Yu. L. Ershov, M. V. Schwidefsky, To the spectral theory of partially ordered sets. ii,
Sibirsk. Mat. Zh., 2020, Volume 61, Number 3, 572–586

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.306>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.81.137.203

April 26, 2023, 12:17:35

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ. II

Ю. Л. Ершов, М. В. Швидефски

Аннотация. Охарактеризованы топологические пространства, гомеоморфные спектрам дистрибутивных частично упорядоченных множеств, обладающих определенными свойствами.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.306

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, идеал, спектр.

§ 1. Введение

Работа является продолжением [1] и посвящена изучению понятия спектрального пространства и близких к нему понятий. В частности, дополнены и уточнены некоторые результаты из работ [2–4] первого автора (см. также [5]).

В работе [1] почти собранные пространства были охарактеризованы как пространства, гомеоморфные спектрам дистрибутивных решеток с топологией (дистрибутивных частично упорядоченных множеств с топологией соответственно), а собранные пространства — как пространства, гомеоморфные спектрам дистрибутивных решеток с топологией, обладающих наименьшим элементом (дистрибутивных частично упорядоченных множеств с топологией, обладающих наименьшим элементом, соответственно). Здесь дана характеристика топологических пространств, гомеоморфных спектрам дистрибутивных частично упорядоченных множеств, обладающих определенными свойствами и наделенных дискретной топологией, и обобщены ранее известные результаты. А именно, в теореме 4 спектральные пространства охарактеризованы как обратные пределы спектров конечных дистрибутивных частично упорядоченных множеств и как спектры дистрибутивных нижних полурешеток с наименьшим и наибольшим элементами. Далее введены понятия полуспектрального пространства и почти [полу]спектрального пространства. В теоремах 7, 8, 11 и следствиях 1–4 дана характеристика таких пространств как спектров дистрибутивных частично упорядоченных множеств, обладающих теми или иными свойствами. В частности, эквивалентность утверждений (ii) и (iv) в следствии 1 представляет собой известную характеристику спектров дистрибутивных верхних полурешеток с наименьшим элементом (см., например, гл. II, § 5 в книгах Гретцера [6, 7]). В следствии 5 установлена замкнутость класса [полу]спектральных пространств относительно декартовых произведений и замкнутых подпространств, а в следствии 6 — относительно открытых компактных подпространств. Наше определение идеала частично упорядоченного множества соответствует [8].

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН I.1.1 (код проекта 0314–2019–0003).

§ 2. Спектры частично упорядоченных множеств

Лемма 1. Если семейство $\mathcal{K}$ открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии, то верхние полурешетки $\langle \mathcal{K}; \cup, \emptyset \rangle$ и $\langle \{U \in \mathcal{K} \mid U \neq \emptyset\}; \cup \rangle$ дистрибутивны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \subseteq U_0 \cup U_1$ для некоторых непустых множеств $U, U_0, U_1 \in \mathcal{K}$. Тогда $U \cap U_i \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ для любого $i < 2$, поэтому найдутся семейства $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{K}$ с условием $U \cap U_i = \bigcup \mathcal{V}_i$, $i < 2$. Но тогда $U = U \cap (U_0 \cup U_1) = (U \cap U_0) \cup (U \cap U_1) = \bigcup \mathcal{V}_0 \cup \bigcup \mathcal{V}_1$. В силу компактности множества U имеем $U = \bigcup \mathcal{W}_0 \cup \bigcup \mathcal{W}_1$ для некоторых конечных семейств $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{V}_i$, $i < 2$. Очевидно, что $\bigcup \mathcal{W}_0 = U \cap U_0 \subseteq U_0$, $\bigcup \mathcal{W}_1 = U \cap U_1 \subseteq U_1$ и $\bigcup \mathcal{W}_0, \bigcup \mathcal{W}_1 \in \mathcal{K}$. $\square$

Следующее определение является частным случаем определения 1 из [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение частично упорядоченного (ч.у.) множества $\langle S; \leq \rangle$. Пространство $\text{Spec}_\varphi S = \text{Spec}_\varphi \langle S, \leq, \mathcal{T}_\omega \rangle$, где $\mathcal{T}_\omega$ обозначает дискретную топологию, называется φ -спектром ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$. Спектром верхней полурешетки $\langle L; \vee \rangle$ называется пространство $\text{Spec } L = \text{Spec}_\psi \langle L, \vee, \mathcal{T}_\omega \rangle$, спектром решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ — спектр ее редукта $\langle L; \vee \rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение неоднородного ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$, а $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно, то $\text{Spec } S \neq \emptyset$ по теореме 3.3 из [8]. Всюду в этом параграфе, когда говорим о спектрах дистрибутивных [полу]решеток [о спектрах частично упорядоченных множеств], подразумеваем, что рассматриваемая [полу]решетка L [рассматриваемое ч.у. множество соответственно] наделена дискретной топологией, а алгебраический оператор замыкания ψ на L каждому подмножеству в L сопоставляет идеал [полу]решетки L , порожденный этим множеством.

Лемма 2. Пусть оператор замыкания φ определяет пополнение конечного ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$, причем $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно. Тогда $\text{Spec}_\varphi \langle S; \leq \rangle \cong \text{Spec Id}(S, \varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [1, лемма 10] I является $\cap$ -неразложимым элементом решетки $\text{Id}(S, \varphi)$ для любого $I \in \text{Spec Id}(S, \varphi)$. Кроме того, в силу конечности и дистрибутивности решетки $\text{Id}(S, \varphi)$ имеем $J \in \text{Spec Id}(S, \varphi)$ тогда и только тогда, когда $J = \downarrow I = \{X \in \text{Id}(S, \varphi) \mid X \subseteq I\}$ для некоторого $\cap$ -неразложимого элемента $I \in \text{Id}(S, \varphi)$. Таким образом, отображение

$$\xi : \text{Spec}_\varphi \langle S; \leq \rangle \rightarrow \text{Spec Id}(S, \varphi), \quad \xi : I \mapsto \downarrow I,$$

определено корректно и является сюръективным. Кроме того, ξ , очевидно, взаимно однозначно, т. е. является биекцией. Полагаем

$$V_s = \{I \in \text{Spec}_\varphi \langle S; \leq \rangle \mid s \notin I\}, \quad s \in S;$$

$$W_X = \{I \in \text{Spec}_\varphi \langle S; \leq \rangle \mid X \not\subseteq \xi(I)\}, \quad X \in \text{Id}(S, \varphi).$$

Тогда в силу конечности решетки $\text{Id}(S, \varphi)$ по следствию 6(i) из [1] имеем

$$\xi(W_X) = \bigcup_{s \in X} \xi(W_{L(s)}) = \bigcup_{s \in X} \xi(V_s)$$

для любого $X \in \text{Id}(S, \varphi)$. Так как по лемме 15 из [1] множество $\{\xi(W_X) \mid X \in \text{Id}(S, \varphi)\}$ образует базис топологии пространства $\text{Spec Id}(S, \varphi)$, множество $\{\xi(V_s) \mid s \in S\}$ также образует базис топологии в $\text{Spec Id}(S, \varphi)$. Поскольку $\{V_s \mid s \in S\}$ образует базис топологии пространства $\text{Spec}_\varphi \langle S; \leq \rangle$, мы заключаем, что $\text{Spec}_\varphi \langle S; \leq \rangle \cong \text{Spec Id}(S, \varphi)$. $\square$

Лемма 3. Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$, причем $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно. Тогда множество V_a компактно для любого $a \in S$. Более того, если a не является наименьшим элементом в $\langle S; \leq \rangle$, то $V_a \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $V_a \subseteq \bigcup_{b \in X} V_b$ для некоторого непустого множества $X \subseteq S$. Согласно утверждениям (i) и (iii) следствия 6 из [1] имеет место включение $V_a \subseteq V_{\varphi(X)}$. Предположим, что $a \notin \varphi(X)$. Тогда $\uparrow a \cap \varphi(X) = \emptyset$, поэтому по теореме 3.3 из [8] найдется $I \in \text{Spec}_\varphi S$ такой, что $a \notin I$, но $\varphi(X) \subseteq I$, что противоречит включению $V_a \subseteq V_{\varphi(X)}$. Таким образом, $a \in \varphi(X)$. В силу алгебраичности оператора φ найдется конечное множество $F \subseteq X$ такое, что $a \in \varphi(F)$. Следовательно, по утверждениям (i) и (iii) следствия 6 из [1] имеет место включение $V_a \subseteq V_{\varphi(F)} = \bigcup_{b \in F} V_b$. В силу леммы 15 из [1] множество $\{V_b \mid b \in L\}$ образует базис топологии пространства $\text{Spec}_\varphi S$, поэтому множество V_a компактно.

Предположим дополнительно, что a не является наименьшим элементом в $\langle S; \leq \rangle$. Поэтому существует $b \in S$ такой, что $a \not\leq b$. Это означает, что $U(a) \cap L(b) = \emptyset$; при этом $L(b)$ является φ -идеалом, а $U(a)$ — фильтром в $\langle S; \leq \rangle$. По теореме 3.3 из [8] существует простой φ -идеал $I \in \text{Spec}_\varphi S$ такой, что $a \notin I$ и $L(b) \subseteq I$; в частности, $I \in V_a \neq \emptyset$. $\square$

Предложение 1. Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение направленного вниз ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$, причем $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно. Пространство $\text{Spec}_\varphi S$ является собранным тогда и только тогда, когда $\langle S; \leq \rangle$ содержит наименьший элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\langle S; \leq \rangle$ содержит наименьший элемент, то пространство $\text{Spec}_\varphi S$ собранное по теореме 5 из [1]. Предположим, что пространство $\text{Spec}_\varphi S$ собранное, но не содержит наименьшего элемента. Поскольку множество $\langle S; \leq \rangle$ направлено вниз, для любых $a, b \in S$ найдется $c \leq a, b$. Но тогда $V_c \subseteq V_a \cap V_b$. Так как множество $\{V_a \mid a \in S\}$ образует базис топологии пространства $\text{Spec}_\varphi S$, по лемме 3 получаем, что пересечение двух непустых открытых множеств в $\text{Spec}_\varphi S$ непусто. Таким образом, множество $\text{Spec}_\varphi S$ неприводимо. Согласно предположению о собранности пространства $\text{Spec}_\varphi S$ и лемме 16 из [1] существует наименьший по включению простой φ -идеал $I \in \text{Spec}_\varphi S$; пусть $a \in I$. Но это в силу леммы 3 означает, что $a \in I \subseteq I'$ для любого $I' \in V_a \neq \emptyset$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\langle S; \leq \rangle$ содержит наименьший элемент. $\square$

Предложение 2. Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение направленного вверх ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$, причем $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно. Пространство $\text{Spec}_\varphi S$ является компактным тогда и только тогда, когда $\langle S; \leq \rangle$ содержит наибольший элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\langle S; \leq \rangle$ содержит наибольший элемент, то $\text{Spec}_\varphi S$ компактно по лемме 3. Предположим, что множество $\text{Spec}_\varphi S$ компактно. Поскольку $\{V_a \mid a \in S\}$ образует базис топологии пространства $\text{Spec}_\varphi S$, найдутся $a_0, \dots, a_n \in S$ такие, что $\text{Spec}_\varphi S = V_{a_0} \cup \dots \cup V_{a_n}$. Так как множество $\langle S; \leq \rangle$ направлено вверх, $a_0, \dots, a_n \leq a$ для некоторого $a \in S$. Но тогда $\text{Spec}_\varphi S = V_{a_0} \cup \dots \cup V_{a_n} \subseteq V_a$, поэтому $\text{Spec}_\varphi S = V_a$. Если $b \not\leq a$ для некоторого $b \in S$, то $L(a) \cap U(b) = \emptyset$. По теореме 3.3 из [8] существует простой φ -идеал

$I \in \text{Спес}_\varphi S$ такой, что $b \notin I$ и $a \in L(a) \subseteq I$; в частности, $I \notin V_a = \text{Спес}_\varphi S$, что невозможно. Таким образом, a является наибольшим элементом ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$. $\square$

Теорема 1. Пусть в собранном пространстве $\mathbb{X}$ множество $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$. Тогда отображение

$$f : \mathbb{X} \rightarrow \text{Спес } \mathcal{K}, \quad f : x \mapsto \{V \in \mathcal{K} \mid x \notin V\}$$

является гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению и лемме 1 $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ является дистрибутивной верхней полурешеткой. Кроме того, $\emptyset \in \mathcal{K}$, поэтому $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ обладает наименьшим элементом. Для упрощения обозначений будем писать $\mathcal{T}$ вместо $\mathcal{T}(\text{Спес } \mathcal{K})$. Отметим, что порядок специализации на $\text{Спес } \mathcal{K}$ совпадает с отношением $\supseteq$ обратного включения.

Утверждение 1. Отображение f определено корректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $f(x)$ является идеалом верхней полурешетки $\mathcal{K}$ для любого $x \in X$. Покажем, что идеал $f(x)$ прост. Действительно, $f(x) \neq \emptyset$, поскольку $\emptyset \in f(x)$. С другой стороны, так как $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $x \in X$, найдется $U \in \mathcal{K}$ такое, что $x \in U$. Тогда $U \notin f(x)$, поэтому $f(x) \neq \mathcal{K}$. Пусть $V_0, V_1 \in \mathcal{K}$ таковы, что $V \in f(x)$ для любого $V \in \mathcal{K}$ такого, что $V \subseteq V_0 \cap V_1$. Тогда $x \notin V_0 \cap V_1$, поэтому $x \notin V_i$ для некоторого $i < 2$. Таким образом, $V_i \in f(x)$, что и требовалось. $\square$

Утверждение 2. Отображение f является взаимно однозначным отображением «на».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим произвольный простой идеал $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}$. Пусть $U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$; тогда $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, а множество $F = X \setminus U$ замкнуто в $\mathbb{X}$. Кроме того, $F \neq \emptyset$, поскольку иначе имели бы включение $V \in \mathcal{B}$ для произвольного множества $V \in \mathcal{K}$, что противоречило бы простоте идеала $\mathcal{B}$. Покажем, что F является неприводимым множеством. Действительно, пусть $U_0 \cap F \neq \emptyset$ и $U_1 \cap F \neq \emptyset$ для некоторых $U_0, U_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. По условию это означает, что $V_0 \cap F \neq \emptyset$ и $V_1 \cap F \neq \emptyset$ для некоторых $V_0, V_1 \in \mathcal{K}$ таких, что $V_i \subseteq U_i$, $i < 2$. Таким образом, $V_0, V_1 \notin U$, поэтому $V_0, V_1 \notin \mathcal{B}$. В силу простоты идеала $\mathcal{B}$ это означает, что $V \notin \mathcal{B}$ для некоторого множества $V \in \mathcal{K}$ такого, что $V \subseteq V_0 \cap V_1$. Поскольку множество V компактно, имеем $V \not\subseteq U$. Таким образом, $U_0 \cap U_1 \cap F \supseteq V_0 \cap V_1 \cap F \supseteq V \cap F \neq \emptyset$, что и требовалось.

В силу собранности пространства $\mathbb{X}$ существует $x \in X$ такой, что $F = \downarrow x$. Покажем, что $f(x) = \mathcal{B}$. Действительно, для произвольного множества $V \in \mathcal{K}$ условие $V \notin f(x)$ равносильно включению $x \in V$, которое имеет место тогда и только тогда, когда $V \cap F \neq \emptyset$, что равносильно условию $V \not\subseteq U$, что, в свою очередь, равносильно тому, что $V \notin \mathcal{B}$.

Далее, пусть $x \not\leq y$ в $\mathbb{X}$. Это означает, что $x \in U$ и $y \notin U$ для некоторого $U \in \mathcal{K}$, т. е. $U \in f(y) \setminus f(x)$. Поэтому отображение f взаимно однозначно. $\square$

Утверждение 3. Отображение f непрерывно и открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного множества $U \in \mathcal{K}$ рассмотрим множество

$$V_U = \{\mathfrak{I} \in \text{Спес } \mathcal{K} \mid U \notin \mathfrak{I}\} \in \mathcal{T}.$$

Тогда $x \in U$ в том и только том случае, когда $U \notin f(x)$, что равносильно включению $f(x) \in V_U$ в силу утверждения 1. Поскольку $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, это доказывает непрерывность и открытость f . $\square$

В силу утверждений 1–3 отображение f является гомеоморфизмом. Доказательство теоремы завершено. $\square$

Теорема 2. Пусть пространство $\mathbb{X}$ почти собранное, но не собранное, а множество $\mathcal{K}_0$ всех непустых открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$. Тогда отображение

$$f : \mathbb{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{K}_0, \quad f : x \mapsto \{V \in \mathcal{K}_0 \mid x \notin V\}$$

является гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предположению множество X неприводимо, поэтому пересечение любых двух непустых открытых множеств вновь является непустым открытым множеством. Тем самым $\langle \mathcal{K}_0; \cup \rangle$ является направленной вниз дистрибутивной верхней полурешеткой. Отметим, что $\emptyset = \bigcup \emptyset$.

Утверждение 4. Для любого $x \in X$ множество $f(x) = \{V \in \mathcal{K}_0 \mid x \notin V\}$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(x) = \emptyset$ для некоторого $x \in X$. Это означает, что $x \in V$ для любого $V \in \mathcal{K}_0$. Поскольку $\mathcal{K}_0$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, то $x \in U$ для любого непустого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Но это означает, что x является наибольшим элементом пространства $\mathbb{X}$ относительно порядка специализации. Таким образом, пространство $\mathbb{X}$ собранное, что противоречит предположению. $\square$

Из утверждения 4 следует, что верхняя полурешетка $\langle \mathcal{K}_0; \cup \rangle$ не имеет наименьшего элемента.

Утверждение 5. Отображение f определено корректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $f(x)$ является идеалом верхней полурешетки $\mathcal{K}_0$ для любого $x \in X$. Покажем, что идеал $f(x)$ прост. Действительно, $f(x) \neq \emptyset$ по утверждению 4. С другой стороны, поскольку $\mathcal{K}_0$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $x \in X$, найдется $U \in \mathcal{K}_0$ такое, что $x \in U$. Тогда $U \notin f(x)$, поэтому $f(x) \neq \mathcal{K}_0$. Пусть $V_0, V_1 \in \mathcal{K}_0$ таковы, что $V \in f(x)$ для любого $V \in \mathcal{K}_0$ такого, что $V \subseteq V_0 \cap V_1$. Тогда $x \notin V_0 \cap V_1$, поэтому $x \notin V_i$ для некоторого $i < 2$. Таким образом, $V_i \in f(x)$ для некоторого $i < 2$, что и требовалось. $\square$

Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 1. $\square$

Предложение 3. Пусть в топологическом T_0 -пространстве $\mathbb{X}$ семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$. Равносильны следующие условия.

- (i) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subseteq X$ замкнуто, имеет непустое пересечение.
- (ii) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subseteq X$ замкнуто и неприводимо, имеет непустое пересечение.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ собранное.

Если $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, то условия выше равносильны также следующим.

(iv) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \subseteq X$ замкнуто, имеет непустое пересечение.

(v) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \subseteq X$ замкнуто и неприводимо, имеет непустое пересечение.

Доказательство следующего предложения сходно с доказательством предложения 3. Тем не менее приведем его для полноты изложения.

Предложение 4. Пусть в топологическом T_0 -пространстве $\mathbb{X}$ семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$. Равносильны следующие условия.

(i) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subseteq X$ замкнуто, имеет непустое пересечение.

(ii) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subseteq X$ замкнуто и неприводимо, имеет непустое пересечение.

(iii) Пространство $\mathbb{X}$ почти собранное.

Если $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, то условия выше равносильны также следующим.

(iv) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \subseteq X$ замкнуто, имеет непустое пересечение.

(v) Любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \subseteq X$ замкнуто и неприводимо, имеет непустое пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что условие (i) влечет условие (ii). Покажем, что условие (ii) влечет (iii). Действительно, рассмотрим произвольное собственное замкнутое неприводимое множество $F \subseteq X$. Пусть $\mathcal{W} = \{U \in \mathcal{K} \mid U \cap F \neq \emptyset\}$. Из неприводимости множества F и того, что $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathbb{X}$, следует, что семейство $\mathcal{W}$ направлено вниз и потому центрированное. Но тогда и семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$ центрированное. В силу условия (ii) найдется элемент $x \in F \cap \bigcap \mathcal{W}$. Тогда имеет место равенство $F = \downarrow x$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $y \in F$. Если $y \in U \in \mathcal{K}$, то $U \in \mathcal{W}$, поэтому $x \in F \cap \bigcap \mathcal{W} \subseteq U$. В силу того, что $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, получаем неравенство $y \leq_{\mathbb{X}} x$, что и требовалось.

Покажем, что условие (iii) влечет (i). Действительно, рассмотрим произвольное собственное замкнутое множество $F \subseteq X$ и нетривиальное направленное вниз семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ такие, что семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$ центрированное. Тогда множество $\mathcal{S} = \{U \in \mathcal{K} \mid U \subseteq X \setminus F\}$ является идеалом верхней полурешетки $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$. Так как $\emptyset \neq X \setminus F \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, а $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, найдется непустое множество $U \in \mathcal{S}$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{K} \mid U \supseteq U' \text{ для некоторого } U' \in \mathcal{W}\}.$$

Тогда $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ и $U \cap F \neq \emptyset$ для любого $U \in \mathcal{F}$; в частности, $\mathcal{S} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Кроме того, нетрудно видеть, что множество $\mathcal{F}$ является верхним конусом относительно теоретико-множественного включения. Предположим, что $V, V' \in \mathcal{F}$. Тогда $U \subseteq V$ и $U' \subseteq V'$ для некоторых $U, U' \in \mathcal{W}$. Поскольку семейство $\mathcal{W}$ направлено вниз, найдется $W \in \mathcal{W}$ такое, что $W \subseteq U \cap U' \subseteq V \cap V'$. Поскольку $W \in \mathcal{F}$, заключаем, что $\mathcal{F}$ является нетривиальным фильтром верхней полурешетки $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$. Согласно лемме 1 и [8, теорема 3.3] найдется простой идеал

$\mathcal{P}$ верхней полурешетки $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ такой, что $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$ и $\mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Полагаем $G = X \setminus \bigcup \mathcal{P}$. Заметим, что если $G \cap U = \emptyset$ для некоторого $U \in \mathcal{K}$, то $U \in \mathcal{P}$ в силу компактности множества U . Поскольку $\bigcup \mathcal{P} \notin \{\emptyset, X\}$, заключаем, что G является собственным замкнутым множеством в $\mathbb{X}$. Покажем, что множество G неприводимо в $\mathbb{X}$. Действительно, пусть $\emptyset \notin \{G \cap V_0, G \cap V_1\}$ для некоторых $V_0, V_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Тогда найдутся множества $U_0, U_1 \in \mathcal{K}$ такие, что $U_i \subseteq V_i$, $i < 2$, и $\emptyset \notin \{G \cap U_0, G \cap U_1\}$. Это означает, что $U_0, U_1 \notin \mathcal{P}$. Поскольку $\mathcal{P}$ является простым идеалом, заключаем, что $U \notin \mathcal{P}$ для некоторого $U \in \mathcal{K}$ с условием $U \subseteq U_0 \cap U_1$. Следовательно, $\emptyset \neq U \cap G \subseteq (U_0 \cap U_1) \cap G \subseteq (V_0 \cap V_1) \cap G$. Таким образом, множество G неприводимо в $\mathbb{X}$. В силу условия (iii) найдется элемент $x \in X$, такой что $G = \downarrow x$. Если $U \in \mathcal{W}$, то $U \in \mathcal{F}$, поэтому $U \notin \mathcal{P}$. Но тогда $U \cap G \neq \emptyset$, ибо в противном случае имели бы включение $U \in \mathcal{P}$ в силу компактности множества U . Следовательно, $x \in U$ для любого множества $U \in \mathcal{W}$. Поскольку $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, имеет место включение $X \setminus F = \bigcup \mathcal{I} \subseteq \bigcup \mathcal{P}$. Стало быть, $x \in G \subseteq F$, поэтому $x \in F \cap \bigcap \mathcal{W}$. Таким образом, утверждения (i)–(iii) равносильны.

Предположим, что $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$. Очевидно, утверждение (iv) влечет утверждение (v), а утверждение (v) — утверждение (ii). Покажем, что (i) влечет (iv). Действительно, рассмотрим произвольное собственное замкнутое множество $F \subseteq X$ и нетривиальное семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ такие, что $U_0 \cap \dots \cap U_n \cap F \neq \emptyset$ для любых $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{W}$. Согласно лемме Цорна существует максимальное семейство $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{K}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}' \text{ и семейство } \mathcal{W}' \cup \{F\} \text{ является центрированным.}$$

Тогда для произвольных множеств $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{W}$ семейство $\mathcal{W}' \cup \{F, U_0 \cap \dots \cap U_n\}$ центрированное. В силу максимальной $\mathcal{W}'$ и включения $U_0 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{K}$ заключаем, что $U_0 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{W}'$, т. е. семейство $\mathcal{W}'$ направлено вниз. В силу (i) имеем $\emptyset \neq F \cap \bigcap \mathcal{W}' \subseteq F \cap \bigcap \mathcal{W}$. $\square$

§ 3. Спектральные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Топологическое T_0 -пространство $\mathbb{X}$ называется *спектральным*, если $\mathbb{X}$ является компактным собранным пространством, а его открытые компактные множества образуют мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$.

Топологическое T_0 -пространство $\mathbb{X}$ называется *почти спектральным*, если $\mathbb{X}$ является почти собранным пространством, а его открытые компактные множества образуют мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$.

Спектральные пространства охарактеризованы в [5] следующим образом.

Теорема 3. Пусть $\mathbb{X}$ — топологическое T_0 -пространство, пусть $\mathcal{K}$ — семейство всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$, а $\mathcal{F}$ — семейство всех непустых замкнутых множеств в $\mathbb{X}$. Равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ проконечное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно обратному пределу спектров конечных дистрибутивных решеток с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной решетки с 0 и 1 с дискретной топологией.

(iv) Пространство $\mathbb{X}$ компактно, $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{F}$ имеет непустое пересечение.

(v) Пространство $\mathbb{X}$ компактно, $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ и $F \in \mathcal{F}$, имеет непустое пересечение.

(vi) Пространство $\mathbb{X}$ компактно, $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \in \mathcal{F}$ неприводимо, имеет непустое пересечение.

(vii) Пространство $\mathbb{X}$ спектральное.

Следующее утверждение уточняет теорему 3.

Теорема 4. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

(i) Пространство $\mathbb{X}$ спектральное.

(ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно обратному пределу спектров конечных дистрибутивных ч.у. множеств с дискретной топологией.

(iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой φ -дистрибутивной нижней полурешетки с 0 и 1 с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 утверждение (i) влечет утверждения (ii) и (iii). Если для пространства $\mathbb{X}$ выполняется утверждение (ii), то по лемме 2 $\mathbb{X}$ гомеоморфно обратному пределу спектров конечных дистрибутивных решеток. Поэтому утверждение (ii) влечет утверждение (i) по теореме 3.

Наконец, если алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение φ -дистрибутивной нижней полурешетки $\langle S; \wedge \rangle$ с 0 и 1 (с дискретной топологией), то $\text{Spc}_\varphi S = V_1$. По лемме 3 пространство $\text{Spc}_\varphi S$ компактно. Для любых $a, b \in S$ очевидным образом выполняется равенство $V_{a \wedge b} = V_a \cap V_b$. Поэтому по лемме 3 топология пространства $\text{Spc}_\varphi S$ обладает мультипликативным базисом, состоящим из открытых компактных множеств. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spc}_\varphi S$ собранное. Таким образом, условие (iii) влечет условие (i). $\square$

Теорема 5. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

(i) Пространство $\mathbb{X}$ компактное почти спектральное, но не спектральное.

(ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной решетки с 1, но без 0, с дискретной топологией.

(iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой φ -дистрибутивной нижней полурешетки с 1, но без 0, с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что условие (i) влечет (ii). Пусть $\mathcal{K}_0$ обозначает множество всех непустых открытых компактных подмножеств в $\mathbb{X}$. Более того, множество X является неприводимым, но пространство $\mathbb{X}$ не имеет наибольшего элемента относительно порядка специализации. В частности, пересечение любых двух непустых открытых множеств непусто, поэтому по лемме 1 $\langle \mathcal{K}_0; \cup, \cap \rangle$ является дистрибутивной решеткой с наибольшим элементом, поскольку $X \in \mathcal{K}_0$. По теореме 12 $\mathbb{X} \cong \text{Spc } \mathcal{K}_0$, причем решетка $\langle \mathcal{K}_0; \cup, \cap \rangle$ не

имеет наименьшего элемента, ибо в противном случае пространство $\mathbb{X}$ имело бы наибольший элемент относительно $\leq_{\mathbb{X}}$.

Очевидно, что условие (ii) влечет условие (iii). Далее, пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение φ -дистрибутивной нижней полурешетки $\langle S; \wedge \rangle$ с 1, но без 0. По лемме 3 множество $\text{Spec}_{\varphi} S = V_1$ компактное. Для любых $a, b \in S$ очевидным образом выполняется равенство $V_{a \wedge b} = V_a \cap V_b$. Поэтому по лемме 3 топология пространства $\text{Spec}_{\varphi} S$ обладает мультипликативным базисом $\{V_a \mid a \in S\}$, состоящим из непустых открытых компактных множеств. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ почти собранное. По предложению 1 пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ не собранное. Таким образом, пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ компактное почти спектральное, но не спектральное, и (iii) влечет (i). $\square$

Из теорем 4, 5 и предложения 4 получаем

Следствие 1. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ компактное почти спектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной решетки с 1 с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой φ -дистрибутивной нижней полурешетки с 1 с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.
- (iv) Пространство $\mathbb{X}$ компактно, семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \subset X$ замкнуто [и неприводимо], имеет непустое пересечение.

Теорема 6. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ собранное почти спектральное, но не спектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной решетки с 0, но без 1, с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой направленной вверх φ -дистрибутивной нижней полурешетки с 0, но без 1, с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие (i) и $\mathcal{K}$ обозначает множество всех открытых компактных множеств пространства $\mathbb{X}$. Так как $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, то $\langle \mathcal{K}; \cup, \cap \rangle$ является дистрибутивной решеткой. Очевидно, $\emptyset \in \mathcal{K}$, т. е. $\langle \mathcal{K}; \cup, \cap \rangle$ содержит наименьший элемент. Поскольку пространство $\mathbb{X}$ собранное почти спектральное, но не спектральное, множество X не компактно, т. е. $X \notin \mathcal{K}$. В силу того, что $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, $\langle \mathcal{K}; \cup, \cap \rangle$ не содержит наибольшего элемента. Согласно теореме 1 $\mathbb{X} \cong \text{Spec } \mathcal{K}$, поэтому условие (i) влечет (ii). Условие (ii), очевидно, влечет (iii).

Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение направленной вверх φ -дистрибутивной нижней полурешетки $\langle S; \wedge \rangle$ с 0, но без 1. Для любых $a, b \in S$ очевидным образом выполняется равенство $V_{a \wedge b} = V_a \cap V_b$. По лемме 15 из [1] и лемме 3 топология на $\text{Spec}_{\varphi} S$ обладает мультипликативным базисом, состоящим из открытых компактных множеств. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ собранное почти спектральное. По предложению 2

пространство $\text{Spec}_\varphi S$ не компактно. Таким образом, пространство $\text{Spec}_\varphi S$ не спектрально, и условие (iii) влечет (i). $\square$

Из теорем 5, 6 и предложения 3 получаем

Следствие 2. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ собранное почти спектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной решетки с 0 с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой φ -дистрибутивной нижней полурешетки с 0 с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.
- (iv) Семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \subseteq X$ замкнуто [и неприводимо], имеет непустое пересечение.

Теорема 7. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ почти спектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной решетки с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой φ -дистрибутивной нижней полурешетки с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.
- (iv) Семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$, а множество $F \subseteq X$ замкнуто [и неприводимо], имеет непустое пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что условие (i) влечет (ii). Учитывая следствия 1 и 2, достаточно рассмотреть случай, когда пространство $\mathbb{X}$ не является ни собранным, ни компактным. Следовательно, множество X неприводимо, но пространство $\mathbb{X}$ не имеет наибольшего элемента относительно порядка специализации. Пусть $\mathcal{K}_0$ — множество всех непустых открытых компактных в $\mathbb{X}$ множеств. В силу неприводимости множества X пересечение любых двух непустых открытых в $\mathbb{X}$ множеств непусто. Следовательно, согласно нашему предположению $\mathcal{K}_0$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, поэтому $\langle \mathcal{K}_0; \cup, \cap \rangle$ является дистрибутивной решеткой. По теореме 2 $\mathbb{X} \cong \text{Spec } \mathcal{K}_0$.

Условие (ii) очевидным образом влечет (iii). Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение φ -дистрибутивной нижней полурешетки $\langle S; \wedge \rangle$. Для любых $a, b \in S$ очевидным образом выполняется равенство $V_{a \wedge b} = V_a \cap V_b$. По лемме 15 из [1] и лемме 3 топология на $\text{Spec}_\varphi S$ обладает мультипликативным базисом $\{V_a \mid a \in S\}$, состоящим из открытых компактных множеств. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spec}_\varphi S$ почти собранное. Следовательно, пространство $\text{Spec}_\varphi S$ почти спектральное, а условие (iii) влечет (i).

Условия (i) и (iv) равносильны по предложению 4. $\square$

§ 4. Полуспектральные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Топологическое T_0 -пространство X называется *полуспектральным*, если X является компактным собранным пространством, а его открытые компактные множества образуют базис топологии $\mathcal{T}(X)$.

Топологическое T_0 -пространство X называется *почти полуспектральным*, если X является почти собранным пространством, а его открытые компактные множества образуют базис топологии $\mathcal{T}(X)$.

Теорема 8. Для произвольного топологического T_0 -пространства X равносильны следующие условия.

- (i) Пространство X полуспектральное.
- (ii) Пространство X гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной верхней полурешетки с 0 и 1 с дискретной топологией.
- (iii) Пространство X гомеоморфно спектру некоторого φ -дистрибутивного ч.у. множества с 0 и 1 с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.
- (iv) Пространство X компактно, семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в X образует базис топологии $\mathcal{T}(X)$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subseteq X$ замкнуто [и неприводимо], имеет непустое пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (i) и (iv) равносильны по предложению 3. Пусть $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ — верхняя полурешетка всех компактных открытых множеств пространства X . По лемме 1 $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ дистрибутивна. Очевидно, $\emptyset \in \mathcal{K}$, т. е. $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ содержит наименьший элемент. Поскольку множество X компактно, $X \in \mathcal{K}$, поэтому $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ содержит наибольший элемент. Согласно теореме 1 $X \cong \text{Spec } \mathcal{K}$, тем самым условие (i) влечет (ii). Очевидно, условие (ii) влечет (iii).

Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$ с 0 и 1, причем $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно. Поскольку $\text{Spec}_\varphi S = V_1$, пространство $\text{Spec}_\varphi S$ компактно по лемме 3. По лемме 15 из [1] и лемме 3 топология на $\text{Spec}_\varphi S$ обладает базисом $\{V_a \mid a \in S\}$, состоящим из открытых компактных множеств. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spec}_\varphi S$ собранное. Поэтому условие (iii) влечет (i). $\square$

Теорема 9. Для произвольного топологического T_0 -пространства X равносильны следующие условия.

- (i) Пространство X компактное почти полуспектральное, но не полуспектральное.
- (ii) Пространство X гомеоморфно спектру некоторой направленной вниз дистрибутивной верхней полурешетки с 1, но без 0, с дискретной топологией.
- (iii) Пространство X гомеоморфно спектру некоторого направленного вниз φ -дистрибутивного ч.у. множества с 1, но без 0, с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что условие (i) влечет (ii). Пусть $\mathcal{K}_0$ обозначает множество всех непустых открытых компактных подмножеств в X . Согласно предположению $X \in \mathcal{K}_0$, поэтому верхняя полурешетка $\langle \mathcal{K}_0; \cup \rangle$ обладает наибольшим элементом. Более того, множество X неприводимо, но пространство X не имеет наибольшего элемента относительно порядка специализации. В частности, пересечение любых двух непустых открытых множеств непусто,

поэтому $\langle \mathcal{K}_0; \cup \rangle$ является направленной вниз дистрибутивной верхней полурешеткой. По теореме 2 $\mathbb{X} \cong \text{Spec } \mathcal{K}_0$, причем верхняя полурешетка $\langle \mathcal{K}_0; \cup \rangle$ не имеет наименьшего элемента, ибо в противном случае пространство $\mathbb{X}$ содержало бы наибольший элемент относительно $\leq_{\mathbb{X}}$.

Условие (ii), очевидно, влечет условие (iii). Далее, пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение направленного вниз φ -дистрибутивного ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$ с 1, но без 0. По лемме 3 множество $\text{Spec}_{\varphi} S = V_1$ компактно. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ почти собранное, а по лемме 15 из [1] и лемме 3 его топология имеет базис $\{V_a \mid a \in S\}$, состоящий из открытых компактных множеств. Таким образом, пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ почти полуспектральное. По предложению 1 $\text{Spec}_{\varphi} S$ не является собранным пространством. Таким образом, пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ не полуспектральное и условие (iii) влечет условие (i). $\square$

Из теорем 8, 9 и предложения 4 получаем

Следствие 3. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ компактное почти полуспектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной верхней полурешетки с 1 с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторого φ -дистрибутивного ч.у. множества с 1 с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.
- (iv) Пространство $\mathbb{X}$ компактно, семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subset X$ замкнуто [и неприводимо], имеет непустое пересечение.

Теорема 10. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ собранное почти полуспектральное, но не полуспектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной верхней полурешетки с 0, но без 1, с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторого направленного вверх φ -дистрибутивного ч.у. множества с 0, но без 1, с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}$ обозначает множество всех компактных открытых множеств пространства $\mathbb{X}$. По лемме 1 верхняя полурешетка $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ дистрибутивна. Очевидно, $\emptyset \in \mathcal{K}$, т. е. $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ содержит наименьший элемент. Поскольку пространство $\mathbb{X}$ собранное почти полуспектральное, но не полуспектральное, множество X не компактно, т. е. $X \notin \mathcal{K}$. В силу того, что $\mathcal{K}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, $\langle \mathcal{K}; \cup \rangle$ не содержит наибольшего элемента. Согласно теореме 1 $\mathbb{X} \cong \text{Spec } \mathcal{K}$, поэтому условие (i) влечет (ii). Очевидно, (ii) влечет (iii) по лемме 13 из [1].

Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение направленного вверх ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$ с 0, но без 1, причем множество $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно. По лемме 15 из [1] и лемме 3 топология на $\text{Spec}_{\varphi} S$ имеет базис $\{V_a \mid a \in S\}$, состоящий из открытых компактных множеств. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$ собранное. Следовательно, пространство $\text{Spec}_{\varphi} S$

собранное почти полуспектральное. По предложению 2 пространство $\text{Spec}_\varphi S$ не компактно. Поэтому пространство $\text{Spec}_\varphi S$ не полуспектральное, и условие (iii) влечет (i). $\square$

Из теорем 8, 10 и предложения 3 получаем

Следствие 4. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ собранное почти полуспектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной верхней полурешетки с 0 с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторого φ -дистрибутивного ч.у. множества с 0 с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.
- (iv) Семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subseteq X$ замкнуто [и неприводимо], имеет непустое пересечение.

Теорема 11. Для произвольного топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{X}$ почти полуспектральное.
- (ii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторой дистрибутивной верхней полурешетки с дискретной топологией.
- (iii) Пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно спектру некоторого φ -дистрибутивного ч.у. множества с дискретной топологией, где оператор φ алгебраический.
- (iv) Семейство $\mathcal{K}$ всех открытых компактных множеств в $\mathbb{X}$ образует базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, а любое центрированное семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ направлено вниз, а множество $F \subset X$ замкнуто [и неприводимо], имеет непустое пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что условие (i) влечет (ii). Учитывая следствия 3 и 4, достаточно рассмотреть случай, когда пространство $\mathbb{X}$ не является ни собранным, ни компактным. Следовательно, множество X неприводимо, но пространство $\mathbb{X}$ не имеет наибольшего элемента относительно порядка специализации. Пусть $\mathcal{K}_0$ обозначает множество всех непустых открытых компактных в $\mathbb{X}$ множеств. По лемме 1 верхняя полурешетка $\langle \mathcal{K}_0; \cup \rangle$ дистрибутивна. Кроме того, в силу неприводимости множества X пересечение любых двух непустых открытых в $\mathbb{X}$ множеств непусто, поэтому верхняя полурешетка $\langle \mathcal{K}_0; \cup \rangle$ направлена вниз. По теореме 2 $\mathbb{X} \cong \text{Spec } \mathcal{K}_0$.

Очевидно, что (ii) влечет (iii). Пусть алгебраический оператор замыкания φ определяет пополнение ч.у. множества $\langle S; \leq \rangle$, причем $\langle S; \leq \rangle$ φ -дистрибутивно. По лемме 15 из [1] и лемме 3 топология на $\text{Spec}_\varphi S$ имеет базис $\{V_a \mid a \in S\}$, состоящий из открытых компактных множеств. По теореме 5 из [1] пространство $\text{Spec}_\varphi S$ почти собранное. Следовательно, пространство $\text{Spec}_\varphi S$ почти полуспектральное, а условие (iii) влечет (i).

Условия (i) и (iv) равносильны по предложению 4. $\square$

Из теоремы Тихонова, теоремы 5.3.7 и следствий 1.12.8, 1.12.10 и 5.3.6(ii) из [5] получаем

Следствие 5. Рассмотрим следующие свойства топологических пространств:

- (1) быть [полу]спектральным пространством;
- (2) быть компактным почти [полу]спектральным пространством;
- (3) быть почти [полу]спектральным пространством;
- (4) быть собранным почти [полу]спектральным пространством.

Тогда справедливы следующие утверждения.

- (i) Если топологические T_0 -пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ обладают одним из свойств (1)–(4), то пространство $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ обладает тем же свойством.
- (ii) Если для любого $i \in I$ топологическое T_0 -пространство $\mathbb{X}_i$ обладает одним из свойств (1), (2), то пространство $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ обладает тем же свойством.
- (iii) Замкнутое подпространство топологического T_0 -пространства, обладающего одним из свойств (1)–(4), само обладает тем же свойством.

Следствие 6. Пусть $\mathfrak{P}$ обозначает одно из следующих свойств:

- (i) быть спектральным пространством;
- (ii) быть почти спектральным пространством;
- (iii) быть компактным почти спектральным пространством;
- (iv) быть собранным почти спектральным пространством.

Если пространство $\mathbb{X}$ имеет свойство $\mathfrak{P}$, а $U \subseteq X$ является непустым открытым компактным множеством в $\mathbb{X}$, то U также обладает свойством $\mathfrak{P}$ и является компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}$ обозначает множество компактных открытых подмножеств в $\mathbb{X}$, а $\mathcal{K}_U$ — множество компактных открытых подмножеств в U . Тогда $\mathcal{K}_U \subseteq \mathcal{K}$. Более того, поскольку $\mathcal{K}$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(\mathbb{X})$, то $\mathcal{K}_U$ образует мультипликативный базис топологии $\mathcal{T}(U)$. Очевидно, пространство U компактно. Предположим, что семейство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}_U \subseteq \mathcal{K}$ и [собственное] замкнутое в U множество $F \subseteq U$ таковы, что семейство $\mathcal{W} \cup \{F\}$ центрированное. Нетрудно видеть, что существует [собственное] замкнутое в U множество $G \subseteq X$ такое, что $F = G \cap U$. Таким образом, семейство $\mathcal{W}' = \{U' \in \mathcal{K}_U \mid U' \in \mathcal{W}\} \cup \{G\}$ также центрированное. Воспользуемся одним из следующих утверждений: теорема 3, следствие 1, следствие 2, теорема 7. По этому утверждению $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{W}' = \bigcap \mathcal{W}$. Осталось вновь сослаться на это же утверждение. $\square$

§ 5. Замечание

Теорему 7 из [1] следует читать следующим образом.

Теорема 12. Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \vee, \mathcal{T} \rangle$ — верхняя полурешетка с топологией, причем топология $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\psi^\pi$ T_0 -отделимая. Тогда $\mathbb{T}_\pi(\mathbb{S}_{\text{рес}_\psi} \mathbb{S})$ является наибольшим существенным расширением пространства $\mathbb{S}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю. Л., Швидефски М. В. К спектральной теории частично упорядоченных множеств // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 3. С. 578–598.
2. Ершов Ю. Л. Спектральная теория полутопологических полурешеток // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1021–1032.
3. Ершов Ю. Л. Спектральная теория полутопологических полурешеток. II // Изв. УрГУ. 2005. Т. 36, № 7. С. 107–118.
4. Ершов Ю. Л. Спектры колец и решеток // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 361–373.
5. Ершов Ю. Л. Топология для дискретной математики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020.

6. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
7. Grätzer G. Lattice theory: Foundation. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, 2011.
8. Batueva C., Semenova M. Ideals in distributive posets // Cent. Eur. J. Math. 2011. V. 9, N 6. P. 1380–1388.

Поступила в редакцию 27 февраля 2020 г.

После доработки 27 февраля 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`ershov@math.nsc.ru`

Швидефски Марина Владимировна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`semenova@math.nsc.ru`