A. Kaźmierczak, Some estimates for the product of modules of specific pairs of foliations,
Sibirsk. Mat. Zh., 2020, Volume 61, Number 3, 594–606

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.308>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.45.116

April 26, 2023, 03:31:54

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДУЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПАРЫ СЛОЕНИЙ

А. Казмирчак

Аннотация. Рассматривается класс диффеоморфизмов $G = (G_1, G_2) : M \rightarrow N \subset R_1 \times R_2$, действующих между римановыми многообразиями (где N снабжено метрикой произведения), что позволяет исследовать пары слоений на M , состоящих из множеств уровня координат G_1 и G_2 соответственно. Приводятся нижние и верхние оценки произведения сопряженных модулей таких пар слоений, зависящие от свойств N и структуры якобиана JG . Сформулированы результаты, касающиеся локальных свойств максимальных пар слоений.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.308

Ключевые слова: слоение, модуль, емкость, субмерсия.

Введение

Модуль семейства кривых, будучи понятием, взаимным с понятием экстремальной длины, играет существенную роль в теории квазиконформных отображений [1–4]. Он также широко применяется во многих других областях математики таких, как комплексный анализ и анализ на метрических пространствах [5, 6] (в частности, на нем основан способ определения пространств Соболева на метрических пространствах с мерой) и геометрическая теория меры [7]. Кроме того, стоит подчеркнуть, что эта характеристика семейства кривых тесно связана с емкостью: p -емкость конденсатора равна p -модулю всех кривых, входящих в конденсаторы [8–10]. Это понятие обобщено на семейства липшицевых поверхностей в $\mathbb{R}^n$ в [11] и далее на k -мерные подмногообразия риманова многообразия в [12], тем самым получена возможность изучать модули слоений [13–16].

Пусть $\mathcal{F}$ — k -мерное слоение на римановом многообразии M из C^1 (см. определение 1). Пусть $p > 0$. p -Модулем слоения $\mathcal{F}$ называется число

$$\text{mod}_p(\mathcal{F}) = \inf_{f \in \text{adm}_p(\mathcal{F})} \|f\|_{L^p(M)},$$

где $\text{adm}_p(\mathcal{F})$ — множество всех p -допустимых функций, т. е. п. в. неотрицательных $L^p(M)$ -интегрируемых функций таких, что $\int_L f \geq 1$ для п. в. $L \in \mathcal{F}$.

Кроме того, будем считать, что $\text{mod}_p(\mathcal{F}) = \infty$, если $\text{adm}_p(\mathcal{F}) = \emptyset$. Функция $f \in \text{adm}_p(\mathcal{F})$ называется p -экстремальной, если

$$\|f\|_{L^p(M)} = \text{mod}_p(\mathcal{F}).$$

В контексте модулей наиболее эффективно изучение слоений, заданных субмерсиями (см. определение 2), поскольку в этом случае можно использовать явную формулу для p -модуля и p -экстремальной функции (см. [16, теорема 1]).

В данной статье будем рассматривать пары слоений, связанные диффеоморфизмом

$$G = (G_1, G_2) : M \rightarrow R_1 \times R_2,$$

действующим на произведении римановых многообразий (с метрикой произведения). Согласно определению 3 такие слоения состоят из множеств уровня соответствующих координат функций из G . Такую конструкцию можно считать обобщением четырехсторонника с двумя слоениями, соединяющими противоположные пары его сторон. Плоский четырехсторонник определяется в [1] как открытое множество $Q \subset \mathbb{R}^2$, гомеоморфное прямоугольнику, с двумя различными непересекающимися дугами на его границе. Если две такие дуги определены, то можно рассматривать на Q семейства кривых, соединяющих эти дуги. Кроме того, естественным будет изучение модуля множества всех кривых с таким свойством. Альфорс в [1] показал, что для каждого четырехсторонника произведение 2-модулей таких семейств равно единице. В свою очередь, А. С. Романов в [17] доказал аналогичный результат для произведения модулей с сопряженными степенями суммируемости. Последнее утверждение вместе с монотонностью модуля (см. свойство 1 теоремы 7) делает интуитивно понятной идею теоремы 3, в которой утверждается, что для пары слоений $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, связанных диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, произведение

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2), \quad \text{где } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, \quad (1)$$

не превосходит 1. Следствие 2, будучи эквивалентом теоремы 4.3 из [14], дает достаточное условие максимальности значения произведения сопряженных модулей (которое равно единице) для слоений вышеуказанного типа. Помимо требований теоремы 3 в следствии 2 дополнительно предполагается особое строение якобиана JG , а именно

$$\begin{aligned} JG &= JG_{\mathcal{F}_1} \cdot JG_{\mathcal{F}_2} \quad (\text{эквивалентно } \mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2 \text{ (см. лемму 1)}), \\ c_1 JG_{\mathcal{F}_1}^{p_1} &= c_2 JG_{\mathcal{F}_2}^{p_2} \quad \text{для некоторых } c_1, c_2 > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Легко убедиться в том, что гёльдерова зависимость между экстремальными функциями (с подходящей константой, как в (15)) является достаточным условием равенства единице произведения (1) для любой пары слоений из рассматриваемого класса. Примечательно, что это требование оказывается и необходимым условием равенства данного произведения единице (см. теорему 4).

С другой стороны, рассматривая более широкий класс диффеоморфизмов, чем в теореме 3, т. е. все $G : M \rightarrow N \subset R_1 \times R_2$, действующие на открытых подмножествах N из $R_1 \times R_2$, и в то же время накладывая условия (2), приходим к заключению, что вопреки утверждению теоремы 3 произведение (1) должно не превосходить единицу (см. теорему 2).

В заключение в разд. 3 изучим некоторые локальные свойства максимальной пары слоений. Оказывается, такие слоения обладают свойством «локальной максимальной» в том смысле, что для любого открытого множества M' , вырезанного из M вдоль его листов,

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1|_{M'}) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2|_{M'}) = 1$$

при условии, что произведение (1) равно 1 (следствие 4). Кроме того, p -экстремальная функция максимального слоения «локально экстремальна». А именно, если через f обозначим p -экстремальную функцию слоения $\mathcal{F}$, определенного на M , а через f' — p -экстремальную функцию $\mathcal{F}|_{M'}$, то $f' = c \cdot f$, где

$c > 0$ — постоянная, зависящая от норм f и f' (см. теорему 8). Эти локальные свойства вполне согласуются с результатами, касающимися емкостей, если M — открытое подмножество $\mathbb{R}^2$ (ср. [17]).

1. Модуль слоения, заданного субмерсией

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. k -Мерным слоением $\mathcal{F}$ на M называется такое семейство попарно не пересекающихся k -мерных подмногообразий M , что $M = \bigcup_{L \in \mathcal{F}} L$ и для любой точки $x \in M$ существуют окрестность D и отображение $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_i(D) = (0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, и для любой компоненты связности P любого $L \cap D$

$$\varphi_{|P}^{k+1} = \text{const}, \dots, \varphi_{|P}^n = \text{const}.$$

Через L^x обозначим лист $\mathcal{F}$, проходящий через $x \in M$.

Заметим, что в определении 1 листы не обязательно связны.

Пусть M и P — римановы многообразия. Напомним, что гладкое отображение $\phi : M \rightarrow P$ называется *субмерсией*, если для всех $x \in M$ его дифференциал $\phi_*(x) : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} P$ сюръективен. Якобианом J_ϕ является функция, сопоставляющая каждой точке $x \in M$ якобиан изоморфизма $\phi_*(x)|_{\ker(\phi_*(x))^\perp}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что слоение $\mathcal{F} = \{\phi^{-1}(y) : y \in \phi(M)\}$ задано субмерсией ϕ .

В теореме 1 (см. [16]) приводятся формулы для p -модуля и p -экстремальной функции слоения, заданного субмерсией. Она будет часто применяться в данной статье.

Теорема 1 [16]. Если слоение $\mathcal{F}$ задано субмерсией $\phi : M \rightarrow P$ и $\int_L J_\phi^{\frac{1}{p-1}} < \infty$ для п. в. $L \in \mathcal{F}$, то при $p > 1$

$$\text{mod}_p(\mathcal{F}) = \left(\int_{\phi(M)} \left(\int_{L^x} J_\phi^{\frac{1}{p-1}} \right)^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

Кроме того, если $\text{mod}_p(\mathcal{F}) < \infty$, то существует единственная p -экстремальная функция, которая задается формулой

$$f(x) = \frac{J_\phi(x)^{\frac{1}{p-1}}}{\int_{L^x} J_\phi^{\frac{1}{p-1}}}. \quad (4)$$

Непосредственно из равенства (4) вытекает

Следствие 1. Если f — p -экстремальная функция слоения $\mathcal{F}$, заданного субмерсией, то $\int_{L^x} f = 1$ для всех $x \in M$.

2. Оценки для произведения модулей слоений

Отметим, что для любых диффеоморфизма $G : M \rightarrow N$ между римановыми многообразиями и слоения $\mathcal{F}$ на M

$$G(\mathcal{F}) = \{G(L) : L \in \mathcal{F}\}$$

является слоением на N . Через $JG_{\mathcal{F}}(x)$ будем обозначать якобиан изоморфизма $G_*(x)|_{T_x L^x}$, а через $JG_{\mathcal{F}^\perp}(x)$ — якобиан изоморфизма $G_*(x)|_{(T_x L^x)^\perp}$.

Всюду в статье предполагаем, что $R_1 \times R_2$ снабжено метрикой произведения, а $N \subset R_1 \times R_2$ — метрикой, индуцированной из $R_1 \times R_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $G : M \rightarrow N \subset R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм. Определим $\mathcal{F}_1$ как слоение, заданное G_2 , а $\mathcal{F}_2$ — как слоение, заданное G_1 . Назовем эту пару *системой слоений, связанных диффеоморфизмом* $(G; R_1, R_2)$.

Таким образом, для рассматриваемых слоений $JG_{\mathcal{F}_1^\perp} = JG_2$ и $JG_{\mathcal{F}_2^\perp} = JG_1$.

Лемма 1. Пусть $G : M \rightarrow N \subset R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ связаны диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Тогда

$$JG_{\mathcal{F}_1} \cdot JG_{\mathcal{F}_2} \leq JG,$$

где равенство достигается в том и в только том случае, когда слоения ортогональны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вещественные числа $p_1, p_2 > 1$ будем называть *сопряженными*, если $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$.

Теорема 2. Пусть R_1, R_2 имеют конечный объем, $G : M \rightarrow N \subset R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — слоения, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Если $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ и для пары сопряженных p_1, p_2 и некоторых $0 < c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$c_1 JG_{\mathcal{F}_1}^{p_1}(x) = c_2 JG_{\mathcal{F}_2}^{p_2}(x) \quad \text{для всех } x \in M, \quad (5)$$

то $\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2) \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через μ_{R_i} , $i = 1, 2$, меру Лебега, определенную на R_i . Поскольку на $R_1 \times R_2$ введена метрика произведения, $J\pi_i = 1$ ($\pi_i : R_1 \times R_2 \rightarrow R_i$). Таким образом,

$$\int_{L_i^x} JG_{\mathcal{F}_i} = \int_{G(L_i^x)} J\pi_i = \int_{G_i(L_i^x)} 1 \leq \mu_{R_i}(R_i). \quad (6)$$

Кроме того, из сопряженности p_1 и p_2 следует, что

$$p_2 - 1 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{p_1 - 1}, \quad (7)$$

откуда в силу (5) имеем

$$JG_{\mathcal{F}_2}^{p_2-1} = JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{p_2}{p_1}} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} JG_{\mathcal{F}_1}. \quad (8)$$

Кроме того, из ортогональности слоений получаем

$$JG_{\mathcal{F}_1^\perp} = JG_{\mathcal{F}_2}, \quad JG_{\mathcal{F}_2^\perp} = JG_{\mathcal{F}_1}. \quad (9)$$

Таким образом, для всех $x \in M$

$$\begin{aligned} \int_{L_1^x} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} &= \int_{L_1^x} JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}} = \int_{G_1(L_1^x)} (JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}} \cdot JG_{\mathcal{F}_1}^{-1}) \circ G^{-1} \\ &= \int_{G_1(L_1^x)} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} 1 = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} \mu_{R_1}(G_1(L_1^x)) < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично $\int_{L_2^x} JG \frac{1}{\mathcal{F}_2^{\frac{1}{p_2-1}}} < \infty$, а значит, все предположения теоремы 1 выполнены.

Тем самым, применяя (3), (9), (7), (8) и (6), получаем

$$\begin{aligned} \text{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathcal{F}_1) &= \int_{R_2} \left(\int_{L_1} JG \frac{1}{\mathcal{F}_2^{p_2-1}} \right)^{1-p_1} = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{1}{p_2}} \int_{R_2} \left(\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1} \right)^{1-p_1} \\ &\geq \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{1}{p_2}} \int_{R_2} \mu_{R_1}(R_1)^{1-p_1} = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{1}{p_2}} \mu_{R_2}(R_2) \mu_{R_1}(R_1)^{1-p_1}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{F}_2) \geq \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{-\frac{1}{p_1}} \mu_{R_1}(R_1) \mu_{R_2}(R_2)^{1-p_2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2) &\geq \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{-\frac{1}{p_1 \cdot p_2}} \mu_{R_2}(R_2)^{\frac{1}{p_1}} \mu_{R_1}(R_1)^{\frac{1}{p_1}-1} \\ &\quad \cdot \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{\frac{1}{p_1 \cdot p_2}} \mu_{R_1}(R_1)^{\frac{1}{p_2}} \mu_{R_2}(R_2)^{\frac{1}{p_2}-1} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 2. Если $N = R_1 \times R_2$ в условии теоремы 2, то ее утверждение усиливается:

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2) = 1. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $N = R_1 \times R_2$, имеем $G_i(L_i^x) = R_i$, так что $\int_{L_i^x} JG_{\mathcal{F}_i} = \mu_{R_i}(R_i)$. Тем самым все существенные неравенства после (6) могут быть заменены равенствами, что приводит к требуемому утверждению. $\square$

ПРИМЕР 1. Пусть $R_1, R_2 \subset \mathbb{R}$ — открытые промежутки, $G = \text{id}|_N$, где $N \subset R_1 \times R_2$ — ограниченная область. Обозначим через $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ слоения, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Эти ортогональные слоения состоят из горизонтальных и вертикальных отрезков соответственно (или, возможно, из сумм таких отрезков). Поскольку $JG_{\mathcal{F}_1} = J\pi_2 = 1$ и $JG_{\mathcal{F}_2} = J\pi_1 = 1$, предположения теоремы 2 выполнены для любой пары p_1, p_2 сопряженных чисел. Стало быть,

$$\text{mod}_{p_1} \mathcal{F}_1 \cdot \text{mod}_{p_2} \mathcal{F}_2 \geq 1.$$

ПРИМЕР 2 (сектор классического кольца). Пусть $a, b > 0$ таковы, что $a < b$ и $\alpha \in (0, 2\pi)$. Положим

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < r(x, y) < b, 0 < \theta(x, y) < \alpha\},$$

где $r(x, y)$ и $\theta(x, y)$ — полярные координаты точки (x, y) . Введем на M евклидову метрику, индуцированную из $\mathbb{R}^2$. Пусть $G : M \rightarrow (\ln(a), \ln(b)) \times (0, \alpha)$ определено по формуле

$$G(x, y) = (\ln(r(x, y)), \theta(x, y)).$$

Обозначим через $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ систему слоений, связанных диффеоморфизмом $(G; (\ln(a), \ln(b)), (0, \alpha))$. Другими словами,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{G^{-1}((a, b) \times \{\theta\}) : \theta \in (0, \alpha)\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{G^{-1}(\{z\} \times (0, \alpha)) : z \in (\ln(a), \ln(b))\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда

$$JG_{\mathcal{F}_1} = JG_{\mathcal{F}_2} = \frac{1}{r},$$

в то время как $JG = \frac{1}{r^2}$. Отсюда $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ (см. лемму 1). Тем самым по следствию 2 равенство (1) будет выполнено, если $p_1 = p_2 = 2$. Действительно, по формуле (3) получаем $\text{mod}_2^2(\mathcal{F}_1) = \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ и $\text{mod}_2^2(\mathcal{F}_2) = \alpha^{-1} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Значит, (1) выполнено.

Лемма 2. Пусть p_1, p_2 — сопряженные числа и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — пара слоений, связанных диффеоморфизмом $G : M \rightarrow R_1 \times R_2$, такие, что $\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty$ для всех $L_1 \in \mathcal{F}_1$. Если f_1 — p_1 -экстремальная функция слоения $\mathcal{F}_1$, то для всех $L_2 \in \mathcal{F}_2$

$$\int_{L_2} \bar{f}_2 \geq 1, \quad \text{где } \bar{f}_2 = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} f_1^{p_1-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $JG = JG_{\mathcal{F}_1^\perp} \cdot JG_{\mathcal{F}_2}$ и $JG \geq JG_{\mathcal{F}_1} \cdot JG_{\mathcal{F}_2}$ (ср. с леммой 1). Значит, $JG_{\mathcal{F}_1^\perp} \geq JG_{\mathcal{F}_2}$. Применяя формулу (4), получим

$$f_1 = \frac{JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}} \geq \frac{JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}}.$$

Стало быть, $f_1^{p_1-1} \geq \frac{JG_{\mathcal{F}_2}}{\left(\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{p_1-1}}$, откуда ввиду (3) для любого $L_2 \in \mathcal{F}_2$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \bar{f}_2 &= \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} \int_{L_2} f_1^{p_1-1} \geq \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} \int_{R_2} \left(\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} \right)^{1-p_1} \\ &= \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1} = 1. \quad \square \quad (12) \end{aligned}$$

Лемма 3. Если выполнены предположения леммы 2 (и $\bar{f}_2$ определена, как в лемме 2), то $\|f_1\|_{L^{p_1}(M)} \|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7) получаем

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^{p_1}(M)} \|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} &= \|f_1\|_{L^{p_1}(M)} \frac{\|f_1^{p_1-1}\|_{L^{p_2}(M)}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}} \\ &= \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{1-p_1} \left(\int_M f_1^{(p_1-1)\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{1}{p_2}} = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{1-p_1} \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{\frac{p_1}{p_2}} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — пара слоений, связанных диффеоморфизмом $G : M \rightarrow R_1 \times R_2$, и p_1, p_2 — сопряженные числа. Пусть $\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty$ для всех $L_1 \in \mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_1$ имеет p_1 -экстремальную функцию. Тогда

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2) \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через f_1 p_1 -экстремальную функцию $\mathcal{F}_1$. В силу лемм 2 и 3 $\bar{f}_2 = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} f_1^{p_1-1}$ p_2 -допустима, так что

$$\text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2) \leq \|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)}. \quad (13)$$

По лемме 3 $\|f_1\|_{L^{p_1}(M)} \|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = 1$, что вместе с (13) приводит к требуемому. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $G : M \rightarrow R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм. Назовем пару $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, связанную диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, (p_1, p_2) -максимальной, если числа p_1, p_2 сопряженные и

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{F}_2) = 1.$$

Теорема 4. Пусть числа p_1, p_2 сопряженные, а $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — пара (p_1, p_2) -максимальных слоений, связанных диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Кроме того, пусть

$$\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty \quad \text{для всех } L_1 \in \mathcal{F}_1. \quad (14)$$

Тогда

$$f_2 = \frac{f_1^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}, \quad (15)$$

где f_1 и f_2 — p_1 - и p_2 -экстремальные функции для $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу максимальной данной пары слоений (см. определение 5) очевидно, что

$$\text{mod}_{p_i}(\mathcal{F}_i) < \infty \quad \text{для } i = 1, 2. \quad (16)$$

Поскольку (14) выполнено, можно воспользоваться теоремой 1 и, опираясь на (16), получить существование f_1 . Согласно леммам 2 и 3 функция

$$\bar{f}_2 = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} f_1^{p_1-1} \quad (17)$$

p_2 -допустима для $\mathcal{F}_2$ и $\|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-1}$. Отсюда (снова в силу предположения о максимальной) $\|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = \|f_2\|_{L^{p_2}(M)}$. Из единственности экстремальной функции получаем $f_2 = \bar{f}_2$, что и требовалось доказать. $\square$

Этот результат может быть также получен с помощью другого, вариационного, подхода как следствие теоремы 3 и теоремы 4.5 из [13].

Теорема 4 позволяет установить следующее важное свойство максимальной слоения.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — слоения, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, а числа p_1, p_2 сопряженные. Если пара $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ (p_1, p_2) -максимальна и

$$\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty \quad \text{для всех } L_1 \in \mathcal{F}_1, \quad (18)$$

то $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по теореме 4 экстремальные функции f_1 и f_2 для максимальных слоений существуют и $f_2 = \frac{f_1^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}$.

Предположим, что слоения не ортогональны в некоторой точке $x \in M$. Тогда $JG(x) > JG_{\mathcal{F}_1}(x) \cdot JG_{\mathcal{F}_2}(x)$ (т. е. $JG_{\mathcal{F}_1^\perp}(x) > JG_{\mathcal{F}_2}(x)$). Гладкость G влечет существование открытой окрестности $L'_2 \subset L_2^x$ точки x такой, что последнее неравенство выполнено для всех $y \in L'_2$. Тогда $\int_{L'_2} JG_{\mathcal{F}_1^\perp} > \int_{L'_2} JG_{\mathcal{F}_2}$, а также $\int_{L_2^x} JG_{\mathcal{F}_1^\perp} > \int_{L_2^x} JG_{\mathcal{F}_2}$ (поскольку $JG_{\mathcal{F}_1^\perp} \geq JG_{\mathcal{F}_2}$ всюду). Следовательно, $\int_{L_2^x} f_2 > 1$. Однако, с другой стороны, $\int_{L_2} f_2 = 1$ для всех $L_2 \in \mathcal{F}_2$ (см. следствие 1); противоречие. $\square$

В следующей теореме сформулируем необходимое и достаточное условия максимальной пары слоений.

Теорема 6. Пусть числа p_1, p_2 сопряженные и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ связаны диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Допустим, что

$$\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty \quad \text{для всех } L_1 \in \mathcal{F}_1. \quad (19)$$

Тогда пара $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ (p_1, p_2) -максимальна в том и только том случае, когда $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ и существует положительная постоянная c такая, что

$$f_2 = c f_1^{p_1-1}, \quad (20)$$

где f_1 и f_2 — p_1 - и p_2 -экстремальные функции для $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. « $\Rightarrow$ » Следует напрямую из теорем 4 и 5.

« $\Leftarrow$ » В силу (20), теоремы 1 и ортогональности слоений выполнена следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{L_2} f_2 = c \int_{L_2} f_1^{p_1-1} = c \int_{L_2} \frac{JG_{\mathcal{F}_2}}{\left(\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{p_1-1}} \\ &= c \int_{R_2} \left(\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{1-p_1} = c \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}, \end{aligned}$$

стало быть, $c = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1}$. Таким образом, $f_2 = \frac{f_1^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}$. Утверждение теоремы следует из леммы 3. $\square$

ПРИМЕР 3. Найдем экстремальные функции для слоений из примера 2. Для этого, возможно, будет удобнее использовать полярные координаты, т. е. $\tilde{G}(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$. Очевидно, что $J\tilde{G}_{\mathcal{F}_1} = 1$ и $J\tilde{G}_{\mathcal{F}_2} = \frac{1}{r}$. Обозначим через f_1 p_1 -экстремальную функцию для $\mathcal{F}_1$, а через f_2 — p_2 -экстремальную функцию для $\mathcal{F}_2$. Поскольку $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ связаны (также) диффеоморфизмом $(\tilde{G}; (a, b), (0, \alpha))$, то, применяя формулу (4), получим

$$f_1 = \begin{cases} \frac{2-p_2}{b^2-p_2-a^2-p_2} \cdot r^{1-p_2} & \text{при } p_2 \neq 2, \\ \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} \cdot r^{-1} & \text{при } p_2 = 2, \end{cases} \quad f_2 = \frac{1}{\alpha r}.$$

Тем самым $\frac{1}{\alpha r} = f_2 = c f_1^{p_1-1}$, что совпадает с соотношением (20), которое согласно теореме 6 означает (p_1, p_2) -максимальность слоений $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ (для любой

пары (p_1, p_2) сопряженных чисел, а не только для $p_1 = p_2 = 2$, что уже было показано в примере 2).

Заметим, что импликация, обратная к импликации теоремы 5, неверна, поскольку произведение сопряженных модулей двух ортогональных слоений строго меньше единицы.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим диффеоморфизм $G : (x, y) \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 - y^2, xy)$ и многообразие $M = G^{-1}((0, 1)^2)$. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — пара слоений, связанных диффеоморфизмом $(G; (0, 1), (0, 1))$ (ср. с рассуждениями в [17] относительно (p_1, p_2) -емкостей двух конденсаторов на четырехстороннике, определенном на $M = G^{-1}((0, 1)^2)$). Ясно, что $JG = 2r^2$, в то время как $JG_{\mathcal{F}_1} = 2r$ и $JG_{\mathcal{F}_2} = r$. Тогда $JG_{\mathcal{F}_1} = 2JG_{\mathcal{F}_2}$ и $JG = JG_{\mathcal{F}_1} \cdot JG_{\mathcal{F}_2}$. Тем самым предположения следствия 2 выполнены для $p_1 = p_2 = 2$. Следовательно, пара данных слоений $(2, 2)$ -максимальна.

Однако $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ не (p_1, p_2) -максимальны для пары сопряженных $p_1 \neq p_2$. Действительно, обозначим через $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ p_1 - и p_2 -экстремальные функции для $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно. Ввиду формулы (4) получаем

$$\tilde{f}_1 = \frac{JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}} = \frac{r^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int_{L_1} r^{\frac{1}{p_1-1}}} = \frac{r^{\frac{1}{p_1-1}}}{\frac{1}{2} \int_0^1 r^{p_2-2} \circ G^{-1} da}.$$

Аналогично

$$\tilde{f}_2 = \frac{r^{p_1-1}}{\int_0^1 r^{p_1-2} \circ G^{-1} db},$$

где $a = G_1(x, y)$, $b = G_2(x, y)$. Далее, согласно теореме 6 (p_1, p_2) -максимальность влечет, что $\tilde{f}_2 = c\tilde{f}_1^{p_1-1}$. Подставляя выражения, полученные выше, в это равенство, имеем

$$\frac{r^{p_1-2}(x, y)}{c \cdot 2^{p_1-1}} = \frac{\int_0^1 r^{p_1-2} \circ G^{-1} db}{\left(\int_0^1 r^{p_2-2} \circ G^{-1} da \right)^{p_1-1}}$$

для всех $(x, y) \in M$, что эквивалентно тому, что

$$(a^2 + 4b^2)^{\frac{p_1-2}{4}} = r(x, y)^{p_1-2} = c2^{p_1-1} \frac{z_1(a)}{z_2(b)^{p_1-1}},$$

где $z_1(a) = \int_0^1 (a^2 + 4b^2)^{\frac{p_1-2}{4}} db$ и $z_2(b) = \int_0^1 (a^2 + 4b^2)^{\frac{p_2-2}{4}} da$; противоречие.

3. Локальные свойства максимальной пары слоений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — k -мерные слоения на открытых подмногообразиях M . Будем говорить, что $\mathcal{F}_2$ *минорирует* $\mathcal{F}_1$, если для любого $L_1 \in \mathcal{F}_1$ существует $L_2 \in \mathcal{F}_2$ такое, что $L_2 \subset L_1$.

Ниже приводятся свойства модуля, которые являются сформулированными в терминах слоений аналогами свойствам из теоремы 1 в [11]. Часть из них отражает тот факт, что модуль является внешней мерой.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — k -мерные слоения на открытых подмножествах M .

Пусть $p_1 > 0$.

1. Если $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, то

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \leq \text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_2). \quad (21)$$

2. Если $\mathcal{F}_1$ минорирует $\mathcal{F}_2$, то

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_1) \geq \text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_2). \quad (22)$$

Пусть $\mathcal{F}$ — слоение на M . Обозначим через U_i , $i = 1, \dots, \infty$, семейство взаимно не пересекающихся открытых подмножеств M и $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{U_i}$.

3. Если $\mathcal{F} = \bigcup_{\text{п. в. } i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$, то

$$\text{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathcal{F}_i). \quad (23)$$

Пусть $p_1 > 1$.

4. Если $\mathcal{F}$ минорируется всеми $\mathcal{F}_i$, то

$$\text{mod}_{p_1}^{-p_2}(\mathcal{F}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}_{p_1}^{-p_2}(\mathcal{F}_i), \quad (24)$$

где p_1, p_2 сопряженные.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — два ортогональных слоения комплементарных размерностей на M . Обозначим через U_j^i , $i \in 1, \dots, m_1$, $j \in 1, \dots, m_2$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{N}$), взаимно не пересекающиеся открытые подмножества M такие, что $M \subset \bigcup_{i,j} \bar{U}_j^i$. Определим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j^i &= \mathcal{F}|_{U_j^i}, \quad U^i = \text{int}\left(\bigcup_j \bar{U}_j^i\right), \quad \mathcal{F}^i = \mathcal{F}|_{U^i}, \quad \mathcal{G}^i = \mathcal{G}|_{U^i}, \\ U_j &= \text{int}\left(\bigcup_i \bar{U}_j^i\right), \quad \mathcal{F}_j = \mathcal{F}|_{U_j}, \quad \mathcal{G}_j = \mathcal{G}|_{U_j}. \end{aligned} \quad (25)$$

Следующее утверждение существенно усиливает следствие 3.4 из [14].

Лемма 4. Предположим, что

- (1) для любого i слоение $\mathcal{F}^i$ минорируется $\mathcal{F}_1^i, \dots, \mathcal{F}_{m_2}^i$ и $\mathcal{G}^i = \bigcup_{\text{п. в. } j} \mathcal{G}_j^i$;
- (2) для любого j слоение $\mathcal{G}_j$ минорируется $\mathcal{G}_j^1, \dots, \mathcal{G}_j^{m_1}$ и $\mathcal{F}_j = \bigcup_{\text{п. в. } i} \mathcal{F}_j^i$.

Пусть пара сопряженных чисел p_1, p_2 и постоянные $a_{i,j}$, $i = 1, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, m_2$, таковы, что

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}_j^i) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{G}_j^i) \leq a_{i,j}. \quad (26)$$

Тогда

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{G}) \leq \max_{i,j} a_{i,j}. \quad (27)$$

Доказательство. Согласно предположению (1) и свойствам 3, 4 из теоремы 7 имеем

$$\frac{1}{\text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}^i)} \geq \frac{1}{\text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_1^i)} + \dots + \frac{1}{\text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2}^i)},$$

$$\text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{G}^i) = \text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{G}_1^i) + \dots + \text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{G}_{m_2}^i).$$

В силу вышеприведенных оценок получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}^i) \cdot \text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{G}^i) \\ & \leq \frac{\text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_1^i) \dots \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2}^i)}{\text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_2^i) \dots \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2}^i) + \dots + \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_1^i) \dots \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2-1}^i)} (\text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{G}_1^i) + \dots + \text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{G}_{m_2}^i)) \\ & \leq \frac{a_{i,1}^{p_2} \cdot \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_2^i) \dots \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2}^i) + \dots + \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_1^i) \dots \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2-1}^i) \cdot a_{i,m_2}^{p_2}}{\text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_2^i) \dots \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2}^i) + \dots + \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_1^i) \dots \text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}_{m_2-1}^i)} \leq \max_j a_{i,j}^{p_2}, \end{aligned}$$

а значит,

$$\text{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathcal{F}^i) \cdot \text{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathcal{G}^i) \leq a_i,$$

где $a_i = \max_j a_{i,j}$. Тогда в силу предположения (2) и свойств 3, 4 теоремы 7 имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathcal{G})} & \geq \frac{1}{\text{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathcal{G}^1)} + \dots + \frac{1}{\text{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathcal{G}^{m_1})}, \\ \text{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathcal{F}) & = \text{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathcal{F}^1) + \dots + \text{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathcal{F}^{m_1}). \end{aligned}$$

Те же шаги могут быть повторены далее для оценки $\text{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathcal{F}) \cdot \text{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathcal{G})$, что приведет к требуемому неравенству. $\square$

Следствие 3. В силу доказательства леммы 4 очевидно, что

$$\text{mod}_{p_1}(\mathcal{F}) \cdot \text{mod}_{p_2}(\mathcal{G}) < \max_{i,j} a_{i,j},$$

если не все постоянные $a_{i,j}$ равны между собой.

Предыдущий результат порождает несколько следствий для максимальной пары слоений.

Следствие 4. Пусть $G : M \rightarrow R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и p_1, p_2 — пара сопряженных чисел. Пусть слоения $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, (p_1, p_2) -максимальны. Тогда для произвольных открытых множеств $R'_1 \subset R_1, R'_2 \subset R_2$ пара $\mathcal{F}_1|_{G^{-1}(R'_1 \times R'_2)}, \mathcal{F}_2|_{G^{-1}(R'_1 \times R'_2)}$ также (p_1, p_2) -максимальна.

Доказательство. Обозначим

$$R''_1 = \text{int}(R_1 \setminus R'_1), \quad R''_2 = \text{int}(R_2 \setminus R'_2)$$

и

$$\begin{aligned} U_1^1 & = G^{-1}(R'_1 \times R'_2), \quad U_2^1 = G^{-1}(R'_1 \times R''_2), \\ U_1^2 & = G^{-1}(R''_1 \times R'_2), \quad U_2^2 = G^{-1}(R''_1 \times R'_2). \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_1|_{U_j^i}, \mathcal{F}_2|_{U_j^i}, i, j = 1, 2$, удовлетворяют предположениям леммы 4. Значит, здесь может быть применено следствие 3: предположив, что утверждение не выполняется, получаем противоречие с максимальнойностью слоения. $\square$

Следующее утверждение можно считать эквивалентом свойства «локальной экстремальности» p -экстремальных функций для p -емкости четырехсторонника, которое обсуждалось в [17].

Теорема 8. Пусть $G : M \rightarrow R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и p_1, p_2 — пара сопряженных чисел. Пусть слоения $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, (p_1, p_2) -максимальны и $\int_{L_1} JG_{\mathcal{F}_1^{\frac{1}{p_1-1}}} < \infty$ для всех $L_1 \in \mathcal{F}_1$. Тогда для любого открытого множества $R'_1 \subset R_1$ имеем

$$f'_1(x) = f_1(x) \left(\frac{\|f'_1\|_{L^{p_1}(M')}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}} \right)^{p_2} \quad \text{для } x \in M' = G^{-1}(R'_1 \times R_2),$$

где f_1 и f'_1 — p_1 -экстремальные функции для $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_1|_{M'}$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R'_1 — некоторое открытое подмножество R_1 . По следствию 4 пара $\mathcal{F}_1|_{M'}$ и $\mathcal{F}_2|_{M'}$ также (p_1, p_2) -максимальна. Применяя теорему 4 к этим слоениям, а также к $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, получаем существование соответствующих экстремальных функций f'_1, f'_2, f_1, f_2 наряду с соотношениями

$$f'_2(x) = \frac{f'_1(x)^{p_1-1}}{\|f'_1\|_{L^{p_1}(M')}^{p_1}}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x)^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}. \quad (28)$$

Поскольку $\mathcal{F}_2|_{M'}$ состоит из целых листьев $\mathcal{F}_2$, в силу формулы (4) $f'_2(x) = f_2(x)$ для всех $x \in M'$. Это равенство вместе с (28) и (7) приводит к требуемому утверждению. $\square$

4. Заключительные замечания

Обсуждение вопроса, является ли существование диффеоморфизма, удовлетворяющего набору условий, возникающих в следствии 2, необходимым условием максимальной пары более чем одномерных слоений, как в случае семейства кривых в $\mathbb{R}^2$, определенных в четырехстороннике (см. [8, 17]), выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlfors L. V. Lectures on quasiconformal mappings. Princeton, N.J.; Toronto; New York; London: Van Nostrand, 1966.
2. Gehring F. Quasiconformal mappings in space // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 69, N 2. P. 146–164.
3. Heinonen J., Koskela P. Quasiconformal mappings in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. 1998. V. 181. P. 1–61.
4. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
5. HajLász P. Sobolev spaces on metric measure spaces // Contemp. Math. 2003. V. 338. P. 173–218.
6. Heinonen J. Nonsmooth calculus // Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 1979. V. 44, N 2. P. 163–232.
7. Rodin B. The method of extremal length // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. P. 587–606.
8. Dymchenko Yu. V. Equality of the capacity and module of a condenser on a surface // J. Math. Sci. New York. 2003. V. 118, N 1. P. 4795–4807.
9. Hesse J. A p -extremal length and p -capacity equality // Ark. Mat. 1975. V. 13. P. 131–144.
10. Ziemer W. P. Extremal length and p -capacity // Michigan Math. J. 1969. V. 16. P. 43–51.
11. Fuglede B. Extremal length and functional completion // Acta Math. 1957. V. 98. P. 171–219.
12. Suominen K. Quasiconformal maps in manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. 1966. V. 393. P. 1–39.
13. Ciska M. Variation of the modulus of the foliation // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 401. P. 38–46.
14. Pierzchalski A. On the modulus of level sets of conjugate submersions // Differ. Geom. Appl. 2014. V. 36. P. 90–97.

- 15. *Kaźmierczak A., Pierzchalski A.* On some criterion of conformality // *Balk. J. Geom. Appl.* 2016. V. 21, N 1. P. 51–57.
- 16. *Pierzchalski A.* The k -module of level sets of differential mappings // *Math. Inst. Polish Acad. Sci.* 1979. P. 180–185.
- 17. *Романов А. С.* Емкостные соотношения в четырехстороннике // *Сиб. мат. журн.* 2008. Т. 49, № 4. С. 886–897.

Поступила в редакцию 12 марта 2019 г.

После доработки 12 марта 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Казмирчак Анна (Anna Kaźmierczak)

University of Lodz, Faculty of Mathematics and Computer Science,

Banacha 22, 90-238 Lodz, Poland

`anna.kazmierczak@wmii.uni.lodz.pl`