b)) = \emptyset,$$

т. е. в этом случае (4.4.3) выполняется.

Пусть $b \in J$. Так как $\#(J \setminus \{a\}) > 1$, то $J \setminus \{a, b\} \neq \emptyset$ и

$$\mathcal{N}(F(a); F(b)) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a, b\}} = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \mathcal{N}_{\{b\}}. \quad (4.4.5)$$

Если $J \setminus \{a, b, \theta\} = \emptyset$, то $J \subset \{a, b, \theta\}$ и $x \notin J$ при любом $x \in X \setminus \{a, b\}$. В этом случае формула (4.4.3) верна, ибо

$$\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}_{J \setminus \{a, x\}} = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}}$$

и в силу (4.4.5) $L_{a,b} = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus (\mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \mathcal{N}_{\{b\}}) = \mathcal{N}_{\{b\}}$.

Наконец, пусть $J \setminus \{a, b, \theta\} \neq \emptyset$ и $c \in J \setminus \{a, b, \theta\}$. Для любого $x \in P := (X \setminus \{a, b\}) \setminus (J \setminus \{a, b, \theta\})$ (если $P \neq \emptyset$) имеем включение $\mathcal{N}(F(a); F(x)) = \mathcal{N}_{J \setminus \{a, x\}} = \mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \supset \mathcal{N}_{J \setminus \{a, c\}}$. Поэтому в любом из случаев $P = \emptyset$ или $P \neq \emptyset$ справедливо равенство

$$\bigcap_{x \in X \setminus \{a, b\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \bigcap_{x \in J \setminus \{a, b, \theta\}} \mathcal{N}(F(a); F(x)) = \bigcap_{x \in J \setminus \{a, b, \theta\}} \mathcal{N}_{J \setminus \{a, x\}}.$$

Для любых множеств A, B, C справедливо равенство $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap C) \setminus B$. Поэтому

$$\begin{aligned} L_{a,b} &= \left(\bigcap_{x \in J \setminus \{a, b, \theta\}} (\mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \mathcal{N}_{\{x\}}) \right) \setminus (\mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \mathcal{N}_{\{b\}}) \\ &= \left(\mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \left(\bigsqcup_{x \in J \setminus \{a, b, \theta\}} \mathcal{N}_{\{x\}} \right) \right) \setminus (\mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \setminus \mathcal{N}_{\{b\}}) \\ &= (\mathcal{N}_{J \setminus \{a\}} \cap \mathcal{N}_{\{b\}}) \setminus \left(\bigsqcup_{x \in J \setminus \{a, b, \theta\}} \mathcal{N}_{\{x\}} \right) = \mathcal{N}_{\{b\}} \setminus \left(\bigsqcup_{x \in J \setminus \{a, b, \theta\}} \mathcal{N}_{\{x\}} \right) = \mathcal{N}_{\{b\}}, \end{aligned}$$

ибо $\left(\bigsqcup_{x \in J \setminus \{a, b, \theta\}} \mathcal{N}_{\{x\}} \right) \cap \mathcal{N}_{\{b\}} = \emptyset$. Итак, формула (4.4.3) верна и в этом случае.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4] в формуле (0.3) замечена опечатка: вместо $\alpha(F(\Psi)) \geq \alpha(\Psi)$ следует читать $\alpha(F(\Psi)) \geq \omega(\alpha(\Psi))$.

Благодарность. Автор чрезвычайно благодарен рецензенту, отметившему ряд неточностей и опечаток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев В. В. Многозначные отображения со свойством квазимёбиусовости // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 953–972.
2. Асеев В. В., Сычёв А. В., Тетенов А. В. Мёбиусово-инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеевых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.
3. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 241–256.
4. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах. II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 976–987.
5. Aseev V. V. On coordinate vector-functions of quasiregular mappings // Sib. Electron. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 768–772.
6. Väisälä J. Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
7. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
8. Буяло С. В. Мёбиусовы и субмёбиусовы структуры // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 5. С. 1–20.
9. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
10. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.

Поступила в редакцию 8 октября 2019 г.

После доработки 4 февраля 2020 г.

Принята к публикации 19 февраля 2020 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`btp@math.nsc.ru`