G. G. Gevorkyan, M. G. Grigoryan, Absolute convergence of the double fourier–franklin series, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 513–527

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.303>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.205.225.156

April 26, 2023, 17:06:56

УДК 517.51

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ — ФРАНКЛИНА

Г. Г. Геворкян, М. Г. Григорян

Аннотация. Доказано, что для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset T = [0, 1]^2$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(T)$ и для любого $0 < \eta < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(T)$ с $\iint_T |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy \leq \eta$, совпадающую с $f(x, y)$ на E и такую, что ее двойной ряд Фурье — Франклина абсолютно сходится к ней почти всюду на T .

DOI 10.33048/smzh.2020.61.303

Ключевые слова: двойные ряды Фурье, система Франклина, абсолютная сходимость.

§ 1. Введение

Статья посвящена изучению абсолютной сходимости почти всюду рядов по двойной системе Франклина с точки зрения классических теорем Лузина [1] и Меньшова [2] «об исправлении функций».

Система Франклина [3] является одной из популярных систем функций, ее изучению посвящено много работ. Одно из главных свойств этой системы состоит в том, что она образует ортогональный базис в пространстве $C[0, 1]$ и безусловный базис в пространствах $L^p[0, 1]$, $p \in (1, \infty)$, $C[0, 1]$ — класс всех непрерывных на $[0, 1]$ функций ($\|f\|_C = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$), $L^p[0, 1]$ ($p > 0$) — класс измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых $\int_{[0, 1]} |f(x)|^p dx < \infty$. Мету Лебега множества $E \subseteq [0, 1]$ ($E \subseteq T = [0, 1]^2$) будем обозначать через $|E|$.

Вопросам сходимости рядов Фурье по классическим системам после изменения значений функции на множестве малой меры посвящено много работ.

Широко известен следующий результат.

Теорема А [2]. Пусть $f(x)$ — измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\epsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E с мерой $|E| > 2\pi - \epsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Далее в этом направлении получено много интересных результатов.

Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к результатам настоящей работы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научных проектов 18-1A074 и 18-1A148.

Теорема Б [4]. Для любой измеримой почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ и для любого числа $0 < \epsilon < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^2[0, 1)$ с $|\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}| < \epsilon$ так, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится равномерно на $[0, 1]$.

Теорема В [5]. Для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ и для любого числа $0 < \epsilon < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in C[0, 1]$ с $|\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}| < \epsilon$ так, что ее ряд Фурье по системе Франклина абсолютно сходится равномерно на $[0, 1]$.

Следует отметить, что Кацнельсон [6] доказал, что в теореме Меньшова невозможно добиться абсолютной сходимости (т. е. теорема В для тригонометрической системы неверна).

Теорема Г [7]. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1)$, совпадающую с f на E и такую, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится почти всюду на $[0, 1]$ и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Хаара расположены в убывающем порядке.

Отметим, что «исключительное» множество e , на котором происходит изменение функции $f(x)$, в теореме Г универсально (обслуживает целый функциональный класс), а в теоремах Б и В существенно зависит от исправляемой функции $f(x)$, в этих теоремах множество e невозможно выбрать не зависящим от функции $f(x)$. Этот факт для системы Франклина вытекает из следующей теоремы, доказанной в [8].

Теорема Д. Для любого множества E положительной меры и для каждой его точки плотности x_0 существует непрерывная функция $f_0 \in C[0, 1]$ такая, что для любой ограниченной функции $f(x)$, совпадающей с функцией $f_0(x)$ на множестве E , ряд Фурье — Франклина функции $f(x)$ абсолютно расходится в точке x_0 .

Эта теорема верна и для системы Хаара. Отметим, что это «плохое» свойство не является общим для всех базисов пространства $C[0, 1]$, в частности, в [9] доказано, что система Фабера — Шаудера не обладает этим свойством. А именно, имеет место

Теорема Е. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in C[0, 1]$ можно найти функцию $g \in C[0, 1]$, совпадающую с f на E и такую, что ее разложение $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(g) \varphi_k(x)$ по системе Фабера — Шаудера абсолютно сходится равномерно на $[0, 1]$ и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(g)| \varphi_n \right\|_C \leq \|g\|_C < 2\|f\|_C.$$

Сразу возникает вопрос, ответ на который нам не известен.

Вопрос 1. Существует ли ортогональный базис пространства $C[0, 1]$, для которого верна теорема Е?

Из теоремы Д вытекает, что невозможно изменением значений каждой непрерывной функции $f(x)$ на наперед заданном множестве получить функ-

цию $g(x) \in C[0, 1]$, ряд Фурье — Франклина которой абсолютно сходится равномерно на $[0, 1]$. Однако если потребовать, чтобы после изменения функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ на заданном множестве получилась функция $g(x)$, ряд Фурье — Франклина которой абсолютно сходится почти всюду на $[0, 1]$, а сама функция только суммируема, то такая задача имеет положительное решение. Более того, в [8] доказана

Теорема F. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E и такую, что ее ряд Фурье — Франклина абсолютно сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$ и последовательность коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ лежит во всех l^r , $r > 2$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\tilde{f})|^r < \infty \quad \forall r > 2, \quad \text{где } c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x) f_n(x) dx.$$

В данной статье рассмотрен вопрос о том, можно ли получить аналогичные результаты для двойных рядов Франклина.

Пусть $T = [0, 1]^2$, $p \in [1, \infty)$ и $f \in L^p(T)$. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^p(T)$ по двойной системе Франклина $\{f_k(x)f_s(y)\}_{k,s=0}^\infty$ обозначим через

$$c_{k,s}(f) = \iint_T f(t, \tau) f_k(t) f_s(\tau) dt d\tau, \quad k, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1.1)$$

Положим

$$\Lambda(f) := \text{спек}\{c_{k,s}(f)\} = \text{спек}(f) = \{(k, s), c_{k,s}(f) \neq 0\}, \quad k, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1.2)$$

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье — Франклина определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x, y, f) := \sum_{k=0}^N \sum_{s=0}^M c_{k,s}(f) f_k(x) f_s(y), \quad (1.3)$$

$$S_R(x, y, f) := \sum_{k^2+s^2 \leq R^2} c_{k,s}(f) f_k(x) f_s(y). \quad (1.4)$$

Отметим, что ряд результатов невозможно перенести с одномерного случая на двумерный случай. В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в таких вопросах, как сходимость в L^p , $p \geq 1$, и сходимость почти всюду.

Подтверждением изложенного выше служит, в частности, следующий результат: существует суммируемая на T функция $f_0(x, y)$, прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье — Хаара [10] которой расходятся почти всюду на T (нам не известно, верен ли такой результат для двойного ряда Фурье — Франклина).

Заметим, что в одномерном случае картина такова: ряд Фурье — Франклина каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Естествен вопрос: существует ли измеримое множество e сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции $g \in L^1(T)$ на e ряд Фурье по двойной системе Франклина $\{f_k(x)f_s(y)\}_{k,s=0}^\infty$ измененной функции сходится почти всюду на T по прямоугольникам или по сферам?

Оказывается, что ответ на этот вопрос положителен. Имеет место

Теорема 1. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset T = [0, 1]^2$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(T)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(T)$, совпадающую с $f(x, y)$ на E и такую, что как прямоугольные, так и сферические частичные суммы ее двойного ряда Фурье — Франклина сходятся к ней почти всюду на T .

Более того, в настоящей статье доказывается

Теорема 2. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset T = [0, 1]^2$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(T)$ и для любого $0 < \eta < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(T)$ с $\iint_T |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy \leq \eta$, совпадающую с $f(x, y)$ на E и такую, что ее двойной ряд Фурье — Франклина абсолютно сходится к ней почти всюду на T .

Эта теорема следует из следующей более сильной теоремы.

Теорема 3. Существует ряд по двойной системе Франклина вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} d_{k,s} f_k(x) f_s(y), \quad \sum_{k,s=0}^{\infty} |d_{k,s}|^r < \infty, \quad r > 2, \quad (1.5)$$

со свойством: для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset T$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(T)$ и для любого $0 < \eta < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(T)$ с $\iint_T |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy \leq \eta$, совпадающую с $f(x, y)$ на E и такую, что ее ряд Фурье — Франклина абсолютно сходится к ней почти всюду на T и

$$c_{k,s}(\tilde{f}) = d_{k,s}, \quad (k, s) \in \Lambda(\tilde{f}) = \text{spec}(\tilde{f}).$$

Вопрос 2. Возможно ли в качестве ряда (1.5) выбрать ряд Фурье по двойной системе Франклина некоторой функции $g \in L^1(T)$?

§ 2. Доказательство основной леммы

Напомним определение системы Франклина [3]. Пусть $\pi_1 = \{0, 1\}$ и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$,

$$\pi_n = \{t_s\}_{s=0}^n, \quad \text{где } t_s = t_s(n) = \begin{cases} \frac{s}{2^{k+1}}, & \text{если } s = 0, 1, \dots, 2i, \\ \frac{s-i}{2^k}, & \text{если } s = 2i+1, \dots, n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных на $[0, 1]$ и кусочно-линейных с узлами из π_n . Отметим что π_n получается добавлением в π_{n-1} точки $z_n = t_{2i-1}(n) = \frac{2i-1}{2^{k+1}}$.

Система функций Франклина $F = \{f_n(x)\}$ определяется на $[0, 1]$ следующим образом:

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \quad x \in [0, 1],$$

и при $n \geq 2$

$$f_n(x) \in S_n, \quad f_n \perp S_{n-1}, \quad \|f_n\|_{L^2} = 1, \quad f_n(t_{2i-1}(n)) > 0.$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 2^q равных частей: $\Delta_q^{(j)} = [\frac{j-1}{2^q}, \frac{j}{2^q}]$, $1 \leq j \leq 2^q$, которые будем называть *двоичными отрезками*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для каждой функции $f \in L^1(T)$ и для любого положительного числа ξ существует полином $Q(x, y)$ по двойной системе Франклина $\{f_k(x)f_s(y)\}_{k,s=0}^\infty$ со свойством

$$\frac{3}{4}\xi \leq \iint_T |f(x, y) - Q(x, y)| dx dy \leq \frac{5}{4}\xi. \quad (2.1)$$

Действительно, легко видеть, что можно выбрать полином $Q(x, y)$ по двойной системе Франклина $\{f_k(x)f_s(y)\}_{k,s=0}^\infty$ такой, что

$$\iint_T |(f(x, y) - \xi) - Q(x, y)| dx dy \leq \frac{\xi}{4}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\iint_T |f(x, y) - Q(x, y)| dx dy \leq \frac{\xi}{4} + \xi,$$

$$\iint_T |f(x, y) - Q(x, y)| dx dy \geq \iint_T \xi dx dy - \iint_T ||f(x, y) - \xi| - Q(x, y)| dx dy \geq \xi - \frac{\xi}{4}.$$

Лемма 1. Для каждой функции $f \in L^1(T)$ и для любой последовательности положительных чисел $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ с

$$0 < \xi_{k+1} \leq \frac{\xi_k}{5}, \quad k \geq 1, \quad (2.2)$$

можно найти последовательность полиномов $\{\Pi_k(x, y)\}_{k=1}^\infty$ по двойной системе Франклина $\{f_n(x)f_s(y)\}_{n,s=0}^\infty$ с рациональными коэффициентами такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_T \left| \sum_{k=1}^N \Pi_k(x, y) - f(x, y) \right| dx dy = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Pi_k(x, y) = f(x, y) \text{ п. в. на } T,$$

$$\frac{\xi_k}{2} \leq \iint_T |\Pi_k(x, y)| dx dy \leq \frac{3}{2}\xi_k, \quad k \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что в силу замечания 1 можно выбрать последовательность полиномов $\{Q_k(x, y)\}_{k=1}^\infty$ по двойной системе Франклина $\{f_n(x)f_s(y)\}_{n,s=0}^\infty$ с рациональными коэффициентами такую, что

$$\frac{3}{4}\xi_{k+1} \leq \iint_T |f(x, y) - Q_k(x, y)| dx dy \leq \frac{5}{4}\xi_{k+1}, \quad k \geq 1. \quad (2.3)$$

Положим

$$\Pi_k(x, y) = Q_k(x, y) - Q_{k-1}(x, y), \quad k \geq 1, \quad Q_0(x, y) = 0. \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \iint_T \left| f(x, y) - \sum_{k=1}^N \Pi_k(x, y) \right| dx dy \\ = \iint_T |f(x, y) - Q_N(x, y)| dx dy \leq \frac{5}{4}\xi_N, \quad N \geq 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В силу (2.2)–(2.4) получим

$$\begin{aligned} \iint_T |\Pi_k(x, y)| dx dy &\leq \iint_T |f(x, y) - Q_k(x, y)| dx dy \\ &\quad + \iint_T |f(x, y) - Q_{k-1}(x, y)| dx dy \leq \frac{3}{2} \xi_k, \quad k \geq 2, \\ \iint_T |\Pi_k(x, y)| dx dy &\geq \iint_T |f(x, y) - Q_{k-1}(x, y)| dx dy \\ &\quad - \iint_T |f(x, y) - Q_k(x, y)| dx dy \geq \frac{\xi_k}{2}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Полагая

$$B := \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{N=q}^{\infty} \left\{ (x, y) \in T : \left| f(x, y) - \sum_{k=1}^N \Pi_k(x, y) \right| < \sqrt{\xi_N} \right\}$$

и учитывая соотношения (2.2), (2.5), будем иметь $|B| = 1$.

Ясно, что на множестве B имеет место $\left| f(x, y) - \sum_{k=1}^N \Pi_k(x, y) \right| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Pi_k(x, y) = f(x, y) \quad \text{п. в. на } T.$$

Лемма 1 доказана.

Ниже будем использовать следующую лемму, доказанную в [8, лемма 6].

Лемма 2. Пусть заданы числа $\varepsilon_0, \delta_0, \lambda_0, \theta_0, \tau_0, \sigma_0 \in (0, 1)$, $N_0 \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon_0 < \delta_0)$ и двоичный отрезок $\Delta = [a, b]$. Тогда существуют полином по системе Фрэнклина вида $Q(t) = \sum_{n=N_0}^M a_n f_n(t)$ и множества $G \subset E \subset [a, b]$ такие, что

$$(1) \quad |E| > (1 - \varepsilon_0)(b - a), \quad |G| > (1 - \delta_0)(b - a),$$

$$(2) \quad Q(t) = 0 \quad \text{при всех } t \notin [a, b],$$

$$(3) \quad Q(t) = 1 \quad \text{при всех } t \in E,$$

$$(4) \quad \int_{[a, b]} |Q(t)| dt < 2(b - a),$$

$$(5) \quad \sum_{n=N}^M |a_n f_n(t)| < \theta_0 \quad \text{для всех } t \notin (a - \lambda_0, b + \lambda_0),$$

$$(6) \quad \left(\sum_{n=N_0}^M |a_n|^{2+\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2+\sigma_0}} < \tau_0,$$

$$(7) \quad \sum_{n=N_0}^M |a_n f_n(t)| < \frac{A(\ln \frac{1}{\delta_0})}{\delta_0} \quad \text{для всех } t \in G, \quad \text{где } A — \text{постоянная.}$$

Лемма 3. Пусть заданы числа $0 < \eta < \varepsilon < \delta < 1$, $r > 2$, $N \in \mathbb{N}$ и функция $f(x, y) \in L^1(T)$ с $\iint_T |f(x, y)| dx dy > 0$. Тогда существуют множества $G \subset E \subset T$, функция $g(x, y) \in L^1(T)$ и полином по двойной системе Франклина вида

$$Q(x, y) = \sum_{k, s=N}^M c_{k, s} f_k(x) f_s(y)$$

такие, что

$$(1) \quad |E| > 1 - \varepsilon, \quad |G| > 1 - \delta,$$

$$(2) \quad g(x, y) = f(x, y) \quad \text{на } E,$$

$$(3) \quad \iint_T |g(x, y) - Q(x, y)| dx dy \leq \eta,$$

$$(4) \quad \iint_T |g(x, y)| dx dy \leq 5 \iint_T |f(x, y)| dx dy,$$

$$(5) \quad \sum_{k, s=N}^M |c_{k, s} f_k(x) f_s(y)| \leq \frac{B(\ln \frac{1}{\delta})^2 |f(x, y)|}{\delta^2} + \eta, \quad (x, y) \in G, \quad \text{где } B \text{ — постоянная,}$$

$$(6) \quad \left(\sum_{k, s=N}^M |c_{k, s}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \eta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Возьмем ступенчатую функцию вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{l, j=1}^{2^q} \gamma_{l, j} \chi_{\Delta_{l, j}}(x, y), \quad (2.6)$$

где

$$\Delta_{l, j} = \Delta'_l \times \Delta''_j = [\alpha_{l-1}, \alpha_l] \times [\alpha_{j-1}, \alpha_j], \quad (2.7)$$

$$\alpha_j = \frac{j}{2^q}, \quad j = 0, 1, \dots, 2^q, \quad (2.8)$$

такую, что

$$\iint_T |f(x, y) - \varphi(x, y)| dx dy < \min \left[\frac{\eta \delta^3}{128 A^2 (\ln \frac{1}{\delta})^2}; \frac{1}{2} \iint_T |f(x, y)| dx dy \right]. \quad (2.9)$$

Пусть

$$E_0 = \left\{ (x, y) \in T : |f(x, y) - \varphi(x, y)| < \frac{\eta \delta^2}{32 A^2 (\ln \frac{1}{\delta})^2} \right\}. \quad (2.10)$$

В силу (2.9) и (2.10) получим

$$|E_0| > \left(1 - \frac{\delta}{4} \right). \quad (2.11)$$

Положим

$$\partial = \frac{\delta\eta}{\left(4A \sum_{l,j=1}^{2^q} |\gamma_{l,j}| + 1\right) \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)}. \quad (2.12)$$

Применим лемму 2 (для каждого $l \in [1, 2^q]$), полагая в ее формулировке $\Delta = \Delta'_l$, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{4}$, $\delta_0 = \frac{\delta}{4}$, $N_0 = N_l$, $\tau_0 = \left(\sum_{l,j=1}^{2^q} |\gamma_{l,j}|\right)^{-1}$, $\sigma_0 = r - 2$, $\lambda_0 = \frac{\delta}{2^{q+4}}$, $\theta_0 = \partial$. Тогда определяются измеримые множества $G'_l \subset E'_l \subset \Delta'_l$ и полиномы по системе Франклина вида

$$Q'_l(x) = \sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} a_n^{(l)} f_n(x) \quad (2.13)$$

для каждого $l \in [1, 2^q]$, удовлетворяющие условиям

$$|E'_l| > |\Delta'_l| \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right), \quad |G'_l| > |\Delta'_l| \left(1 - \frac{\delta}{4}\right), \quad (2.14)$$

$$Q'_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E'_l, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta'_l, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\int_{\Delta'_l} |Q_l(x)| dx < 2|\Delta'_l|, \quad (2.16)$$

$$\sum_{k=N_l+1}^{N_{l+1}} |a_k^{(l)} f_k(x)| < \partial, \quad x \notin \left[\alpha_l - \frac{\delta}{2^{q+4}}, \alpha_{l+1} + \frac{\delta}{2^{q+4}}\right], \quad (2.17)$$

$$\sum_{k=N_l+1}^{N_{l+1}} |a_k^{(l)} f_k(x)| < \frac{4A(\ln \frac{1}{\delta})}{\delta}, \quad x \in G'_l, \quad (2.18)$$

$$\left(\sum_{k=N_l+1}^{N_{l+1}} |a_k^{(l)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} < \left(\sum_{l,j=1}^{2^q} |\gamma_{l,j}|\right)^{-1}. \quad (2.19)$$

Снова применим лемму 2 (для каждого $j \in [1, 2^q]$), полагая в ее формулировке

$$\Delta = \Delta''_j, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{4}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{4}, \quad N_0 = N_{2^q+1}, \quad \tau_0 = \eta, \quad \sigma_0 = r - 2, \quad \lambda_0 = \frac{\delta}{2^{q+4}}, \quad \theta_0 = \partial.$$

Тогда определяются измеримые множества $G''_j \subset E''_j \subset \Delta''_j$ и полином по системе Франклина вида

$$Q''_j(y) = \sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} b_s^{(j)} f_s(y), \quad M_1 = N_{2^q}, \quad (2.20)$$

для каждого $j \in [1, 2^q]$, удовлетворяющие условиям

$$|E''_j| > |\Delta''_j| \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right), \quad |G''_j| > |\Delta''_j| \left(1 - \frac{\delta}{4}\right), \quad (2.21)$$

$$Q''_j(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in E''_j, \\ 0 & \text{при } y \notin \Delta''_j, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\int_{\Delta_j''} |Q_j''(y)| dy < 2|\Delta_j''|, \quad (2.23)$$

$$\sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} |b_s^{(j)} f_s(y)| < \vartheta, \quad y \notin \left[\beta_j - \frac{\delta}{2^{q+4}}, \beta_{j+1} + \frac{\delta}{2^{q+4}} \right], \quad (2.24)$$

$$\sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} |b_s^{(j)} f_s(y)| < \frac{A(\ln \frac{1}{\delta})}{\delta}, \quad x \in G_j'', \quad (2.25)$$

$$\left(\sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} |b_s^{(j)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} < \eta. \quad (2.26)$$

Определим полином $Q(x, y)$, функцию $g(x, y)$ и множества E, G следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \sum_{l,j=1}^{2^q} \gamma_{l,j} Q_l'(x) Q_j''(y) = \sum_{l,j=1}^{2^q} \gamma_{l,j} \sum_{k=N_l+1}^{N_{l+1}} a_k^{(l)} f_k(x) \sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} b_s^{(j)} f_s(y) \\ &= \sum_{k,s=N}^M c_{k,s} f_k(x) f_s(y), \quad M = M_{2^q+1}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} \gamma_{l,j} a_k^{(l)} b_s^{(j)}, & (k, s) \in \Omega_{l,j} := (N_l, N_{l+1}] \times (M_j, M_{j+1}], \quad l, j \in [1, 2^q], \\ 0, & (k, s) \notin \bigcup_{l,j=1}^{2^q} \Omega_{l,j}, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$g(x, y) = f(x, y) - [\varphi(x, y) - Q(x, y)], \quad (2.29)$$

$$E = \bigcup_{l=1}^{2^q} \bigcup_{j=1}^{2^q} (E_l' \times E_j''), \quad (2.30)$$

$$G = E_0 \cap \left[\left(\bigcup_{l=1}^{2^q} G_l' \right) \times \left(\bigcup_{j=1}^{2^q} G_j'' \right) \right] \setminus E_0 \cap [(A_q \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times A_q)], \quad (2.31)$$

где $A_q = \bigcup_{l=1}^{2^q} [\alpha_j - \frac{\delta}{2^{q+4}}, \alpha_j + \frac{\delta}{2^{q+4}}]$. Из условий (2.6), (2.11), (2.14), (2.15), (2.21), (2.22), (2.27), (2.29)–(2.31) следует, что

$$|E| > 1 - \varepsilon, \quad |G| > 1 - \delta, \quad g(x, y) = f(x, y) \text{ на } E, \quad \iint_T |g(x, y) - Q(x, y)| dx dy \leq \eta.$$

В силу (2.6), (2.15), (2.16), (2.22), (2.23), (2.27) имеем

$$\begin{aligned} \iint_T |Q(x, y)| dx dy &= \sum_{l,j=1}^q |\gamma_{l,j}| \int_{\Delta_l'} |Q_l(x)| dx \int_{\Delta_j''} |Q_j''(y)| dy \\ &\leq 4 \sum_{l,j=1}^q |\gamma_{l,j}| |\Delta_l'| |\Delta_j''| = 4 \iint_T |\varphi(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.9), (2.29) вытекает, что

$$\begin{aligned} \iint_T |g(x, y)| dx dy &\leq \iint_T |f(x, y) - \varphi(x, y)| dx dy \\ &+ \iint_T |Q(x, y)| dx dy \leq 5 \iint_T |f(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Проверим выполнение утверждения (5) леммы 3.

Пусть $(x, y) \in G$, тогда для некоторых l_0 и $j_0, (x, y) \in G'_{l_0} \times G''_{j_0}$. Учитывая соотношения (2.6), (2.12), (2.17), (2.18), (2.24), (2.25), (2.28) и (2.31), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k,s=N}^M |c_{k,s} f_k(x) f_s(y)| &\leq \sum_{l,j=1}^{2^q} |\gamma_{l,j}| \left(\sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} |a_k^{(l)} f_k(x)| \right) \left(\sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} |b_s^{(j)} f_s(y)| \right) \\ &= |\gamma_{l_0,j_0}| \left(\sum_{n=N_{l_0}+1}^{N_{l_0+1}} |a_k^{(l_0)} f_k(x)| \right) \left(\sum_{s=M_{j_0}+1}^{M_{j_0+1}} |b_s^{(j_0)} f_s(y)| \right) \\ &+ \sum_{(l,j) \in [1,2^q]^2 \setminus (l_0,j_0)} |\gamma_{l,j}| \left(\sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} |a_k^{(l)} f_k(x)| \right) \left(\sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} |b_s^{(j)} f_s(y)| \right) \\ &\leq \frac{16A^2 (\ln \frac{1}{\delta})^2 |\gamma_{l_0,j_0}|}{\delta^2} + 2 \left(\sum_{l,j=1}^{2^q} |\gamma_{l,j}| \right) \left(\frac{A \ln \frac{1}{\delta}}{\delta} \partial + \partial^2 \right) \\ &\leq \frac{B (\ln \frac{1}{\delta})^2 |\varphi(x, y)|}{\delta^2} + \frac{\eta}{2}, \quad \text{где } B = 16A^2. \quad (2.32) \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (см. (2.9), (2.31))

$$|\varphi(x, y)| < |f(x, y)| + \frac{\eta \delta^2}{32A^2 (\ln \frac{1}{\delta})^2}, \quad (x, y) \in G \subset E_0,$$

из (2.32) получим

$$\sum_{k,s=N}^M |c_{k,s} f_k(x) f_s(y)| \leq \frac{B (\ln \frac{1}{\delta})^2 |f(x, y)|}{\delta^2} + \eta.$$

В силу (2.19), (2.26) и (2.28) имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k,s=N}^M |c_{k,s}|^r \right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\sum_{l,j=1}^{2^q} \sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} \sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} |\gamma_{l,j} a_k^{(l)} b_s^{(j)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\sum_{l,j=1}^{2^q} |\gamma_{l,j}|^r \sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} |a_k^{(l)}|^r \sum_{s=M_j+1}^{M_{j+1}} |b_s^{(j)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \sum_{l,j=1}^{2^q} |\gamma_{l,j}| \left(\sum_{k=N}^M |a_k^{(l)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{s=N}^M |b_s^{(j)}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \eta. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Пусть $\epsilon > 0$. Обозначим через

$$\{\phi_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty} \quad (3.1)$$

последовательность полиномов по двойной системе Франклина $\{f_k(x)f_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ с рациональными коэффициентами и положим

$$\delta_n = \min \left\{ \frac{1}{2}; \sqrt[4]{\iint_T |\phi_n(x, y)| dx dy} \right\}. \quad (3.2)$$

Применяя лемму 3, можно найти последовательности множеств $\{G_n\}$, $\{E_n\}$, функций $\{g_n(x, y)\}$ и полиномов по двойной системе Франклина вида

$$Q_n(x, y) = \sum_{k,s=M_n+1}^{M_{n+1}} c_{k,s}^{(n)} f_k(x) f_s(y), \quad (3.3)$$

которые для всех $n \geq 1$ удовлетворяют условиям

$$E_n, G_n \subset T, \quad |E_n| > 1 - \epsilon 2^{-(n+2)}, \quad |G_n| > 1 - \delta_n, \quad (3.4)$$

$$g_n(x, y) = \phi_n(x, y) \quad \text{на } E_n, \quad (3.5)$$

$$\iint_T |g_n(x, y) - Q_n(x, y)| dx dy \leq 2^{-5(n+3)}, \quad (3.6)$$

$$\iint_T |g_n(x, y)| dx dy \leq 5 \iint_T |\phi_n(x, y)| dx dy, \quad (3.7)$$

$$\sum_{k,s=M_n+1}^{M_{n+1}} |c_{k,s}^{(n)} f_k(x) f_s(y)| \leq \frac{B(\ln \frac{1}{\delta_n})^2 |\phi_n(x, y)|}{\delta_n^2} + 2^{-5(n+3)}, \quad (x, y) \in G_n, \quad (3.8)$$

$$\left(\sum_{k,s=M_n+1}^{M_{n+1}} |c_{k,s}^{(n)}|^{2+2^{-n}} \right)^{\frac{1}{2+2^{-n}}} \leq 2^{-5(n+3)}. \quad (3.9)$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad (3.10)$$

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} d_{k,s} f_k(x) f_s(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k,s=M_n+1}^{M_{n+1}} c_{k,s}^{(n)} f_k(x) f_s(y), \quad (3.11)$$

$$d_{k,s} = \begin{cases} c_{k,s}^{(n)} & \text{при } (k, s) \in \Omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n; M_{n+1}] \times (M_n; M_{n+1}], \\ 0 & \text{при } (k, s) \notin \Omega. \end{cases} \quad (3.12)$$

Очевидно, что (см. (3.4), (3.9), (3.10) и (3.12))

$$|E| > 1 - \epsilon, \quad \sum_{k,s=0}^{\infty} |d_{k,s}|^r < \infty, \quad r > 2.$$

Пусть $f(x, y) \in L^1(T)$ и η — любое положительное число. В силу леммы 1 можно выбрать подпоследовательность $\{\phi_{n_k}(x, y)\}_{n=1}^\infty$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_T \left| \sum_{k=1}^N \phi_{n_k}(x, y) - f(x, y) \right| dx dy = 0, \quad (3.13)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \phi_{n_k}(x, y) = f(x, y) \quad \text{п. в. на } T, \quad (3.14)$$

$$\eta 2^{-4(k+1)} \leq \iint_T |\phi_{n_k}(x, y)| dx dy \leq 3\eta 2^{-4(k+1)}, \quad k \geq 2. \quad (3.15)$$

Из (3.13) и (3.15) получим

$$\iint_T |f(x, y) - \phi_{n_1}(x, y)| dx dy < \frac{\eta}{2}. \quad (3.16)$$

Предположим, что уже определены числа $n_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $g_1(x, y) = \phi_{n_1}(x, y)$, $g_2(x, y), \dots, g_{q-1}(x, y)$ и полиномы

$$Q_{\nu_n}(x, y) = \sum_{k,s=M_{\nu_n}+1}^{M_{\nu_n+1}} c_{k,s}^{(\nu_n)} f_k(x) f_s(y), \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_l(x, y) &= \phi_{k_l}(x, y), \quad (x, y) \in E, \quad l \in [1, q-1], \\ \iint_T |g_l(x, y)| dx dy &< 2^{-(l+1)}, \quad l \in [1, q-1], \\ \iint_T \left| \sum_{j=1}^l [g_j(x, y) - Q_{\nu_j}(x, y)] \right| dx dy &< \eta 2^{-5(l+2)}, \quad l \in [1, q-1]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Легко видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ (функцию $\phi_{\nu_q}(x, y)$ из последовательности (3.1)) таким образом, что

$$\iint_T \left| \left\{ \phi_{\nu_q}(x, y) - \sum_{j=1}^{q-1} [g_j(x, y) - Q_{\nu_j}(x, y)] \right\} - \phi_{\nu_q}(x, y) \right| dx dy \leq \eta 2^{-6(q+3)}. \quad (3.18)$$

Покажем, что

$$\eta 2^{-4q-5} \leq \iint_T |\phi_{\nu_q}(x, y)| dx dy \leq \eta 2^{-4q}. \quad (3.19)$$

В силу (3.15), (3.17) и (3.18) имеем

$$\begin{aligned} \iint_T |\phi_{\nu_q}(x, y)| dx dy &\geq \iint_T |\phi_{n_q}(x, y)| dx dy - \iint_T \left| \sum_{j=1}^{q-1} [g_j(x, y) - Q_{\nu_j}(x, y)] \right| dx dy \\ &\quad - \iint_T \left| \left\{ \phi_{n_q}(x, y) - \sum_{j=1}^{q-1} [g_j(x, y) - Q_{\nu_j}(x, y)] \right\} - \phi_{\nu_q}(x, y) \right| dx dy \end{aligned}$$

$$\geq \eta 2^{-4(q+1)} - \eta 2^{-5(q+2)} - \eta 2^{-6(q+3)} \geq \eta 2^{-4q-5}$$

и аналогично

$$\iint_T |\phi_{\nu_q}(x, y)| dx dy \leq \eta 2^{-4(q+1)} + \eta 2^{-5(q+2)} + \eta 2^{-6(q+3)} \leq \eta 2^{-4q}.$$

Положим

$$g_q(x, y) = \phi_{n_q}(x, y) + [g_{\nu_q}(x, y) - \phi_{\nu_q}(x, y)]. \quad (3.20)$$

Отсюда и из (3.5), (3.10) вытекает, что

$$g_q(x, y) = \phi_{n_q}(x, y), \quad (x, y) \in E, \quad q \geq 1. \quad (3.21)$$

Учитывая соотношения (3.6), (2.18) и (3.20), для всех $q \geq 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \iint_T \left| \sum_{j=1}^q [g_j(x, y) - Q_{\nu_j}(x, y)] \right| dx dy \\ & \leq \iint_T \left| \left\{ \phi_{n_q}(x, y) - \sum_{j=1}^{q-1} [g_j(x, y) - Q_{\nu_j}(x, y)] \right\} - \phi_{\nu_q}(x, y) \right| dx dy \\ & \quad + \iint_T |g_{\nu_q}(x, y) - Q_{\nu_q}(x, y)| dx dy \leq \eta 2^{-5(q+2)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В силу (3.15), (3.19) и (3.20) получим

$$\begin{aligned} \iint_T |g_q(x, y)| dx dy & \leq \iint_T |\phi_{n_q}(x, y)| dx dy \\ & \quad + \iint_T |g_{\nu_q}(x, y)| dx dy + \iint_T |\phi_{\nu_q}(x, y)| dx dy \leq \eta 2^{-q}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x, y)\}_{q=1}^{\infty}$ ($g_1(x, y) = \phi_{n_1}(x, y)$) и полиномов $\{Q_{\nu_q}(x, y)\}$, удовлетворяющих условиям (3.21)–(3.23) для всех $q > 1$. Из (3.23) вытекает, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \iint_T |g_q(x, y)| dx dy < \infty.$$

Определим функцию $\tilde{f}(x, y)$ и последовательность чисел $\{\varepsilon_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x, y), \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{k,s} = \begin{cases} 1 & \text{при } (k, s) \in \Omega_0 := \bigcup_{q=1}^{\infty} (M_{\nu_q}, M_{\nu_q+1}] \times (M_{\nu_q}, M_{\nu_q+1}], \\ 0 & \text{при } (k, s) \notin \Omega_0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Учитывая соотношения (3.14), (3.21) и (3.24), получим $\tilde{f} \in L^1(T)$, $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$, $(x, y) \in E$. Поскольку $g_1(x, y) = \phi_{n_1}(x, y)$, из (3.13), (3.16) и (3.24) будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_T |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy & \leq \iint_T |f(x, y) - \phi_{n_1}(x, y)| dx dy \\ & \quad + \sum_{q=2}^{\infty} \iint_T |g_q(x, y)| dx dy \leq \eta. \end{aligned}$$

Из (3.3), (3.12), (3.23)–(3.25) для всех $q \geq 2$ следует, что

$$\begin{aligned} & \iint_T \left| \sum_{k,s=0}^{M_{\nu_q+1}} \varepsilon_{k,s} d_{k,s} f_k(x) f_s(y) - \tilde{f}(x, y) \right| dx dy \\ &= \iint_T \left| \sum_{j=1}^q \sum_{k,s=M_{\nu_j}+1}^{M_{\nu_j+1}} c_{k,s}^{(\nu_j)} f_k(x) f_s(y) - \tilde{f}(x, y) \right| dx dy \\ &\leq \iint_T \left| \sum_{j=1}^q [g_j(x, y) - Q_{\nu_j}(x, y)] \right| dx dy + \sum_{j=q+1}^{\infty} \iint_T |g_j(x, y)| dx dy \leq 2^{-q}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Отсюда

$$\varepsilon_{k,s} d_{k,s} = c_{k,s}(\tilde{f}) = \iint_T \tilde{f}(t, \tau) f_k(t) f_s(\tau) dt d\tau. \quad (3.27)$$

Следовательно, из (3.24) и (3.25) вытекает, что

$$c_{k,s}(\tilde{f}) = d_{k,s}, \quad (k, s) \in \Lambda(f) = \text{спец}(\tilde{f}) \subset \Omega_0.$$

Покажем, что двойной ряд Фурье — Франклина

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} c_{k,s}(\tilde{f}) f_k(x) f_s(y) = \sum_{k,s=0}^{\infty} \varepsilon_{k,s} d_{k,s} f_k(x) f_s(y)$$

функции $\tilde{f}(x, y)$ абсолютно сходится п. в. на T . Обозначая

$$B_q = \{(x, y) \subset T = [0, 1]^2; |\phi_{\nu_q}(x, y)| dx \leq \eta 2^{-3q}\}, \quad q \geq 2, \quad (3.28)$$

будем иметь

$$\eta 2^{-3q} |T \setminus B_q| \leq \iint_{[0,1] \setminus B_q} |\phi_{\nu_q}(x, y)| dx dy \leq \eta 2^{-4q}, \quad q \geq 2.$$

Следовательно, $|B_q| > 1 - 2^{-q}$.

Положим

$$B = \bigcup_{k=2}^{\infty} \bigcap_{q=k}^{\infty} (B_q \cap G_{\nu_q}). \quad (3.29)$$

Отсюда и из того, что $|B_q \cap G_{\nu_q}| > 1 - 2^{-q+4}$ (см. (3.2), (3.4), (3.19) и (3.28)), вытекает, что $|B| = 1$.

Пусть $(x, y) \in B$. Существует натуральное число q_0 такое, что $(x, y) \in B_q \cap G_{\nu_q}$, $q \geq q_0$.

Учитывая соотношения (3.2), (3.8), (3.19) и (3.28), получим

$$\sum_{k,s=M_{\nu_q}+1}^{M_{\nu_q+1}} |c_{k,s}^{(\nu_q)} f_k(x) f_s(y)| \leq \frac{B \left(\ln \frac{1}{\delta_{\nu_q}} \right)^2 |\phi_{\nu_q}(x, y)|}{\delta_{\nu_q}^2} + 2^{-\nu_q} \leq B \sqrt{\eta} q^2 2^{-q} + 2^{-q}. \quad (3.30)$$

Отсюда и из (3.12), (3.26), (3.27), (3.29) и (3.30) заключаем, что п. в. на T

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} |c_{k,s}(\tilde{f}) f_k(x) f_s(y)| < \infty.$$

Нетрудно убедиться, что (см. (3.26), (3.27) и (3.30)) п. в. на T

$$\lim_{N,M \rightarrow \infty} \sum_{k,s=0}^{N,M} c_{k,s}(\tilde{f}) f_k(x) f_s(y) = \tilde{f}(x, y).$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лузин Н. Н. К основной теореме интегрального исчисления // Мат. сб. 1912. Т. 28, № 2. С. 266–294.
2. Меньшов Д. Е. О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1942. Т. 53, № 2. С. 67–96.
3. Franklin Ph. A set of continuous orthogonal functions // Math. Ann. 1928. V. 100. P. 522–528.
4. Арутюнян Ф. Г. О рядах по системе Хаара // Докл. АН Арм ССР. Сер. мат. 1966. Т. 42. С. 134–140.
5. Геворкян Г. Г. О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина // Докл. АН Арм ССР. Сер. мат. 1986. Т. 83, № 1. С. 15–18.
6. Katznelson Y. On a theorem of Menshoeff // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 53. P. 396–398.
7. Grigoryan M. The unconditional convergence of Fourier–Haar series // Bull. TICMI. 2014. V. 18, N 1. P. 130–140.
8. Галоян Л. Н., Григорян М. Г., Кобелян А. Х. О сходимости рядов Фурье по классическим системам // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 7. С. 55–94.
9. Grigoryan M. G., Grigoryan T. M. On the absolute convergence of Schauder series // Adv. Theoret. Appl. Math. 2014. V. 9, N 1. P. 11–14.
10. Oniani G. G. On the divergence of multiple Fourier–Haar series // Anal. Math. 2012. V. 38. P. 227–247.

Поступила в редакцию 17 августа 2019 г.

После доработки 17 августа 2019 г.

Принята к публикации 19 февраля 2020 г.

Геворкян Гегам Григорьевич, Григорян Мартин Геворгович
Ереванский государственный университет,
ул. А. Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения
ggg@ysu.am, gmarting@ysu.am