A. V. Greshnov, Distance functions between sets in (q_1, q_2) -quasimetric spaces, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 528–538

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.304>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.97.219

April 26, 2023, 13:27:41

ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ
МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ
(q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. В. Грешнов

Аннотация. Доказываются теоремы о полноте множества всех d -замкнутых d -ограниченных множеств (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, d) , снабженного соответствующими аналогами расстояния по Хаусдорфу.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.304

Ключевые слова: (q_1, q_2) -квазиметрика, хаусдорфово расстояние, замкнутое множество, полнота.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Квазиметрическим пространством [1] называется пара (X, d) , где X — множество, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$ — квазиметрика, т. е. такая функция, что для нее выполняются аксиома тождества*

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

и неравенство треугольника

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Если для квазиметрического пространства (X, d) существует константа q_0 такая, что $d(x, y) \leq q_0 d(y, x)$ для всех $x, y \in X$, то пару (X, d) назовем q_0 -симметрическим квазиметрическим пространством или симметрическим в случае $q_0 = 1$ [2]. Если для пары (X, d) вместо неравенства треугольника выполняется (q_1, q_2) -обобщенное неравенство треугольника, т. е.

$$d(x, y) \leq q_1 d(x, z) + q_2 d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X,$$

то (X, d) называется (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством, а функция d — (q_1, q_2) -квазиметрикой [2].

Выражение $d(x, y)$ обозначает (q_1, q_2) -квазирасстояние именно от точки x до точки y . Символом $\bar{d}$ обозначаем сопряженную к d (q_2, q_1) -квазиметрику [2], которая определяется как $\bar{d}(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$. Если $q_0 = q_1 = q_2 = 1$, то (X, d) является метрическим пространством. Несложно проверить, что всегда $\min\{q_0, q_1, q_2\} \geq 1$ (см. также [2]).

Концепция (q_1, q_2) -квазиметрических пространств введена в [2–4], где доказаны теоремы о точках совпадения липшицевых и накрывающих отображений (q_1, q_2) -квазиметрических пространств. Эквирегулярные пространства Карно —

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314–2019–0006).

Каратеодори [5], снабженные Вох-квазиметриками, а также их C^1 -гладкие обобщения [6] являются нетривиальными примерами $(1, q_2)$ -квазиметрических пространств [7].

Для введения топологии в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах и последующих формулировок рассмотрим множества

$$B_d^\circ(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, \quad B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\},$$

которые соответственно будем называть *d-открытым* и *d-замкнутым* шарами с центром в точке x радиуса r соответственно. Множество $U \subset X$ будем называть *d-открытым*, если для любой точки $u \in U$ найдется число $r_u > 0$ такое, что $B_d^\circ(u, r_u) \subset U$. Так определенные *d-открытые* множества, очевидно, задают на X топологию, которую будем обозначать через τ_d . Множество называется *d-замкнутым*, если его дополнение открыто. (Заметим, что множества $B_d^\circ(x, r)$ и $B_d(x, r)$ могут и не быть *d-открытыми* и *d-замкнутыми*.) Точка x_0 называется *точкой d-прикосновения* множества $A \subset (X, d)$, если для любого $\varepsilon > 0$ имеем $A \cap B_d^\circ(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$. Точка x_0 называется *d-предельной точкой* множества $A \subset (X, d)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in A$, $x_\varepsilon \neq x_0$, такая, что $x_\varepsilon \in B_d^\circ(x_0, \varepsilon)$. Несложно видеть, что множество A *d-замкнуто* тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

В настоящей работе исследованы свойства аналогов расстояния по Хаусдорфу на (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах (X, d) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (q_1, q_2) -Расстоянием Хаусдорфа между подмножествами A_1, A_2 (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, d) называется величина

$$H(A_1, A_2) = \inf\{\varepsilon \mid A_1 \subseteq N_\varepsilon(A_2), A_2 \subseteq N_\varepsilon(A_1)\}, \quad N_\varepsilon(V) = \bigcup_{\substack{x \in V, \\ V \subset (X, d)}} B_d^\circ(x, \varepsilon).$$

В дальнейшем символом $\mathcal{M}(X)$ обозначается множество всех *d-замкнутых d-ограниченных* подмножеств множества X . Известно, что для метрических пространств функция H действительно является метрикой на $\mathcal{M}(X)$ [8], однако для общих (q_1, q_2) -квазиметрических пространств это может не выполняться в связи с отсутствием следующего свойства.

Свойство C1. $A, B \in \mathcal{M}(X)$, $B \subseteq N_\varepsilon(A) \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow B \subseteq A$.

Примером квазиметрического пространства, для которого не выполняется свойство C1, является прямая Зоргенфрея $S = (\mathbb{R}, d_S)$, где $d_S(x, y) = y - x$ в случае $y \geq x$ и $d_S(x, y) = 1$ в случае $y < x$.

В §1 указаны простейшие ограничения топологического характера, при которых свойство C1 имеет место для (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, d) (утверждение 1, следствия 1, 2). Если (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет свойству C1, то функция множеств H будет (q_1, q_2) -квазиметрикой на $\mathcal{M}(X)$ (см. следствие 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Расстоянием от множества $A \subset X$ до множества $B \subset X$ на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. (q_1, q_2) -Отклонением по Хаусдорфу множества $A \subset X$ от множества $B \subset X$ на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина

$$h^+(A, B) = \sup_{a \in A} \text{dist}(a, B).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Расширенной (q_1, q_2) -квазиметрикой Хаусдорфа на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина*

$$h(A, B) = \max\{h^+(A, B), h^+(B, A)\} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}(X).$$

В отличие от H функция h действительно является симметрической (q_1, q_2) -квазиметрикой на $\mathcal{M}(X)$ (см. §2 настоящей работы, а также [2]). Известно (см. [8]), что на метрических пространствах понятие расширенной метрики Хаусдорфа является переформулировкой понятия обычной метрики Хаусдорфа. В §2 настоящей работы доказано (следствие 5), что на q_0 -симметрических (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах H и h билишпицево эквивалентны. Однако в общем случае функции множеств H и h принципиально различны, их билишпицева эквивалентность ниоткуда не следует (см. пример 4 в §2).

В §2 доказана

Теорема 1. Пусть (X, d) — полное (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство, где функция d полунепрерывна снизу по второму аргументу. Тогда $(\mathcal{M}(X), h)$ полное.

Функции H и h имеют широкое применение в теории многозначных отображений (см., например, [9, 10]). Развивая теорию многозначных отображений на общих (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах (X, d) , можно столкнуться с тем, что в ряде вопросов аналитического характера свойств функций H и h может «не хватать». Например, пусть $A, B \in \mathcal{M}(X)$, $A \cap B \neq \emptyset$, при этом существуют последовательности $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathcal{M}(X)$ такие, что

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} h(A, A_n) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h(B, B_n) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} H(A, A_n) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} H(B, B_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Следует ли из (1), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(A_n, B_n) = 0$ (или $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(B_n, A_n) = 0$)? В случае метрических пространств это так; также данный факт будет иметь место и в случае q_0 -симметрических (q_1, q_2) -квазиметрических пространств, однако в общем случае условия (1) не гарантируют требуемой сходимости. С другой стороны, несложно видеть, что если, как и выше, множества A, B пересекаются, то

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} H^+(A_n, A) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h^+(B, B_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(A_n, B_n) = 0,$$

где

$$H^+(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid B \subseteq N_\varepsilon(A)\}.$$

В самом деле, можно заметить, что первое условие равносильно тому, что для каждого $a \in A$ существует последовательность $a_n \in A_n$ такая, что $d(a_n, a) \rightarrow 0$, а второе условие равносильно тому, что для каждого $b \in B$ существует последовательность $b_n \in B$ такая, что $d(b, b_n) \rightarrow 0$. Рассмотрим элемент c из множества $A \cap B$. Используя (q_1, q_2) -обобщенное неравенство треугольника, получаем

$$d(a_n, b_n) \leq q_1 d(a_n, c) + q_2 d(c, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

что влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(A_n, B_n) = 0.$$

Это приводит нас к рассмотрению следующей функции множеств:

$$g(A, B) = h^+(A, B) + H^+(A, B),$$

которая при условии выполнения свойства C1 является несимметрической (q_1, q_2) -квазиметрикой (см. свойство 4).

В §2 доказана следующая

Теорема 2. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) , удовлетворяющее свойству C1, полное слева. Тогда $(\mathcal{M}(X), g)$ полное.

Настоящая работа основана на подходах и технике, развитой в [2–4]. Также следует отметить работу [11], в которой изучена топология f -квазиметрических пространств, включающих в себя и (q_1, q_2) -квазиметрические пространства; в [11], в частности, читатель может найти для себя необходимые разъяснения и иллюстрации тех или иных топологических объектов f -квазиметрических пространств.

§ 1. Определения и обозначения. Некоторые свойства (q_1, q_2) -квазиметрических пространств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция f , определенная на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) , называется *полу непрерывной сверху (снизу) в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $r_{x_0, \varepsilon} > 0$ такое, что

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (f(x_0) < f(x) + \varepsilon) \quad \forall x \in B_d^\circ(x_0, r_{x_0, \varepsilon}).$$

Если функция f одновременно полу непрерывна сверху и снизу в точке x_0 , то говорят, что f *непрерывна в точке* x_0 . Функция $F(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (полу)непрерывна (сверху или снизу) по первому аргументу, если при каждом фиксированном y (полу)непрерывна (сверху или снизу) функция $F_1(x) = F(x, y)$. Точно так же определяется (полу)непрерывность (сверху или снизу) функции $F(x, y)$ и по второму аргументу.

Свойство 1. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрика $d(x, y)$ полу непрерывна сверху (снизу) по второму аргументу. Тогда множество $B_d^\circ(x, r)$ d -открыто (множество $B_d(x, r)$ d -замкнуто).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, например, что множество $B_d(x, r)$ d -замкнуто. Пусть $x_0 \in X$ является предельной точкой множества $B_d(x, r)$. Покажем, что $x_0 \in B_d(x, r)$. В самом деле, если это не так, то $d(x, x_0) > r$ и в силу полу непрерывности снизу последнее строгое неравенство выполняется не только для точки x_0 , но и для всех x_1 из некоторого ε -шара с центром в точке x_0 , что противоречит тому, что x_0 — предельная точка множества $B_d(x, r)$.

d -Открытость множества $B_d^\circ(x, r)$ проверяется аналогично.

Свойство 1 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Последовательность $\{x_i\} \subset (X, d)$ d -сходится к точке $x_0 \in X$ ($x_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x_0$), если каждое множество $B_d^\circ(x_0, \varepsilon)$ содержит все точки x_i начиная с некоторой точки. Точка x_0 в этом случае называется d -пределом последовательности $\{x_i\}$. Иначе говоря, последовательность $\{x_i\}$ d -сходится к x_0 , если $\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_0, x_i) = 0$.

В q_0 -симметрических (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах любая d -сходящаяся последовательность имеет единственный d -предел, но в общем случае последовательности в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах могут иметь более одного d -предела. Ниже приведен пример, который понадобится в дальнейшем.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим на стандартной евклидовой плоскости с системой координат XOY множество $Z = L \cup A$, где L — ось OX , а A — некоторая точка, не принадлежащая L . Определим на Z квазиметрику

$$\rho(C, D) = \begin{cases} y - x, & y \geq x, \\ 1, & y < x, \end{cases}$$

где $C, D \in L$, $C = C(x, 0)$, $D = D(y, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\rho(A, C) = \rho(O, C)$ для всех $C \in (L \setminus O)$, $\rho(A, O) = \rho(O, A) = 1$. Несложно видеть, что (Z, ρ) является квазиметрическим пространством. Понятно, что если $\rho(O, C_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, то и $\rho(A, C_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, и наоборот.

Точно так же, как выше, используя понятия $B_{\bar{d}}$, B_d° , можно определить топологию $\tau_{\bar{d}}$ на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Последовательность $\{x_n\}$, принадлежащая (q_1, q_2) -квазиметрическому пространству (X, d) , называется *правой фундаментальной последовательностью* или *правой последовательностью Коши* (*левой фундаментальной последовательностью* или *левой последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех натуральных m, n таких, что $N < m < n$, выполняется

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (\bar{d}(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 [2]. (q_1, q_2) -Квазиметрическое пространство (X, d) называется *полным*, если его любая правая последовательность Коши имеет d -предел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. (q_1, q_2) -Квазиметрическое пространство (X, d) называется *полным слева*, если его любая левая последовательность Коши имеет d -предел, принадлежащий X .

В других обозначениях и терминах определение 10 можно найти в [12].

Единственность предела в определениях 9 и 10, естественно, не предполагается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Множество $A \subset (X, d)$ называется *d -ограниченным* (*$\bar{d}$ -ограниченным*), если найдется константа K такая, что $d(x, y) < K \quad \forall y \in A$ ($\bar{d}(x, y) < K \quad \forall y \in A$) для некоторой точки $x \in X$.

Из d -ограниченности множества не следует его $\bar{d}$ -ограниченность; в качестве примера можно рассмотреть квазиметрическое пространство (Z, ρ) из примера 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Назовем (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) *одинаково ограничивающим*, если любое d -ограниченное множество $A \subset X$ $\bar{d}$ -ограниченное, и наоборот.

В случае одинаково ограничивающих (q_1, q_2) -квазиметрических пространств (X, d) при соответствующих рассмотрениях будем использовать термин «ограниченная последовательность».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. (q_1, q_2) -Квазиметрическое пространство (X, d) *удовлетворяет $(\bar{d}, d)$ -свойству Гейне — Бореля*, если из любой $\bar{d}$ -ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно выбрать d -сходящуюся к некоторому элементу $x \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$.

Аналогично можно определить (d, d) -свойство Гейне — Бореля, заменяя в определении 13 соответственно $\bar{d}$ -ограниченность d -ограниченностью, и т. п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Одинаково ограничивающее (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) *удовлетворяет d -свойству Гейне — Бореля* (*$\bar{d}$ -свойству Гейне — Бореля*), если из любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно выбрать d -сходящуюся ($\bar{d}$ -сходящуюся) к некоторому элементу $x \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$.

ПРИМЕР 2. В примере 1 вместо оси OX возьмем ее подмножество $I = \{C(x, 0) \mid x \in [-1, 1]\}$. Обозначим $Z' = I \cup A$. Можно проверить, что (Z', ρ) является квазиметрическим пространством. При этом квазиметрическое пространство (Z', ρ) одинаково ограничивающее в силу того, что расстояния $\rho(x, y)$, $\bar{\rho}(x, y)$ между его любыми двумя элементами не превосходят пяти, и оно удовлетворяет d -свойству Гейне — Бореля.

Утверждение 1. (q_1, q_2) -Квазиметрическое пространство (X, d) , удовлетворяющее $(\bar{d}, d)$ -свойству Гейне — Бореля, удовлетворяет свойству С1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A, B \in \mathcal{M}(X)$, $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим произвольную точку $b \in B$. Из того, что $B \subset N_\varepsilon(A)$, где ε — произвольное положительное число, вытекает существование точек $a_{\varepsilon_n} \in A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, таких, что $b \in B_d^\circ(a_{\varepsilon_n}, \varepsilon_n)$, откуда $d(a_{\varepsilon_n}, b) < \varepsilon_n$.

По $(\bar{d}, d)$ -свойству Гейне — Бореля найдутся точка $a \in X$ и подпоследовательность $\{a_{\varepsilon_m}\}$ последовательности $\{a_{\varepsilon_n}\}$ такие, что $\lim_{m \rightarrow \infty} d(a, a_{\varepsilon_m}) = 0$. Так как A — d -замкнутое множество, то $a \in A$. Имеем

$$d(a, b) \leq q_1 d(a, a_{\varepsilon_m}) + q_2 d(a_{\varepsilon_m}, b) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

следовательно, $d(a, b) = 0$, откуда $a = b$. Утверждение 1 доказано.

Следствие 1. Одинаково ограничивающее (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) , удовлетворяющее d -свойству Гейне — Бореля, удовлетворяет свойству С1.

Утверждение 2. Пусть $A, B \subset (X, d)$, $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, $\varepsilon > 0$, при этом A $\bar{d}$ -замкнутое. Тогда $B \subseteq A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку $b \in B$. Найдутся точки $a_{\varepsilon_n} \in A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, такие, что $b \in B_d^\circ(a_{\varepsilon_n}, \varepsilon_n)$, тогда

$$d(a_{\varepsilon_n}, b) = \bar{d}(b, a_{\varepsilon_n}) < \varepsilon_n. \quad (2)$$

Из (2) следует, что точка b является $\bar{d}$ -предельной точкой множества A , следовательно, $b \in A$.

Утверждение 2 доказано.

Следствие 2. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) обладает следующим свойством: его любое d -замкнутое подмножество $\bar{d}$ -замкнуто. Тогда для множеств из $\mathcal{M}(X)$ выполняется свойство С1.

ПРИМЕР 3. В квазиметрическом пространстве (Z, ρ) из примера 1 рассмотрим множества $J = \{C(x, 0) \mid x \in [1, 2)\}$, $J' = \{C(x, 0) \mid x \in [1, 2]\}$. Несложно видеть, что J , J' являются ρ -замкнутыми множествами. С другой стороны, $J' \subset \bigcup_{x \in J} B^\circ(x, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, т. е. для (Z, ρ) условие С1 не выполняется.

При этом $(\bar{\rho}, \rho)$ -свойство Гейне — Бореля для (Z, ρ) не выполняется.

**§ 2. Функции расстояния между множествами
на (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах**

Свойство 2. Пусть (X, d) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Тогда

- (1⁰) $H(A, B) \geq 0$, $A, B \subset (X, d)$;
- (2⁰) $H(A, B) = H(B, A)$, $A, B \subset (X, d)$;
- (3⁰) $H^+(A, C) \leq q_1 H^+(A, B) + q_2 H^+(B, C)$, $A, B, C \subset (X, d)$;
- (4⁰) $H(A, C) \leq q_1 H(A, B) + q_2 H(B, C)$, $A, B, C \subset (X, d)$;
- (5⁰) пусть A, B — d -замкнутые множества, принадлежащие q_0 -симметрическому (q_1, q_2) -квазиметрическому пространству (X, d) , тогда из тождества $H(A, B) = 0$ следует, что $A = B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пп. (1⁰), (2⁰) очевидны.

(3⁰) Пусть $H(A, B) = \varepsilon_1$, $H(B, C) = \varepsilon_2$. Тогда для любого $\delta > 0$

$$B \subset N_{\varepsilon_1 + \delta}(A), \quad C \subset N_{\varepsilon_2 + \delta}(B),$$

тем самым $C \subset N_{\varepsilon_3}(A)$, $\varepsilon_3 = q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2 + (q_1 + q_2)\delta$, откуда следует, что $H^+(A, C) \leq \varepsilon_3$. Так как δ выбиралось произвольно, то

$$H^+(A, C) \leq q_1 H^+(A, B) + q_2 H^+(B, C). \quad (3)$$

П. 4⁰ доказывается точно так же, как и п. 3⁰.

(5⁰) Рассмотрим произвольную точку $a \in A$. Так как $H(A, B) = 0$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $b_\varepsilon \in B$ такая, что $a \in B_d^\circ(b_\varepsilon, \varepsilon)$, откуда следует, что $b_\varepsilon \in B_d^\circ(a, q_0 \varepsilon)$. Отсюда вытекает, что a — предельная точка или точка прикосновения множества B , поэтому $a \in B$. Тем самым $A \subseteq B$. Точно так же доказывается, что $B \subseteq A$.

Свойство 2 доказано.

Несколько другая идея используется при доказательстве утверждения п. 5⁰ для метрических пространств в [8], однако приведенное там рассуждение также использует симметрическое свойство метрики.

Следствие 3. Пусть (X, d) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство, удовлетворяющее свойству С1. Тогда $(\mathcal{M}(X), H)$ является симметрическим (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие 3 вытекает из пп. 1⁰–4⁰ свойства 2, а также того очевидного факта, что выполнение свойства С1 влечет выполнение аксиомы тождества для $H : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Следствие 3 доказано.

Свойство 3. Пусть (X, d) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Тогда

- (1⁰) $h^+(A, B) \geq 0$, $A, B \subset (X, d)$;
- (2⁰) $h^+(A, B) \geq \text{dist}(A, B)$, $A, B \subset (X, d)$;
- (3⁰) пусть A, B — d -замкнутые множества, тогда $h^+(A, B) = 0 \Rightarrow A \subseteq B$;
- (4⁰) $h^+(A, B) \leq q_1 h^+(A, C) + q_2 h^+(C, B)$, $A, B, C \subset (X, d)$;
- (5⁰) если (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) q_0 -обобщенно симметрическое, то

$$\frac{1}{q_0} H^+(B, A) \leq h^+(A, B) \leq q_0 H^+(B, A), \quad A, B \subset (X, d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пп. (1⁰), (2⁰) очевидны.

(3⁰) Для любой точки $a \in A$ имеем $d(a, B) = 0$, следовательно, a является предельной точкой или точкой прикосновения множества B , т. е. $a \in B$.

(4⁰) Для любого $a \in A$ имеем

$$\text{dist}(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b) \leq \inf_{b \in B} (q_1 d(a, z) + q_2 d(z, b)) = q_1 d(a, z) + q_2 \text{dist}(z, B),$$

где $z \in X$ — произвольная точка. Тогда

$$\begin{aligned} \text{dist}(a, B) &\leq q_1 d(a, z) + q_2 h^+(C, B) \Rightarrow \text{dist}(a, B) \leq q_1 \inf_{z \in C} d(x, z) + q_2 h^+(C, B) \\ &= q_1 \text{dist}(x, C) + q_2 h^+(C, B) \leq q_1 h^+(A, C) + q_2 h^+(C, B) \\ &\Rightarrow h^+(A, B) \leq q_1 h^+(A, C) + q_2 h^+(C, B). \end{aligned}$$

(5⁰) Пусть $\text{dist}(A, B) < \varepsilon$. Тогда для любой точки $a \in A$ найдется точка $b_a \in B$ такая, что $d(a, b_a) < \varepsilon$. Тем самым $a \in B_d^\circ(b_a, q_0 \varepsilon)$, поэтому $A \subset N_{q_0 \varepsilon}(B)$. Имеем $\inf \varepsilon = \text{dist}(A, B)$, тогда, учитывая п. 2⁰, получаем

$$\begin{aligned} h^+(A, B) &\geq \text{dist}(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset N_{q_0 \varepsilon}(B)\} \\ &= \frac{1}{q_0} \inf\{\varepsilon \mid A \subset N_\varepsilon(B)\} = \frac{1}{q_0} H^+(B, A). \end{aligned}$$

Пусть $A \subset N_\varepsilon(B)$. Тогда для любой точки $a \in A$ имеем $\text{dist}(a, B) \leq q_0 \varepsilon$, следовательно, $h^+(A, B) \leq q_0 \varepsilon$, поэтому

$$h^+(A, B) \leq q_0 \inf\{\varepsilon \mid A \subset N_\varepsilon(B)\} = q_0 H^+(B, A).$$

Свойство 3 доказано.

Следствие 4. Пусть (X, d) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Тогда $(\mathcal{M}(X), h)$ является симметрическим (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством.

Следствие 5. На q_0 -обобщенно симметрическом (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) имеет место следующее двойное неравенство:

$$\frac{H(A, B)}{q_0} \leq h(A, B) \leq q_0 H(A, B) \quad \forall A, B \subset X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат вытекает из п. 5⁰ свойства 3. Следствие 5 доказано.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим подмножества $A = [0, 1]$ и $B = [0, 1)$ прямой Зоргенфрея S . Легко видеть, что $A, B \in \mathcal{M}(S)$, при этом $H(A, B) = 0$, $h(A, B) = 1$.

Свойство 4. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет свойству С1. Тогда $(\mathcal{M}(X), g)$ является (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A, B \in (\mathcal{M}(X), g)$. Если $h^+(A, B) = 0$, то по п. 3⁰ свойства 3 имеем $A \subseteq B$. Если $H^+(A, B) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, откуда в силу выполнения свойства С1 получаем $B \subseteq A$. Отсюда следует, что

$$g(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Обобщенное (q_1, q_2) -неравенство треугольника выполняется для g , так как оно выполняется для h^+ (см. свойство 3) и для H^+ (см. (3)).

Свойство 4 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\{S_n\} \subset (\mathcal{M}(X), h)$ — правая последовательность Коши в (X, h) , т. е. в данном случае

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N, m < n \quad h(S_m, S_n) < \varepsilon.$$

Обозначим через S множество точек $x \in X$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $B_d^\circ(x, \varepsilon) \cap S_n \neq \emptyset$ для всех $n > n_\varepsilon$.

Множество S d -замкнуто. Действительно, пусть a — предельная точка для множества S , т. е. найдется последовательность точек $\{a_n\} \subset S$, $a \notin \{a_n\}$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, a_n) = 0$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $a_m \in B_d^\circ(a, \varepsilon)$, $m > n_\varepsilon$. Так как $a_m \in S$, для любого $\varepsilon' > 0$ найдется число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $B_d^\circ(a_m, \varepsilon') \cap S_k \neq \emptyset$. Поэтому найдется точка $b_k \in (B_d^\circ(a_m, \varepsilon') \cap S_k)$, откуда следует, что $b_k \in B_d^\circ(a, q_1\varepsilon + q_2\varepsilon')$, стало быть, $a \in S$.

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h(S, S_n) = 0$. Пусть $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таково, что $h(S_n, S_m) < \varepsilon$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $n > m > n_\varepsilon$.

(1⁰) Покажем, что $h^+(S, S_n) < K\varepsilon$, где константа K не зависит от ε . Пусть $x \in S$. Найдется $m > n_\varepsilon$ такое, что $B_d^\circ(x, \varepsilon) \cap S_m \neq \emptyset$, откуда следует существование такой точки $y \in S_m$, что $d(x, y) < \varepsilon$. Имеем

$$h(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow h^+(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \text{dist}(y, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists z \in S_n \quad d(y, z) \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$d(x, z) \leq q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z) < (q_1 + q_2)\varepsilon \Rightarrow h^+(S, S_n) < (q_1 + q_2)\varepsilon.$$

(2⁰) Покажем, что $h^+(S_n, S) < K'\varepsilon$, где константа K' не зависит от ε . Зафиксируем некоторое положительное число $\delta < 1$ такое, что $q_2\delta < 1$. Пусть $x \in S_n$. Тогда для любого $n_1 > n_\varepsilon$ найдется точка $x_1 \in S_{n_1}$ такая, что $d(x, x_1) < 2\varepsilon$. Определим n_1 так, что $h(S_{n_1}, S_{n_2}) < \varepsilon\delta$ для всех $n_2 > n_1$. Найдется точка $x_2 \in S_{n_2}$ такая, что $d(x_1, x_2) < 2\varepsilon\delta$. Определим n_2 так, что $h(S_{n_2}, S_{n_3}) < \varepsilon\delta^2$ для всех $n_3 > n_2$. Тогда найдется точка $x_3 \in S_{n_3}$ такая, что $d(x_2, x_3) < 2\varepsilon\delta^2$, и т. д. В результате получаем последовательность $\{x_i\}$. Покажем, что она является правой последовательностью Коши. Имеем

$$\begin{aligned} d(x_l, x_{l+k}) &\leq q_1 d(x_l, x_{l+1}) + q_2 d(x_{l+1}, x_{l+k}) \\ &\leq 2q_1\varepsilon\delta^l + q_2(q_1 d(x_{l+1}, x_{l+2}) + q_2 d(x_{l+2}, x_{l+k})) \\ &\leq 2q_1\varepsilon\delta^l + 2q_2q_1\varepsilon\delta^{l+1} + q_2^2(q_1 d(x_{l+2}, x_{l+3}) + q_2 d(x_{l+3}, x_{l+k})) \\ &\leq 2q_1\varepsilon\delta^l + 2q_1q_2\varepsilon\delta^{l+1} + 2q_1q_2^2\varepsilon\delta^{l+2} + q_2^3(q_1 d(x_{l+3}, x_{l+4}) + q_2 d(x_{l+4}, x_{l+k})) \\ &\leq \dots \leq 2q_1\varepsilon\delta^l(1 + q_2\delta + \dots + (q_2\delta)^{k-1}) = 2q_1\varepsilon\delta^l \frac{1 - (q_2\delta)^k}{1 - q_2\delta} < \frac{2q_1\varepsilon\delta^l}{1 - q_2\delta}, \quad (4) \end{aligned}$$

откуда вытекает, что последовательность $\{x_i\}$ является правой последовательностью Коши. Поэтому в силу полноты пространства (X, d) существует точка $y \in X$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} d(y, x_k) = 0$, откуда с учетом определения множества S вытекает, что $y \in S$. Из (4), в частности, следует, что $d(x_1, x_{k+1}) < \frac{2q_1\varepsilon\delta}{1 - q_2\delta}$, откуда

$$d(x, x_k) \leq q_1 d(x, x_1) + \frac{2q_1q_2\varepsilon\delta}{1 - q_2\delta} \leq 2q_1\varepsilon \left(1 + \frac{q_2\delta}{1 - q_2\delta}\right) = \frac{2q_1\varepsilon}{1 - q_2\delta}. \quad (5)$$

Используя полунепрерывность снизу по второму аргументу функции d и (5), получаем

$$d(x, y) \leq \frac{2q_1\varepsilon}{1 - q_2\delta}, \quad K' = \frac{2q_1}{1 - q_2\delta}. \quad (6)$$

Таким образом, для каждой точки $x \in S_n$ существует точка $y \in S$ такая, что имеет место оценка (6), откуда $h^+(S_n, S) < K'\varepsilon$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 3. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) таково, что (q_2, q_1) -квазиметрическое пространство $(X, \bar{d})$ полное слева. Тогда (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство $(\mathcal{M}(X), h)$ полное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3 проводится точно так же, как и доказательство теоремы 1, до того места, где получили, что $\{x_i\}$ является правой последовательностью Коши в (X, d) . Но тогда $\{x_i\}$ — левая последовательность Коши в $(X, \bar{d})$, поэтому (в силу полноты слева) существует точка $y \in X$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{d}(y, x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, y) = 0.$$

Доказательство теоремы 3 вытекает из следующего неравенства:

$$d(x, y) \leq q_1 d(x, x_k) + q_2 d(x_k, y).$$

Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\{S_n\} \subset (\mathcal{M}(X), g)$ — левая последовательность Коши в (X, g) , т. е. в данном случае

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N, m > n \quad g(S_m, S_n) < \varepsilon.$$

Обозначим через S множество точек $x \in X$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $B_d^0(x, \varepsilon) \cap S_n \neq \emptyset$ для всех $n > n_\varepsilon$.

Точно так же, как в теореме 1, показывается, что множество S d -замкнуто.

(1⁰) Покажем, что $h^+(S, S_n) < K\varepsilon$, где константа K не зависит от ε . Пусть $x \in S$. Найдется число $m > n_\varepsilon$ такое, что $B_d^0(x, \varepsilon) \cap S_m \neq \emptyset$, откуда следует существование такой точки $y \in S_m$, $m \geq n$, что $d(x, y) < \varepsilon$. Имеем

$$g(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow h^+(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \text{dist}(y, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists z \in S_n \quad d(y, z) \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$d(x, z) \leq q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z) < (q_1 + q_2)\varepsilon \Rightarrow h^+(S, S_n) < K\varepsilon.$$

(2⁰) Покажем, что $H^+(S, S_n) < K'\varepsilon$, где константа K' не зависит от ε . Пусть $x \in S_n$. Зафиксируем некоторое положительное число $\delta < 1$ такое, что $q_1\delta < 1$. Выберем $n_1 > n$ так, что $H^+(S_m, S_{n_1}) < \varepsilon\delta$ для всех $m > n_1$, и n_2 так, что $H^+(S_m, S_{n_2}) < \varepsilon\delta^2$ для всех $m > n_2$, и т. д. Из определения функции множеств H^+ вытекает, что найдутся точки $x_i \in S_{n_i}$ такие, что $d(x_1, x) < \varepsilon$, $d(x_2, x_1) < \varepsilon\delta$, $d(x_3, x_2) < \varepsilon\delta^2$, и т. д. Докажем, что $\{x_i\}$ является левой последовательностью Коши. Имеем

$$\begin{aligned} d(x_{l+k}, x_l) &\leq q_1 d(x_{l+k}, x_{l+1}) + q_2 d(x_{l+1}, x_l) \leq q_1 d(x_{l+k}, x_{l+1}) + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\leq q_1 (q_1 d(x_{l+k}, x_{l+2}) + q_2 d(x_{l+2}, x_{l+1})) + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\leq q_1^2 (q_1 d(x_{l+k}, x_{l+3}) + q_2 d(x_{l+3}, x_{l+2})) + q_1 q_2 \varepsilon \delta^{l+1} + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\leq q_1^3 (q_1 d(x_{l+k}, x_{l+4}) + q_2 d(x_{l+4}, x_{l+3})) + q_1^2 q_2 \varepsilon \delta^{l+2} + q_1 q_2 \varepsilon \delta^{l+1} + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\leq \dots \leq q_2 \varepsilon \delta^l ((q_1 \delta)^{k-1} + \dots + 1) = q_2 \varepsilon \delta^l \frac{1 - (q_1 \delta)^k}{1 - q_1 \delta}, \end{aligned} \quad (7)$$

откуда и вытекает искомое.

Из (7), в частности, следует, что

$$d(x_m, x) \leq q_2 \varepsilon \frac{1 - (q_1 \delta)^m}{1 - q_1 \delta} < \frac{q_2 \varepsilon}{1 - q_1 \delta}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Так как последовательность $\{x_i\}$ является левой последовательностью Коши, а (X, d) полное слева, существует точка $y \in X$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(y, x_m) = 0,$$

откуда $y \in S$. Используя (8), получаем

$$d(y, x) \leq q_1 d(y, x_m) + q_2 d(x_m, x) \leq q_1 d(y, x_m) + \frac{q_2^2 \varepsilon}{1 - q_1 \delta}.$$

Теорема 2 доказана.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность профессору А. В. Арутюнову за плодотворные обсуждения и консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilson W. A. On quasi-metric spaces // Amer. J. Math. 1931. V. 53, N 3. P. 675–684.
2. Арутюнов А. В., Грешнов А. В. (q_1, q_2) -Квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82, № 2. С. 3–32.
3. Арутюнов А. В., Грешнов А. В. Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения // Докл. АН. 2016. Т. 469, № 5. С. 527–531.
4. Арутюнов А. В., Грешнов А. В. Точки совпадения многозначных отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 2. С. 129–132.
5. Gromov M. Carnot-Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323. (Prog. Math.; V. 144).
6. Greshnov A. V. Proof of Gromov's theorem on homogeneous nilpotent approximation for vector fields of class C^1 // Sib. Adv. Math. 2013. V. 23, N 3. P. 180–191.
7. Greshnov A. V. (q_1, q_2) -Quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics // Sib. Adv. Math. 2017. V. 27, N 4. P. 253–262.
8. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
9. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 163–169.
10. Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 2. С. 1–4.
11. Arutyunov A. V., Greshnov A. V., Lokutsievskii L. V., Storozhuk K. V. Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f -quasimetrics // Topology Appl. 2017. V. 221. P. 178–194.
12. Cvetković M., Karapinar E., Rakocević V. Some fixed point results on quasi-b-metriclike spaces // J. Inequal. Appl. 2015. N 374. 17pp.

Поступила в редакцию 18 июля 2019 г.

После доработки 27 ноября 2019 г.

Принята к публикации 25 декабря 2019 г.

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru