M. V. Zubkov, A. N. Frolov, Spectral universality of linear orders with one binary relation, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 587–593

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.307>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.157.27.8

April 26, 2023, 10:05:43

УДК 510.53+512.562

СПЕКТРАЛЬНАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ С ОДНИМ БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

М. В. Зубков, А. Н. Фролов

Аннотация. Показана спектральная универсальность класса структур, представляющих собой линейные порядки с дополнительным бинарным отношением и, следовательно, n -арным отношением для любого наперед заданного $n \geq 2$. Для этого исследуется категория таких структур. Это позволяет, используя понятие вычислимого функтора, исследуемое в недавних работах других авторов, получить ряд прочих алгоритмических свойств этой категории.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.307

Ключевые слова: вычислимые линейные порядки, спектральная универсальность, бинарные отношения.

1. Введение

Множество тьюринговых степеней, относительно которых данная алгебраическая структура $\mathcal{A}$ является вычислимо представимой, называется *спектром* степеней данной структуры и обозначается через $\text{dgSp}(\mathcal{A})$. Вопрос описания спектров степеней алгебраических структур является одним из фундаментальных вопросов теории вычислимых структур и их моделей. А. Слинько, Д. Хиршфельдт, Б. Хусаинов, Р. Шор [1] назвали класс структур спектрально универсальным, если любой возможный спектр степеней алгебраической структуры реализуется спектром степеней структуры из данного класса. Другими словами, класс структур $\mathcal{P}$ называется *спектрально универсальным*, если для любой алгебраической структуры $\mathcal{A}$ существует структура $\mathcal{B} \in \mathcal{P}$ такая, что $\text{dgSp}(\mathcal{B}) = \text{dgSp}(\mathcal{A})$.

Ими же была установлена спектральная универсальность ряда классических классов алгебраических структур, например, таких классов, как неориентированные графы, решетки, коммутативные полугруппы и другие. Ряд других примеров, в том числе и новых, а также обзор результатов, описывающих спектры степеней различных структур, можно найти в недавней работе И. Калимуллина, В. Селиванова и А. Фролова [2].

В работе В. Харизановой и Миллера [3] показывается, что любой возможный спектр степеней реализуется спектром некоторого унарного (и, следовательно, n -арного для любого наперед заданного $n \geq 1$) отношения на вычислимом случайном графе. В этом случае также говорят, что это отношение *спектрально универсально*. П. Е. Алаев (не опубликовано, см., например, [2])

Работа М. В. Зубкова поддержана грантом РФФИ №18–31–00174, работа А. Н. Фролова — грантом Президента РФ МД–2721.2019.1.

доказал такой же результат для унарного отношения на вычислимой булевой алгебре $\mathcal{B}_\omega$. Нетрудной модификацией этот результат можно перенести на вычислимую безатомную булеву алгебру и показать, что каждый спектр степеней алгебраической структуры реализуется спектром унарного отношения вычислимой безатомной булевой алгебры.

Класс счетных линейных порядков один из наиболее сложных с точки зрения описания спектров степеней всех представителей этого класса. Он не спектрально универсальный. Это следует, например, из того, что спектр степеней линейного порядка в отличие от графов может образовывать верхний конус степеней тогда и только тогда, когда он содержит вычислимую степень (Рихтер [4]). Также до сих пор неизвестно, существует ли линейный порядок, спектр степеней которого содержит в точности все ненулевые степени (некоторые частичные продвижения можно найти в [5–7]).

В. Харизанова и Миллер [3] доказали результат Рихтер для унарного отношения на произвольном линейном порядке. Таким образом, класс структур, являющихся линейными порядками, сигнатура которых обогащена унарным отношением, спектрально универсальным не является.

В данной работе доказано, что бинарное (и, следовательно, n -арное для любого $n \geq 2$) отношение на $\mathbb{Q}$ (естественное упорядочение множества рациональных чисел) спектрально универсально. А именно, показано, что для любого графа существует бинарное отношение на $\mathbb{Q}$, спектр которого совпадает со спектром степеней графа.

2. Основной результат

Определение бинарного отношения на линейном порядке фактически означает определение на нем графа. Возможно, читателю будет удобнее представить такую структуру иначе, а именно как упорядоченный граф. Другими словами, рассмотрим категорию (обозначим ее через **LBin**) структур вида $\mathcal{A} = \{\omega; <, E\}$, где $\mathcal{A} = \{\omega; <\}$ — линейный порядок, а $\mathcal{A} = \{\omega; E\}$ — неориентированный граф без петель, морфизмами здесь являются изоморфные вложения. Обозначим категорию, объектами которой являются неориентированные графы без петель, а морфизмами — изоморфные вложения графов, через **Graph**.

В [8] введено понятие вычислимого функтора, которое позволяет транслировать алгоритмические свойства, например спектральную универсальность, категоричность и т. п., из одной категории структур в другую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ — категории структур с основным множеством ω , для которых морфизмы из структуры $\mathcal{S}$ в структуру $\mathcal{T}$ суть отображения из основного множества ω структуры $\mathcal{S}$ в основное множество ω структуры $\mathcal{T}$. *Вычислимым* называется функтор $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ такой, что существуют тьюринговы функционалы Φ и Φ_* со следующими свойствами:

- для каждой структуры $\mathcal{S} \in \mathfrak{C}$ функция $\Phi^{\mathcal{S}}$ вычисляет структуру (атомную диаграмму) $\mathcal{F}(\mathcal{S})$;
- для каждого морфизма $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ в $\mathfrak{C}$ имеем $\Phi_*^{\mathcal{S} \oplus g \oplus \mathcal{T}} = \mathcal{F}(g)$ в $\mathfrak{D}$.

Кроме того, в [9] доказано, что существование вычислимого функтора с некоторыми дополнительными условиями эквивалентно би-интерпретируемости структур.

Назовем вычислимым функтор $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ *вычислимо обратимым*, если существует вычислимый функтор $\mathcal{F}^{-1} : \text{rng}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathfrak{C}$ такой, что для любой $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$ существуют морфизмы $g_1 : \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) \rightarrow \mathcal{A}$ и $g_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$.

Теорема. Существует инъективный вычислимо обратимый вычислимый функтор

$$\mathcal{F} : \mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{LBin}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем описать полное доказательство теоремы, сначала приведем идею доказательства спектральной универсальности частично-упорядоченного множества (ч.у.м.), идею кодирования графа в ч.у.м. с сохранением спектра проста. Объявляем все четные числа не сравнимыми друг с другом и сопоставляем их с элементами графа $2x \mapsto x$. Берем наименьшее еще не использованное нечетное число t . Если между элементами графа a и b имеется ребро, то объявляем $t = 2a \vee 2b$, если между ними ребра нет, то $t = 2a \wedge 2b$. Совпадение спектров графа и построенного ч.у.м. очевидно.

Прямая адаптация этой идеи для рассматриваемой категории структур невозможна. Пусть дан граф $\mathcal{G} = \{\omega; E_G\}$. Предположим, что так же, как и выше, при построении линейно упорядоченного графа $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \{A; <, E\}$ каждому элементу графа x ставим в соответствие некоторый элемент y . Тогда после линейного упорядочивания в $\mathcal{A}$ всех образов нельзя обеспечить выполнение следующего основного свойства: если $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$, то $\mathcal{A}(\mathcal{G}_1) \cong \mathcal{A}(\mathcal{G}_2)$. Такая же проблема возникает при линейном упорядочивании верхних и нижних граней из предыдущего описания.

Для преодоления этой проблемы применим следующий прием (как для образов элементов графа $\mathcal{G}$, так и для образов ребер, т. е. для верхних и нижних граней). Каждому элементу графа ставим в соответствие бесконечное множество элементов структуры $\mathcal{A}$. Эти множества образов для разных элементов графа плотно перемешиваем в линейном порядке. Чтобы не возникло путаницы между разными образами, соединяем попарно ребром все элементы $\mathcal{A}$, соответствующие одному элементу $\mathcal{G}$. Аналогичную процедуру применяем для элементов, соответствующих верхним и нижним граням из предыдущего описания. Такое адаптирование предыдущей идеи позволяет организовать кодирование графа в бинарное отношение линейного порядка с сохранением спектра.

Перейдем теперь к описанию полного доказательства. Сначала произвольный граф $\mathcal{G}$ превратим в граф $\mathcal{G}'$, имеющий бесконечное множество ребер и бесконечное множество пар не соседних элементов. Каждой вершине графа $\mathcal{G}$ в $\mathcal{G}'$ будет соответствовать подграф, изоморфный K_3 (т. е. полный граф с тремя вершинами). Будем обозначать их через $\mathcal{G}'_x$. Если вершины x и y соединены ребром в $\mathcal{G}$, то каждая вершина $\mathcal{G}'_x$ соединена с каждой вершиной $\mathcal{G}'_y$ уникальным путем длины 2. В противном случае каждая вершина $\mathcal{G}'_x$ соединена с каждой вершиной $\mathcal{G}'_y$ уникальным путем длины 3. Нетрудно видеть, что данное соответствие задает инъективный вычислимо обратимый вычислимый функтор из категории **Graph** в категорию **Graph**. При этом образ всегда имеет бесконечное множество ребер и бесконечное множество пар не соседних элементов. Далее при построении вычислимого функтора $\mathcal{F}$ из категории счетных графов $\mathcal{G} = \{\omega; E_G\}$ в категорию счетных графов с линейным порядком $\mathcal{A} = \{\omega; <, E\}$ будем предполагать, что граф обладает данным свойством. Искомый функтор будет являться композицией двух построенных.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКТОРА. Разобьем $\mathbb{Q}$ при помощи двух элементов q_0 и q_1 на три непересекающихся интервала $I_1 < q_0 < I_2 < q_1 < I_3$. Разобьем каждый интервал I_i , $1 \leq i \leq 3$, на счетное равномерно вычислимое семейство подмножеств $I_{i,j}$ так, что

- 1) $I_{i,j} \cap I_{i,k} = \emptyset$ при $j \neq k$;

$$2) I_i = \bigcup_{j \in \omega} I_{i,j};$$

$$3) (\forall x < y; x, y \in I_{i,j})(\forall k)(\exists z \in I_{i,k})[x < z < k].$$

Каждое множество $I_{2,j}$ будет кодировать одну вершину графа $\mathcal{G}$. Для каждого j и $x, y \in I_{2,j}$ полагаем $\{x, y\} \in E$.

Множества $I_{3,j}$ будем использовать для кодирования ребер графа $\mathcal{G}$. Пусть $\nu : E_G \rightarrow \omega$ — некоторая эффективная биективная нумерация ребер графа $\mathcal{G} = \{\omega; E_G\}$. Если $E_G(v_1, v_2)$, то для всех $x \in I_{2,v_1}$, $y \in I_{2,v_2}$, $z \in I_{3,\nu(\{v_1, v_2\})}$ полагаем $\{x, z\} \in E$ и $\{z, y\} \in E$.

Осталось закодировать случай, когда между вершинами графа $\mathcal{G}$ отсутствуют ребра. Для этого воспользуемся семейством $I_{1,j}$. Пусть $\mu : \omega^2 \setminus E_G \rightarrow \omega$ — некоторая эффективная биективная нумерация пар не соседних вершин графа $\mathcal{G} = \{\omega; E_G\}$. Если $\neg E_G(v_1, v_2)$, то для всех $x \in I_{2,v_1}$, $y \in I_{2,v_2}$, $z \in I_{1,\mu(v_1, v_2)}$ полагаем $\{x, z\} \in E$ и $\{z, y\} \in E$.

ЭФФЕКТИВНОЕ ОБРАЩЕНИЕ $\mathcal{F}$. Опишем, как эффективно восстановить граф $\mathcal{G} = \{\omega; E_G\}$ по структуре $\mathcal{A} = \{A; <, E\} = \mathcal{F}(\mathcal{G})$. Соответствующий функтор обозначим через $\mathcal{F}^{-1}$. Отметим, что два элемента $x, y \in I_2$ соответствуют различным вершинам графа $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда они не являются соседними в $\mathcal{A}$.

Пусть $x, y \in \mathcal{A}$ соответствуют различным вершинам v_1, v_2 графа $\mathcal{G}$. Элементы v_1 и v_2 являются соседними в графе $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{A}$ между x и y есть путь $x - t - y$ такой, что $t > x, y$. Аналогично вершины v_1 и v_2 не соседние тогда и только тогда, когда в графе $\mathcal{A}$ между x и y есть путь $x - t - y$ такой, что $t < x, y$.

Пусть $\tau : \omega \rightarrow I_2$ — биективная эффективная нумерация максимального множества попарно не соседних в $\mathcal{A} = \{A; E\}$ элементов. С учетом вышеизложенного структура $\mathcal{G} = \{\omega, E_G\}$, где

$$E_G(x, y) \Leftrightarrow (\exists v)[v > \tau(x) \& v > \tau(y) \& E(x, v) \& E(y, v)],$$

$$\neg E_G(x, y) \Leftrightarrow (\exists v)[v < \tau(x) \& v < \tau(y) \& E(x, v) \& E(y, v)],$$

будет искомым графом. Таким образом, отношение E_G и его дополнение $\neg E_G$ перечислимы относительно $\deg(\mathcal{A})$ и, следовательно, E_G вычислимо относительно $\deg(\mathcal{A})$. Так как $\text{dgSp}(\mathcal{G})$ замкнут наверх, существует представление $\mathcal{G}$ степени $\deg(\mathcal{A})$.

Следующая лемма оправдывает выбранное обозначение $\mathcal{F}^{-1}$.

Лемма 1. Для любого графа $\mathcal{G}$ имеет место $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{G})) \cong \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}_1 = \{\omega; E_{G_1}\}$ — исходный граф и $\mathcal{G}_2 = \{\omega; E_{G_2}\} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{G}_1))$. Имеет место биекция $\varphi : n \mapsto I_{2,n}$ между множеством натуральных чисел и разбиением I_2 . В свою очередь, нумерация $\tau : \omega \rightarrow I_2$ определяет биекцию ψ между разбиением I_2 и ω следующим образом: $\psi : I_{2,j} \mapsto k$ тогда и только тогда, когда $\tau(k) \in I_{2,j}$. Таким образом, композиция $\varphi \circ \psi : \omega \rightarrow \omega$ является биекцией. Пусть выполнено $E_{G_1}(x, y)$, тогда любой элемент $I_{2,x}$ соединен с любым элементом $I_{2,y}$ путем длины 2, причем так, что центральная вершина больше (в порядке $<$) начальной и конечной. В частности, это верно для $\tau(k)$ и $\tau(m)$ таких, что $\tau(k) \in I_{2,x}$ и $\tau(m) \in I_{2,y}$, следовательно, $E_{G_2}(k, m)$. Нетрудно видеть, что $\varphi \circ \psi(x) = k$ и $\varphi \circ \psi(y) = m$.

Пусть $\neg E_{G_1}(x, y)$. Тогда любой элемент $I_{2,x}$ соединен с любым элементом $I_{2,y}$ путем длины 2, причем так, что центральная вершина меньше (в порядке

$<$) начальной и конечной. В частности, это верно для $\tau(k)$ и $\tau(m)$ таких, что $\tau(k) \in I_{2,x}$ и $\tau(k) \in I_{2,y}$, следовательно, $\neg E_{G_2}(k, m)$. Нетрудно видеть, что $\varphi \circ \psi(x) = k$ и $\varphi \circ \psi(y) = m$. Таким образом,

$$E_{G_1}(x, y) \leftrightarrow E_{G_2}(\varphi \circ \psi(x), \varphi \circ \psi(y)). \quad \square$$

Лемма 2. Если $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$, то $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1) \cong \mathcal{F}(\mathcal{G}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi : \omega \rightarrow \omega$ — изоморфизм графов $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ и $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1) = \{A_1; <_1, E_1\}$, $\mathcal{F}(\mathcal{G}_2) = \{A_2; <_2, E_2\}$.

Рассмотрим отображение $\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2$. Оно является биекцией между разбиениями $\{I_{1,j}\}$ и $\{I'_{1,j}\}$. Аналогично $\mu_1^{-1} \circ \varphi \circ \mu_2$ — биекция между разбиениями $I_{3,j}$ и $\{I'_{3,j}\}$.

Определим следующие отображения:

- 1) $f_{1,j}$, действующие из $I_{1,j}$ в $\{I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)}\}$,
- 2) $f_{2,j}$, действующие из $I_{2,j}$ в $\{I'_{2,\varphi(j)}\}$,
- 3) $f_{3,j}$, действующие из $I_{3,j}$ в $\{I'_{3,\mu_1^{-1} \circ \varphi \circ \mu_2(j)}\}$.

Для любого j существует изоморфизм $\tau_{i,j} : I_{i,j} \rightarrow I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)}$, так как оба множества изоморфны $\mathbb{Q}$. При определении $f_{i,j}$ нужно добиться того, что изоморфизм $f_{i,n+1}$ должен быть согласован с $\bigcup_{j \leq n} f(i, j)$, т. е. определен так, чтобы функция $\bigcup_{j \leq n} f_{i,j}$ была изоморфизмом между $\bigcup_{j \leq n} I_{i,j}$ и $\bigcup_{j \leq n} I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)}$. При произвольном выборе изоморфизмов $f_{i,j}$, $0 \leq j \leq n$, такого $f_{i,n+1}$ может вообще не существовать. Однако существование согласованных семейств изоморфизмов $\{f_{i,j}\}_{j=0}^{\infty}$, $i = 1, 2, 3$, легко следует из стандартной челночной конструкции и плотностей $I_{i,j}$ в I_i и $I'_{i,j}$ в I'_i соответственно.

Коротко дадим схему доказательства данного факта. Для каждого j рассмотрим следующие требования:

$R_{i,j}$ — отображение $f(i, j)$ является всюду определенным на $I_{i,j}$ сохраняющим порядок инъективным отображением в $I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)}$, согласованным с $f(i, k)$, $k \neq j$;

$M_{i,j}$ — отображение $f(i, j)$ является сюръективным сохраняющим порядок инъективным отображением $I_{i,j}$ на $I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)}$, согласованным с $f(i, k)$, $k \neq j$.

Считаем, что каждое рассматриваемое бесконечное множество имеет нумерацию натуральными числами. Конструкция проводится по шагам. На шаге s работают требования с номерами $j \leq s$. Требование вида $R_{i,j}$ находит элемент x из $I_{i,j}$ с наименьшим номером, для которого значение $f_{i,j}(x)$ еще не определено, далее находит элемент y из $I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)}$ с наименьшим номером такой, что определение $f_{i,j}(x) = y$ будет согласовано со всеми уже определенными частичными изоморфизмами. Требование вида $M_{i,j}$ выбирает элемент y из $I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)}$ с наименьшим номером, для которого прообраз относительно $f_{i,j}$ еще не определен, далее находит элемент x из $I_{i,j}$ с наименьшим номером, для которого определение $f_{i,j}(x) = y$ будет согласовано со всеми уже определенными частичными изоморфизмами. Для обоих требований искомый элемент существует в силу плотностей $I_{i,j}$ в I_i и $I'_{i,j}$ в I'_i . Остальные детали оставляем читателю.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\forall x < y \in \bigcup_{j \leq n} I_{i,j} \right) (\exists z \in I_{i,n+1}) [x < z < y], \\ & (\forall x < y \in I_{i,n+1}) \left(\exists z \in \bigcup_{j \leq n} I_{i,j} \right) [x < z < y]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left(\forall x < y \in \bigcup_{j \leq n} I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)} \right) (\exists z \in I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(n+1)}) [x < z < y], \\ & (\forall x < y \in I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(n+1)}) \left(\exists z \in \bigcup_{j \leq n} I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(j)} \right) [x < z < y]. \end{aligned} \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что построенная таким образом функция $f = \bigcup_{i=1}^3 \bigcup_{j \in \omega} f_{i,j}$ является изоморфизмом линейных порядков $\{A_1; <_1\}$ и $\{A_2; <_2\}$. Осталось показать, что f является изоморфизмом структур $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1) = \{A_1; <_1, E_1\}$ и $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1) = \{A_2; <_2, E_2\}$.

Для $x, y \in A_1$ выполняется $E_1(x, y)$ тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $(\exists k)[x, y \in I_{2,k}]$. В этом случае $f(x), f(y) \in I'_{2,\varphi(k)}$ и, следовательно, $E_2(f(x), f(y))$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $(\exists k)(\exists m)[x \in I_{2,k} \& y \in I_{1,m}]$. Это возможно в том случае, если в G_1 существует ребро e_1 такое, что $k \in e_1$ и $\nu_1(e_1) = m$. Тогда $\varphi(x) \in \varphi(e_1)$ и $\nu_2(\varphi(e_1)) = \nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(m)$. Так как $f(x) \in I'_{2,\varphi(k)}$ и $f(y) \in I'_{1,\nu_1^{-1} \circ \varphi \circ \nu_2(m)}$, то $E_2(f(x), f(y))$.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $(\exists k)(\exists m)[x \in I_{2,k} \& y \in I_{3,m}]$. Это возможно в том случае, если в G_1 существует вершина v такая, что $\neg E_{G_1}(k, v)$ и $\mu_1(\{k, v\}) = m$. Тогда $\neg E_{G_2}(\varphi(k), \varphi(v))$ и $\nu_2(\{\varphi(k), \varphi(v)\}) = \mu_1^{-1} \circ \varphi \circ \mu_2(m)$. Так как $f(x) \in I'_{2,\varphi(k)}$ и $f(y) \in I'_{3,\mu_1^{-1} \circ \varphi \circ \mu_2(m)}$, то $E_2(f(x), f(y))$.

Нетрудно видеть, что f вычислим относительно $\mathcal{G}_1 \oplus \varphi \oplus \mathcal{G}_2$. $\square$

Естественной модификацией доказательств легко получить леммы, аналогичные леммам 1, 2 и справедливые для произвольных морфизмов, а не только для изоморфизмов. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Использование элементов q_1 и q_2 делает конструкцию теоремы неравномерной. Отметим, что этого можно избежать. Например, можно определить на q_1 и q_2 петли либо закодировать в качестве разделителей конечные куски, изоморфные K_5 (K_5 — полный граф с пятью вершинами), которые в основной конструкции не встречаются.

Как отмечено выше, существование вычислимого функтора позволяет транслировать различные алгоритмические свойства из одной категории структур в другую [8]. В частности, инъективный вычислимо обратимый вычислимый функтор сохраняет спектры степеней алгебраических структур, и из спектральной универсальности графов получаем

Следствие. Класс структур вида $\mathcal{A} = \{\mathbb{Q}; <, E\}$ спектрально универсален.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M. Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures // Ann. Pure Appl. Logic. 2002. V. 115, N 1–3. P. 71–113.
2. Калимуллин И. Ш., Селиванов В. Л., Фролов А. Н. Спектры степеней структур // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения Тематические обзоры. Т. 158. М.: ВИНТИ РАН, 2018. С. 23–39.
3. Harizanov V., Miller R. Spectra of structures and relations // J. Symb. Log. 2007. V. 72, N 1. P. 324–348.
4. Richter L. J. Degrees of structures // J. Symb. Log. 1981. V. 46, N 4. P. 723–731.
5. Miller R. The Δ_2^0 -spectrum of a linear order // J. Symb. Log. 2001. V. 62, N 2. P. 470–486.
6. Фролов А. Н. Заметка о Δ_2^0 -спектрах линейных порядков и спектрах отношения соседства на них // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 74–78.
7. Frolov A., Kalimullin I., Harizanov V., Kudinov O., Miller R. Spectra of high n and non-low n degrees // J. Logic Comput. 2010. V. 22, N 4. P. 755–777.
8. Miller R., Poonen B., Schoutens H., Shlapentokh A. A computable functor from graphs to fields // J. Symb. Log. 2018. V. 83, N 1. P. 326–349.
9. Harrison-Trainor M., Melnikov A., Miller R., Montalban A. Computable functors and effective interpretability // J. Symb. Log. 2018. V. 82, N 1. P. 77–97.
10. Баженов Н. А., Фролов А. Н., Калимуллин И. Ш., Мельников А. Г. Вычислимость дистрибутивных решеток // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1236–1251.

Поступила в редакцию 25 декабря 2018 г.

После доработки 10 января 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Зубков Максим Витальевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ИММ им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
maxim.zubkov@kpfu.ru

Фролов Андрей Николаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ВШ ИТиС,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
a.frolov.kpfu@gmail.com