I. Sh. Kalimullin, V. G. Puzarenko, M. Kh. Faizrahmanov, Positive numberings in admissible sets, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 607–621

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.309>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.135.184

April 26, 2023, 12:25:20

УДК 510.5

ПОЗИТИВНЫЕ НУМЕРАЦИИ В ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко,
М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Строится пример допустимого множества $\mathbb{A}$, в котором существует позитивная вычислимая $\mathbb{A}$ -нумерация семейства всех $\mathbb{A}$ -в.п. множеств, в то время как негативные вычислимые $\mathbb{A}$ -нумерации отсутствуют.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.309

Ключевые слова: нумерация, разрешимая нумерация, позитивная нумерация, негативная нумерация, вычислимая нумерация, вычислимое множество, вычислимо перечислимое множество, допустимое множество.

*Посвящается 80-летию академика Ю. Л. Ершова,
основоположника направлений
семантического программирования
и вычислимости на допустимых структурах*

Введение

Цель статьи — рассмотрение нумераций с общих позиций их вычислимости в допустимых множествах. Этот подход предложен и обоснован Ю. Л. Ершовым в [1]. Первое содержательное развитие данный подход получил в работах В. Г. Пузаренко [2–4], а в работах авторов [5, 6] он применен для некоторых важных частных примеров допустимых множеств. Результаты этих работ показывают, что класс вычислимых нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{A})$ всех в.п. множеств в допустимом множестве $\mathbb{A}$ может обладать свойствами, не присущими соответствующим классам как вычислимых в классическом смысле [7], так и обобщенно вычислимых [8, 9] семейств. Например, в [2] найдены допустимые множества $\mathbb{A}$, в которых семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ имеет однозначные вычислимые нумерации или имеет разрешимые, но не имеет однозначных вычислимых нумераций; в [10] строятся допустимые множества, в которых отсутствуют даже позитивные вычислимые нумерации для $\Sigma(\mathbb{A})$. В настоящей работе исследуется зависимость между наличием позитивных и негативных вычислимых нумераций семейств $\Sigma(\mathbb{A})$.

Работа И. Ш. Калимуллина выполнена за счет гранта РНФ № 18–11–00028. Кроме того, он поддержан Минобрнауки РФ как федеральный профессор по математике. Работа В. Г. Пузаренко выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075–15–2019–1613, а также программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1., проект № 0314–2019–0003. Работа М. Х. Файзрахманова выполнена в рамках программы финансирования Математического центра Приволжского федерального округа.

Приведем описание моделей, которые будут лежать в основании рассматриваемых в работе допустимых множеств. Пусть A — бесконечное множество и R_A — отношение эквивалентности на A , разбивающее его на бесконечное число смежных классов, каждый из которых, в свою очередь, также бесконечен. Рассмотрим множество

$$A^+ = \{\{b_1, b_2\} \mid R_A(b_1, b_2), b_1 \neq b_2\}$$

и определим следующие модели.

$$1. \mathfrak{A} = \langle A, R_A \rangle.$$

$$2. \mathfrak{A}^+ = \langle A \uplus A^+, Q_A^+ \rangle, \text{ где } Q_A^+ = \{\langle a, b, c \rangle \in A^2 \times A^+ \mid R_A(a, b), c = \{a, b\}\}.$$

Теорию модели $\mathfrak{A}$ будем обозначать через T , а модели $\mathfrak{A}^+$ — через T_+ . Отметим, что T и T_+ не зависят от выбора бесконечных множеств. Другими словами, модели, указанные в пп. 1, 2, не зависят от выбора бесконечного множества A с точностью до элементарной эквивалентности; более того, данные структуры имеют счетно категоричные теории.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Для модели $\mathfrak{M}$ справедливы следующие условия:

- 1) если $\mathfrak{M} \models T$, то существует разрешимая вычислимая $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}))$, однако не существует однозначной вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}))$;
- 2) если $\mathfrak{M} \models T_+$, то существует позитивная вычислимая $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}))$, однако не существует негативной вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}))$.

§ 1. Предварительные сведения

Основные сведения из теории нумераций можно найти в [7], из теории допустимых множеств — в [1, 11], из классической вычислимости — в [12], а из теории конструктивных моделей — в [13, 14]. Часто символом $\Leftrightarrow$ будем обозначать равенство по определению.

Пусть M — произвольное множество. Тогда положим

$$\begin{aligned} HF_0(M) &\Leftrightarrow \emptyset, \\ HF_{n+1}(M) &\Leftrightarrow \mathcal{P}_\omega(HF_n(M) \cup M), \\ HF(M) &\Leftrightarrow \bigcup_{n \in \omega} HF_n(M) \end{aligned}$$

(здесь $\mathcal{P}_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств множества X). Множество a называется *наследственно конечным* над M , если $a \in HF(M)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель чисто предикатной сигнатуры σ , заданная на множестве M . В этом случае на $HF(M) \cup M$ можно задать модель $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ сигнатуры $\sigma \cup \{U^1, \in^2, \emptyset\}$, называемую *наследственно конечной надстройкой над $\mathfrak{M}$* , так, что сигнатурные символы из σ будут интерпретироваться так же, как и на $\mathfrak{M}$, символы $\emptyset$ и $\in$ — как пустое множество и отношение принадлежности соответственно, а U — как M . В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая, когда σ — конечная сигнатура.

Определим класс Δ_0 -*формул* сигнатуры σ как наименьший класс, содержащий все атомарные формулы и замкнутый относительно логических связок $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, а также ограниченных квантификаций « $\forall y \in x$ » и « $\exists y \in x$ ».

Класс Σ -*формул* — это наименьший класс, содержащий все Δ_0 -формулы и замкнутый относительно логических связок $\wedge$, $\vee$, ограниченных квантификаций « $\forall y \in x$ » и « $\exists y \in x$ », а также квантора существования $\exists$. Σ -*предикатами* называются отношения, определяемые Σ -формулами (возможно, с параметрами). Δ -*предикаты* — это Σ -предикаты, дополнения которых также являются Σ -предикатами.

Под $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -*вычислимыми* и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -*вычислимо перечислимыми* отношениями (сокращенно $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -в. и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -в.п. соответственно) будем понимать соответственно Δ - и Σ -предикаты на $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Семейства всех $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -в.п. и всех $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ -в. множеств будем обозначать через $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}))$ и $\Delta(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}))$ соответственно.

Через $\text{Ord}(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}))$ будем обозначать множество ординалов данной наследственно конечной надстройки, которое используется в конструкции как совокупность натуральных чисел.

Для произвольного набора элементов $\vec{s} \in \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ обозначим через $\text{sp}(\vec{s})$ его *носитель*, который определяется как множество элементов $\mathfrak{M}$, участвующих в построении $\vec{s}$.

Как и в [2], Σ -предикаты будем задавать так называемыми вычислимыми дизъюнкциями. Зафиксируем сильно вычислимую последовательность термов $\{t_m\}_{m \in \omega}$ сигнатуры $\{\emptyset, \cup^2, \{\cdot\}^1\}$ и связанную с ней сильно вычислимую последовательность групп перестановок $\{S_m\}_{m \in \omega}$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Если $\vec{u}$ — набор элементов из $\mathfrak{M}$ длины $\text{lh}(\vec{u})$ и t_m — терм местности $\text{lh}(\vec{u})$, то $t_m(\vec{u}) \in \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

2. Каков бы ни был элемент $a \in \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, найдутся набор $\vec{u}$ попарно различных элементов из $\mathfrak{M}$ и терм t_m местности $\text{lh}(\vec{u})$, для которых будет выполняться равенство $a = t_m(\vec{u})$ (здесь и далее под местностью терма будем понимать его *реальную* местность, т. е. точное количество переменных, участвующих в построении терма).

3. Для каждого $m \in \omega$ группа S_m содержит перестановки множества $\{l \in \omega : l < k\}$, где k — местность терма t_m .

4. Представления из п. 2 элементов $a \in \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ почти однозначны, а именно, для всех $m_0, m_1 \in \omega$ и произвольных наборов $\vec{u}_0, \vec{u}_1$ попарно различных элементов из $\mathfrak{M}$ (причем местность терма t_{m_i} совпадает с $\text{lh}(\vec{u}_i)$, $i = 0, 1$) справедливы следующие условия:

(а) если $t_{m_0}(\vec{u}_0) = t_{m_1}(\vec{u}_1)$, то $m_0 = m_1$;

(б) $t_{m_0}(\vec{u}_0) = t_{m_0}(\vec{u}_1)$, если и только если $\vec{u}_0 = \pi(\vec{u}_1)$ для некоторой перестановки $\pi \in S_{m_0}$.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [15]).

Теорема 1. Пусть σ — сигнатура. Тогда существует двойная вычислимая последовательность $\{A_n^\Phi\}$ множеств, состоящих из гёделевых номеров $\exists$ -формул сигнатуры σ , удовлетворяющая следующему условию: если $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ и $\Phi(x_0, y_0, \dots, y_k)$ — Σ -формула сигнатуры

$$\sigma \uplus \{U^1, \in^2, \emptyset\},$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \{a \mid \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \Phi(a, s_0, \dots, s_k)\} \\ &= \{t_m(\vec{u}) \mid \vec{u} \in \mathfrak{M}, m \in \omega, \mathfrak{M} \models \varphi(\vec{u}, s_0, \dots, s_k) \text{ для некоторой } \varphi \in A_m^\Phi\} \end{aligned}$$

для любых $s_0, \dots, s_k$ из $\mathfrak{M}$.

Имеет место и в некотором смысле обратное утверждение

Теорема 2. Пусть σ — сигнатура и $\{A_n\}$ — вычислимая последовательность множеств, состоящих из гёделевых номеров $\exists$ -формул сигнатуры σ . Тогда

$$\{t_m(\vec{u}) \mid \vec{u} \in \mathfrak{M}, m \in \omega, \mathfrak{M} \models \varphi(\vec{u}, s_0, \dots, s_k) \text{ для некоторой } \varphi \in A_m\}$$

будет Σ -подмножеством $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ для любых модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и элементов $s_0, \dots, s_k$ из $\mathfrak{M}$. Более того, номер Σ -формулы, его определяющей, эффективно находится по вычислимой последовательности и не зависит от модели $\mathfrak{M}$.

Наследственно конечные надстройки служат ключевыми объектами исследований в настоящей работе, и в дальнейшем под допустимыми множествами можно подразумевать именно представителей данного класса.

Напомним основные понятия теории нумераций на допустимых множествах. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и S — множество произвольной природы. Отображение ν , заданное на некотором Σ -множестве структуры $\mathbb{A}$ и действующее на S , называется $\mathbb{A}$ -нумерацией S (в этом случае будем обозначать через $\rho\nu = S$ область значений, а через $\delta\nu$ — область задания ν). Как обычно, на множестве $\delta\nu$ определяется отношение нумерационной эквивалентности следующим образом:

$$\eta_\nu = \{\langle a, b \rangle \in (\delta\nu)^2 \mid \nu(a) = \nu(b)\}.$$

Назовем $\mathbb{A}$ -нумерацию ν

- *позитивной*, если η_ν — Σ -предикат на $\mathbb{A}$;
- *негативной*, если $(\delta\nu)^2 \setminus \eta_\nu$ — Σ -предикат на $\mathbb{A}$;
- *разрешимой*, если она позитивна и негативна одновременно;
- *однозначной*, если η_ν совпадает с отношением равенства на $\delta\nu$.

Далее, для произвольного семейства $S \subseteq \Sigma(\mathbb{A})$ рассмотрим множество

$$\Gamma_\nu^* \Leftarrow \{\langle a; b \rangle \mid a \in \delta\nu, b \in \nu(a)\}.$$

Будем говорить, что $\mathbb{A}$ -нумерация ν семейства S *вычислима*, если $\Gamma_\nu^* \in \Sigma(\mathbb{A})$. Семейство S будем называть $\mathbb{A}$ -*вычислимым*, если оно имеет хотя бы одну вычислимую $\mathbb{A}$ -нумерацию. Из существования универсального Σ -предиката (см. [1]) вытекает, что семейство $\Sigma(\mathbb{A})$ является $\mathbb{A}$ -вычислимым. Так как любое непустое $\mathbb{A}$ -в.п. множество служит областью значений всюду определенной $\mathbb{A}$ -в. функции (см. [16]), во всех случаях, за исключением, возможно, однозначных $\mathbb{A}$ -нумераций, можно предполагать, что рассматриваемые $\mathbb{A}$ -нумерации всюду определены.

§ 2. Положительные условия

Так как теория T разрешима, счетно категорична, имеет элиминацию кванторов, а также разрешимое множество полных формул, по теореме 2 из [2], существует разрешимая вычислимая $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A})$ -нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}))$, где $\mathfrak{A} \models T$.

Дальнейшие рассмотрения в этом параграфе будут касаться допустимого множества $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$, где $\mathfrak{A}^+ \models T_+$. Так как множество A^+ термально представимо в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$, можно считать, что Σ -подмножества $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ закодированы элементами из $HF(A) \cup A$. Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. Семейство $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^+))$ обладает позитивной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерацией.

Сначала разберем случай, когда $\mathfrak{A}^+ \models T_+$ счетна. Следующее утверждение позволит избежать в построении наличия фиктивных параметров, участвующих в определении Σ -множеств.

Лемма 1. Пусть ν — позитивная вычислимая $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерация некоторого подсемейства $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^+))$, $\vec{s}$ — набор параметров, участвующих в Σ -формулах, определяющих Γ_ν^* и η_ν . Пусть также $x_0, x_1 \in \delta\nu \subseteq HF(A) \cup A$ таковы, что $\nu(x_0) = \nu(x_1)$ и $\text{sp}(\vec{s}) \subseteq A$. Тогда существует Σ -формула, определяющая множество $\nu(x_0)$, с параметрами из объединения следующих множеств:

- (1) $\text{sp}(\vec{s})$;
- (2) $\{a\}$, если $[a]_R \cap \text{sp}(\vec{s}) = \emptyset$, $[a]_R \cap \text{sp}(x_0) = \{a\}$ и $[a]_R \cap \text{sp}(x_1) \neq \emptyset$;
- (3) $[a]_R \cap \text{sp}(x_0) \cap \text{sp}(x_1)$, если $[a]_R \cap \text{sp}(\vec{s}) = \emptyset$ и $|[a]_R \cap \text{sp}(x_0)| \geq 2$;
- (4) $\{a_0\}$, если $a_0 \in \text{sp}(x_0)$, $[a_0]_R \cap \text{sp}(\vec{s}) = \emptyset$, $[a_0]_R \cap \text{sp}(x_1) \neq \emptyset$ и $[a_0]_R \cap \text{sp}(x_0) \cap \text{sp}(x_1) = \emptyset$ (берется только один представитель класса $[a_0]_R$);
- (5) $[s_0]_R \cap \text{sp}(x_0) \cap \text{sp}(x_1)$, если $s_0 \in \text{sp}(\vec{s})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η_ν определимо Σ -формулой $\Phi(x, y, \vec{s})$. Фиксируем элементы $a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l \in A$, $n, m \in \omega$, для которых $x_0 = t_n(a_0, \dots, a_k)$ и $x_1 = t_m(b_0, \dots, b_l)$ (элементы соответствующих кортежей попарно различны). Для доказательства утверждения покажем, как можно удалить один элемент (скажем, a_k) из множества $a_0, \dots, a_k$ в зависимости от его расположения. Разберем несколько случаев.

- (1) $a_k \in [a_{k-1}]_R \setminus \bigcup_{s_0 \in \text{sp}(\vec{s})} [s_0]_R$ и $a_k \notin \{b_0, \dots, b_l\}$. Покажем, что следующая

Σ -формула с параметрами $a_0, \dots, a_{k-1}, \vec{s}$ определяет $\nu(x_0)$:

$$\exists v[R(v, a_{k-1}) \& (v \notin \{a_0, \dots, a_{k-1}\}) \& (y \in \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, v)))].$$

Для этого докажем, что для всех $c \in [a_{k-1}]_R \setminus \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$ имеет место равенство

$$\nu(x_0) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)).$$

(а) Пусть сначала $c \notin \{b_0, \dots, b_l\}$. Тогда существует автоморфизм f_0 модели $\mathfrak{A}^+$, оставляющий неподвижными элементы из $\{a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s})$, для которого выполняется равенство $f_0(a_k) = c$. Данный автоморфизм продолжается единственным образом до автоморфизма¹⁾ $f_0^\#$ структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}^+)$. Следовательно, $f_0^\#(x_1) = x_1$, $f_0^\#(x_0) = t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)$ и, стало быть,

$$\nu(x_0) = \nu(x_1) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)).$$

- (б) Пусть теперь $c \in \{b_0, \dots, b_l\}$. По (а) имеем

$$\nu(x_0) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c')),$$

где $c' \in [a_{k-1}]_R \setminus \{a_0, \dots, a_{k-1}, a_k, b_0, \dots, b_l\}$. Тогда существует автоморфизм f_1 модели $\mathfrak{A}^+$, оставляющий неподвижными элементы из $\{a_0, \dots, a_{k-1}, a_k\} \cup \text{sp}(\vec{s})$, для которого выполняется равенство $f_1(c') = c$. Следовательно,

$$f_1^\#(x_0) = x_0, \quad f_1^\#(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c')) = t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)$$

¹⁾В дальнейшем изложении через $h^\#$ всегда будет обозначаться единственное продолжение изоморфизма h модели $\mathfrak{M}_0$ на модель $\mathfrak{M}_1$ до изоморфизма моделей $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$.

и $\nu(x_0) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c))$.

(2) $a_k \notin \bigcup \{[d]_R : d \in \{a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s})\}$. Покажем, что следующая Σ -формула с параметрами $a_0, \dots, a_{k-1}, \vec{s}$ определяет $\nu(x_0)$:

$$\exists v[(v \notin \{a_0, \dots, a_{k-1}\} \cup \text{sp}(\vec{s})) \& (y \in \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, v)))].$$

Для этого установим, что

$$\nu(x_0) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c))$$

для всех $c \in A \setminus (\{a_0, \dots, a_{k-1}\} \cup \text{sp}(\vec{s}))$.

(а) Пусть сначала

$$c \notin \bigcup \{[d]_R : d \in \{a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s})\}.$$

Тогда существует автоморфизм f_0 модели $\mathfrak{A}^+$, действующий неподвижно на элементах из $\{a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s})$, для которого выполняется равенство $f_0(a_k) = c$. Имеем

$$f_0^\#(x_1) = x_1, \quad f_0^\#(x_0) = t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)$$

и, следовательно,

$$\nu(x_0) = \nu(x_1) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)).$$

(б) Пусть теперь

$$c \in \bigcup \{[d]_R : d \in \{a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s})\},$$

но $c \notin \{b_0, \dots, b_l\}$. Рассмотрим структуру $\mathfrak{M}$ с носителем

$$M = (A \uplus A^+) \uplus \{\{x, y\} \mid x \in [a_k]_R, y \in [c]_R\},$$

на котором задано тернарное отношение

$$Q^+ \cup \{\langle x, y, z \rangle \mid z = \{x, y\}, \langle x, y \rangle \in ([a_k]_R \times [c]_R) \cup ([c]_R \times [a_k]_R)\}.$$

Отметим, что $\mathfrak{A}^+ \leq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A}^+ \cong \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$\text{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0, x_1, \vec{s}).$$

Зафиксируем изоморфизм g из $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{A}^+$, действующий тождественно на $a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_l, \vec{s}$ и переводящий a_k в c . Имеем

$$g^\#(x_0) = t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c) \quad \text{и} \quad \nu(g^\#(x_0)) = \nu(g^\#(x_1)) = \nu(x_1).$$

(в) Пусть, наконец, $c \in \{b_0, \dots, b_l\}$. Возьмем

$$c' \in [c]_R \setminus (\{b_0, \dots, b_l, a_0, \dots, a_{k-1}\} \cup \text{sp}(\vec{s})).$$

Тогда из (б) вытекает, что

$$\nu(x_0) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c')).$$

Далее, возьмем автоморфизм f_1 структуры $\mathfrak{A}^+$, оставляющий неподвижно элементы из $\{a_0, \dots, a_k\} \cup \text{sp}(\vec{s})$, для которого выполняется равенство $f_1(c') = c$. Тогда

$$f_1^\#(x_0) = x_0, \quad f_1^\#(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c')) = t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c),$$

$$\nu(x_0) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)).$$

(3) $a_k \in [s_0]_R \setminus (\{b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s}))$ для некоторого $s_0 \in \text{sp}(\vec{s})$. Покажем, что следующая Σ -формула с параметрами $a_0, \dots, a_{k-1}, \vec{s}$ определяет $\nu(x_0)$:

$$\exists v [y \in \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, v)) \& R(v, s_0) \& v \notin \{a_0, \dots, a_{k-1}\} \cup \text{sp}(\vec{s})].$$

Для этого докажем, что

$$\nu(x_0) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c))$$

для всех $c \in [s_0]_R \setminus (\{a_0, \dots, a_{k-1}\} \cup \text{sp}(\vec{s}))$.

(а) Пусть $c \notin \{b_0, \dots, b_l\}$. Тогда нетрудно построить автоморфизм f_0 структуры $\mathfrak{A}^+$, оставляющий неподвижными элементы из $\{a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s})$ и переводящий a_k в c . Имеем $x_1 = f_0^\#(x_0)$ и, следовательно,

$$\nu(x_0) = \nu(x_1) = \nu(f_0^\#(x_0)) = \nu(f_0^\#(x_0)) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)).$$

(б) Пусть $c \in \{b_0, \dots, b_l\}$. По (а) имеем

$$\nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, a_k)) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c')),$$

где $c' \notin \{a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l\} \cup \text{sp}(\vec{s})$. Возьмем автоморфизм f_1 структуры $\mathfrak{A}^+$, действующий неподвижно на элементах из $\{a_0, \dots, a_k\} \cup \text{sp}(\vec{s})$ и переводящий c' в c . Тогда $x_0 = f_1^\#(x_0)$ и, следовательно,

$$\nu(x_0) = \nu(f_1^\#(x_0)) = \nu(f_1^\#(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c'))) = \nu(t_n(a_0, \dots, a_{k-1}, c)).$$

Комбинируя рассмотренные варианты, приходим к завершению доказательства леммы. $\square$

Конструкция построения позитивной вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерации будет схожей с конструкцией из [2], соответствующей построению разрешимой вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A})$ -нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}))$, где $\mathfrak{A} \models T$. Искомая $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерация также будет строиться в виде «расслоения» в зависимости от наименьшего количества параметров, необходимых для определения Σ -множества. Доказательства ряда вспомогательных утверждений для ее построения оказываются крайне схожими с соответствующими доказательствами из [2], поэтому не будем приводить их полные тексты, а укажем лишь необходимые модификации.

Пусть, как обычно, $\text{Tr}_\Sigma([\Phi], \langle a, \vec{s} \rangle)$ — Σ -предикат истинности Σ -формул, для которого выполняется соотношение

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+) \models \text{Tr}_\Sigma([\Phi], \langle a, \vec{s} \rangle) \Leftrightarrow \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+) \models \Phi(a, \vec{s})$$

(здесь $[\Phi]$ — номер формулы Φ в заранее фиксированной гёделевой нумерации, $a \in \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ и $\vec{s}$ — набор элементов из A). Отметим, что предикат Tr_Σ определим некоторой Σ -формулой без параметров, что позволит задать позитивную нумерацию также формулами без параметров. В дальнейшем зачастую формула будет отождествляться с ее гёделевым номером.

Зафиксируем вычислимую последовательность $\{C_{n,m}\}$ множеств, состоящих из номеров $\exists$ -формул, для которой выполняется соотношение

$$\langle n, t_m(\vec{u}), \vec{s} \rangle \in \text{Tr}_\Sigma \Leftrightarrow \exists \varphi \in C_{n,m} [\mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s})].$$

Пусть $\varphi(\vec{u}, \vec{s})$ — $\exists$ -формула от переменных $\vec{u}$ с параметрами $\vec{s}$ и S — подгруппа группы перестановок множества $\{l \in \omega : l < \text{lh}(\vec{u})\}$; тогда через φ^S обозначим формулу $\bigvee \{\varphi(\pi(\vec{u}), \vec{s}) : \pi \in S\}$. Далее, положим для всех $n, m \in \omega$

$$C_{n,m}^{S_m} = \left\{ \left(\bigvee C_{n,m}^t \right)^{S_m} \mid t \in \omega \right\},$$

где $\{C_{n,m}^t\}$ — сильно вычислимая последовательность, монотонная по t , для которой выполняется соотношение $C_{n,m} = \bigcup_t C_{n,m}^t$ (как обычно, $\bigvee \emptyset$ — тождественно ложное $\exists$ -предложение). Непосредственно из определения представления термов вытекает соотношение

$$\langle n, t_m(\vec{u}), \vec{s} \rangle \in \text{Tr}_\Sigma \Leftrightarrow \exists \varphi \in C_{n,m}^{S_m} [\mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s})].$$

Другими словами, можно предполагать, что множества формул определяющей последовательности замкнуты относительно действия соответствующих групп перестановок, оставляющих элементы на месте, а также образуют цепь относительно логического следования.

Пусть $\{p_k\}$ — вычислимая последовательность всех типов теории $\text{Th}(\mathfrak{A}^+)$. Напомним, что данная теория имеет разрешимое множество полных формул, поэтому рассматриваемая последовательность типов однозначно задается вычислимой функцией, выдающей по номеру k полную формулу типа p_k ($k \in \omega$). Примем также соглашение, что $p_0 = \text{Th}(\mathfrak{A}^+)$, и данный «тип» будет «выполняться» на пустом наборе. Будем также предполагать наличие свойства однозначности последовательности типов, а также справедливость свойства

$$k_1 < k_2 \Rightarrow \text{FV}(p_{k_1}) \subseteq \text{FV}(p_{k_2}).$$

Отличительной особенностью в настоящей работе является то обстоятельство, что полная формула типа в общем случае не является $\exists$ -формулой. Чтобы обойти это препятствие, предлагается следующий прием. Каждый набор попарно различных элементов из A длины $l > 1$ можно сопоставить некоторому кортежу $\varepsilon \in \{0; 1\}^{\frac{l^2-l}{2}}$, в котором нуль характеризует, что элементы выбранной пары различных элементов неэквивалентны, а единица — что эквивалентны. Отметим, что в силу транзитивности отношения эквивалентности будут использоваться далеко не все кортежи: к примеру, при $l = 3$ набор $\langle a; b; c \rangle$ соответствует кортежу $\langle \langle a; b \rangle; \langle a; c \rangle; \langle b; c \rangle \rangle$, который, в свою очередь, можно сопоставить одному из следующих пяти, а не восьми наборов: $\langle 0; 0; 0 \rangle$, $\langle 0; 0; 1 \rangle$, $\langle 0; 1; 0 \rangle$, $\langle 1; 0; 0 \rangle$, $\langle 1; 1; 1 \rangle$. Зададим на кортежах $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \{0; 1\}^{\frac{l^2-l}{2}}$ частичный порядок $\varepsilon_0 \trianglelefteq \varepsilon_1$, относительно которого числа естественным образом ($0 < 1$) сравниваются по координатам. Это отношение индуцирует порядок на типах q_0, q_1 кортежей длины l попарно различных элементов из A : положим $q_0 \trianglelefteq q_1$, если типам этих кортежей сопоставляются наборы ε_0 и ε_1 соответственно, причем $\varepsilon_0 \trianglelefteq \varepsilon_1$. Будем использовать обозначение $q_0 \triangleleft q_1$, если $q_0 \trianglelefteq q_1$ и $q_0 \neq q_1$.

Пусть дана Σ -формула $\Phi(a, \vec{r})$ с номером n и набором параметров $\vec{r}$ длины $l(n)$, а $\{q_{i_0}, q_{i_1}, \dots, q_{i_t}\}$ ($i_0 < i_1 < \dots < i_t$) — список всех типов кортежей длины $l(n)$ попарно различных элементов из A . Определим последовательность $A_{n,i_j,m}$ ($0 \leq j \leq t$) следующим образом ($0 \leq j' \leq t$):

$$A_{n,i_j,m}(\vec{s}) = \begin{cases} \{\perp\}, & \text{если } \mathfrak{A}^+ \models q_{i_j}(\vec{s}) \text{ и } q_{i_j} \not\triangleleft q_{i_{j'}}, \\ & \text{либо } \text{lh}(\vec{s}) \neq l(n); \\ C_{n,m}^{S_m}, & \text{если } \mathfrak{A}^+ \models q_{i_j}(\vec{s}); \\ \{\top\}, & \text{если } \mathfrak{A}^+ \models q_{i_j}(\vec{s}) \text{ и } q_{i_j} \triangleleft q_{i_{j'}} \end{cases}$$

(здесь $\top$ и $\perp$ — тождественно истинное и тождественно ложное $\exists$ -предложения соответственно). Полагаем $A_{n,i,m} = \{\perp\}$ при $i \notin \{i_0, i_1, \dots, i_t\}$.

Покажем, что последовательность $\{A_{n,i,m}\}_{n,i,m \in \omega}$ вычислима (с точностью до эквивалентности). Пусть тип q_{i_j} сопоставляется кортежу $\langle \varepsilon_{gh}^{i_j} \mid 0 \leq g < h < l(n) \rangle$, соответствующему набору $\langle \langle s_g, s_h \rangle \mid 0 \leq g < h < l(n) \rangle$ ($0 \leq j \leq t$). Тогда

$$\begin{aligned} A'_{n,i,m} = \{ \perp \} \cup \{ \bigwedge \{ (\exists x Q(s_g, s_h, x) \wedge \varphi(\vec{u}, \vec{s})) \mid 0 \leq g < h < l(n), \varepsilon_{gh}^i = 1 \} \\ \mid \varphi \in C_{n,m}^{S_m}, \text{FV}(q_i) = l(n) = \text{lh}(\vec{s}) \} \\ \cup \{ \bigwedge \{ \exists x Q(s_g, s_h, x) \mid 0 \leq g < h < l(n), \varepsilon_{gh}^{i'} = 1 \} \\ \mid \text{FV}(q_i) = l(n) = \text{lh}(\vec{s}), q_i \triangleleft q_{i'} \}. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что

$$\nu(n, i, \vec{s}) = \{ t_m(\vec{u}) \mid m \in \omega, \vec{u} \in A, \exists \varphi \in A_{n,i,m} [\mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s})] \}$$

является вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерацией семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+))$.

Введем в рассмотрение семейство $\{W_k\}_{k \in \omega}$ множеств всех разнозначных функций w с $\delta w \subseteq \text{Ord}(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+))$, удовлетворяющих следующим условиям:

(а) $\rho w \subseteq \mathcal{P}(A_k)$, где A_k — множество всех типов q , для которых

$$p_k(\vec{x}) \cup p_l(\vec{y}) \subseteq q(\vec{x}, \vec{y}), \quad 0 \leq l \leq k$$

(в этом случае будем говорить, что тип q расширяет p_k с помощью p_l), причем p_k и p_l — типы кортежей попарно различных элементов из A ;

(б) $\bigcup \rho w$ содержит все типы, расширяющие p_k с помощью p_l , $0 \leq l < k$, причем p_k и p_l — типы кортежей попарно различных элементов из A .

Лемма 2. Существует вычислимая последовательность $\{B_{\langle l, w, k \rangle, m}\}$, заданная на некотором в.п. подмножестве, состоящем из кортежей вида $\langle \langle l, w, k \rangle, m \rangle$, где $l, m \in \omega$, $w \in W_k$, определяющая семейство всех непустых $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -в.п. множеств (в смысле теорем 1, 2, при подстановке параметров $\vec{s}$ попарно различных элементов, реализующих тип $p_{k'} \supseteq p_k$), для которой выполняются следующие условия:

(i) для каждого непустого $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -в.п. множества

$$B \neq HF(\text{dom}(\mathfrak{A}^+)) \cup \text{dom}(\mathfrak{A}^+)$$

существует единственный номер k_0 такой, что для некоторых $l_0, w_0 \in W_{k_0}$ последовательность $\{B_{\langle l_0, w_0, k_0 \rangle, m}\}_{m \in \omega}$ с фиксированным набором параметров $\vec{s}$, реализующим тип p_{k_0} , задает B ;

(ii) для любого кортежа $\langle l, w, k \rangle$, для которого $w \in W_k$ и последовательность $\{B_{\langle l, w, k \rangle, m}\}_{m \in \omega}$ с параметрами, реализующими тип p_k , задает непустое $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -в.п. множество, справедливо следующее: $q \in A_k \setminus (\bigcup \rho w)$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{B_{\langle l, w, k \rangle, m}\}_{m \in \omega}$, рассматриваемая с параметрами $\vec{s}$ и $\vec{s}'$, реализующими тип p_k , для которых $\mathfrak{A}^+ \models q(\vec{s}, \vec{s}')$, задает одно и то же Σ -множество;

(iii) для любого кортежа $\langle l, w, k \rangle$, последовательность $\{B_{\langle l, w, k' \rangle, m}\}_{m \in \omega}$ с параметрами, реализующими тип $p_{k'} \supset p_k$, задает множество

$$HF(\text{dom}(\mathfrak{A}^+)) \cup \text{dom}(\mathfrak{A}^+),$$

если она с параметрами, реализующими тип p_k , задает непустое Σ -множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы следует внести несущественные изменения в доказательство леммы 1 из [2]. Пусть кортеж $\langle l, w, k \rangle$ таков, что $w \in W_k$. Используя сильную аппроксимацию последовательности $A_{\langle l, k \rangle, m}$, будем строить последовательность $B_{\langle l, w, k \rangle, m}$. Для того чтобы обеспечить одновременно условия (i), (ii), для каждого $m_0 \in \omega$ будем помещать произвольную $\exists$ -формулу $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) \in A_{\langle l, k \rangle, m_0}$ в $B_{\langle l, w, k \rangle, m_0}$ в том случае, когда выполняются следующие условия ($\mathfrak{A}^+ \models p_k(\vec{s}) \cup p_j(\vec{s}')$):

(1) для всех $q \in w(m_0)$ если $\mathfrak{A}^+ \models q(\vec{s}, \vec{s}')$ и $j = k$, то

$$\emptyset \neq \{t_{m_0}(\vec{u}) \mid \mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s})\} \neq \{t_{m_0}(\vec{u}) \mid \mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s}')\};$$

(2) для всех $q \in w(m_0)$ если и $j < k$, то

$$\emptyset \neq \{t_{m_0}(\vec{u}) \mid \mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s})\} \neq \{t_{m_0}(\vec{u}) \mid \mathfrak{A}^+ \models \varphi'(\vec{u}, \vec{s}')\}$$

для любой $\exists$ -формулы φ' ;

(3) для всех $q \in A_k \setminus (\bigcup \rho w)$ если $\mathfrak{A}^+ \models q(\vec{s}, \vec{s}')$, то

$$\{t_{m_0}(\vec{u}) \mid \mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s})\} = \{t_{m_0}(\vec{u}) \mid \mathfrak{A}^+ \models \varphi(\vec{u}, \vec{s}')\}.$$

При этом если $w(m_0)$ не определено, то первые два условия не проверяем.

Далее оставляем только последовательности, удовлетворяющие условию

$$A(l, w, k)(\Leftarrow \forall m_0 \in \delta w[B_{\langle l, w, k \rangle, m_0} \neq \emptyset]).$$

В конечном итоге добавляем $\exists$ -формулы

$$\bigwedge \{ \exists x Q(s_g, s_h, x) \mid 0 \leq g < h < l(l), \varepsilon_{gh}^{k'} = 1 \}$$

в $B_{\langle l, w, k \rangle, m}$, если $A(l, w, k)$ и $p_k \triangleleft p_{k'}$. $\square$

В качестве аппроксимации вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+))$ будем использовать сильно вычислимую последовательность, построенную в следующей лемме.

Лемма 3. *Найдется сильно вычислимая последовательность $\{V_{\langle n, w, k \rangle}^t\}$ ($t, n, k \in \omega$, $w \in W_k$) множеств, состоящих из пар вида $\langle m, \varphi \rangle$, где $m \in \omega$, а φ — формула сигнатуры модели $\mathfrak{A}^+$, удовлетворяющая следующим условиям.*

1. $\forall m \in \delta w[C_{\langle n, w, k \rangle, m}^t \neq \emptyset]$ для всех t и кортежей $\langle n, w, k \rangle$ таких, что $B_{\langle n, w, k \rangle, m}$ задает непустое $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -в.п. множество, где

$$C_{\langle n, w, k \rangle, m}^t \Leftarrow \{ \varphi \mid \langle m, \varphi \rangle \in V_{\langle n, w, k \rangle}^t \},$$

а $\{B_{\langle n, w, k \rangle, m}\}$ — последовательность из леммы 2.

2. $C_{\langle n, w, k \rangle, m}^0 \subseteq \dots \subseteq C_{\langle n, w, k \rangle, m}^s \subseteq C_{\langle n, w, k \rangle, m}^{s+1} \subseteq \dots \subseteq \bigcup_s C_{\langle n, w, k \rangle, m}^s$
 $= B_{\langle n, w, k \rangle, m} \setminus \{ \wedge \{ \exists x Q(s_g, s_h, x) \mid 0 \leq g < h < l(n), \varepsilon_{gh}^{k'} = 1 \} \mid p_k \triangleleft p_{k'} \}$

для всех n, w, k, m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь используется стандартная конструкция построения сильно вычислимой последовательности $V_{\langle n, w, k \rangle}^t$ по $B_{\langle n, w, k \rangle, m}$ с учетом свойств последней, приведенных в лемме 2. $\square$

Перейдем к доказательству основной теоремы параграфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Леммы 2 и 3 позволяют отдельно рассмотреть $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -в.п. множества, заданные последовательностями, соответствующими парам вида $\langle k, A_k \setminus (\bigcup \rho w) \rangle$. Для построения искомой позитивной нумерации воспользуемся конструкцией фридберговой нумерации из [17] со следующими модификациями:

- под «равенством» понимаем совпадение множеств, задаваемых аппроксимацией из леммы 3, при этом, чтобы не возникало коллизий, рассматриваем формулы с точностью до эквивалентности с наименьшими гёделевыми номерами;

- сдвиг в случае нарушения будет осуществляться с помощью добавления пары вида $\langle m, \top \rangle$, где m — достаточно большое число и $t_m(\emptyset)$ является ординалом;

- в завершение конструкции для кортежей вида $\langle n, w, k \rangle$ добавляем все пары

$$\left\langle m, \bigwedge \{ \exists x Q(s_g, s_h, x) \mid 0 \leq g < h < l(n), \varepsilon_{gh}^{k'} = 1 \} \right\rangle,$$

если $p_k \triangleleft p_{k'}$.

Отметим, что данная конструкция приводит к построению позитивной вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерации, все атрибуты которой определяются Σ -формулами без параметров. Действительно, сначала добавим единственный код для пустого множества. В итоге получаем (эквивалентность рассматривается в рамках области задания ν , являющейся $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -в.п. множеством)

$$\begin{aligned} \nu(\langle l_1, w_1, k_1 \rangle, \vec{s}) &= \nu(\langle l_2, w_2, k_2 \rangle, \vec{s}') \\ \Leftrightarrow 1. & \left[((l_1, w_1, k_1) = (l_2, w_2, k_2)) \& \exists q \in A_{k_1} \setminus (\bigcup \rho w_1) (\mathfrak{A}^+ \models q(\vec{s}, \vec{s}')) \right] \\ \vee 2. & [(((l_1 = l_0) \& (w_1 = \emptyset) \& (k_1 = 0) \& (\vec{s} = \emptyset)) \\ & \vee \exists k'_1 ((p_{k_1} \triangleleft p_{k'_1}) \& (\mathfrak{A}^+ \models p_{k'_1}(\vec{s})))) \\ & \& (((l_2 = l_0) \& (w_2 = \emptyset) \& (k_2 = 0) \& (\vec{s}' = \emptyset)) \vee \exists k'_2 ((p_{k_2} \triangleleft p_{k'_2}) \& (\mathfrak{A}^+ \models p_{k'_2}(\vec{s}'))))], \end{aligned}$$

где $\langle l_0, \emptyset, \emptyset \rangle, \emptyset$ — ν -код множества $HF(\text{dom}(\mathfrak{A}^+)) \cup \text{dom}(\mathfrak{A}^+)$ как множества, определимого Σ -формулой без параметров.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\mathfrak{A}^+$ несчетна. По теореме Левенгейма — Сколема имеем $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}') \preceq \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ для подходящей счетной модели $\mathfrak{A}' \models T_+$, а ввиду счетной категоричности теории T^+ и доказанного выше заключаем, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ также имеет позитивную вычислимую $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерацию семейства всех $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -множеств (разумеется, здесь используется, что предикат, который строится для счетного случая, определяется без параметров). $\square$

§ 3. Отрицательные условия

Данный параграф посвящен доказательству отсутствия негативных вычислимых $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+))$, где $\mathfrak{A}^+ \models T_+$, а также отсутствия однозначных вычислимых $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A})$ -нумераций семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}))$, где $\mathfrak{A} \models T$. Доказательство следующего утверждения может быть получено из теоремы 3 в [2]. Здесь же приведем непосредственное доказательство ввиду его методологической важности для дальнейшего изложения.

Предложение 1. *Не существует однозначной вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A})$ -нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}))$, где $\mathfrak{A} \models T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathfrak{A}$ счетна. Допустим, что однозначная вычислимая $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A})$ -нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}))$ существует (скажем, ν , причем Γ_ν^* определимо некоторой Σ -формулой с параметрами $\vec{s}$ из $\mathfrak{A}$). Возьмем класс эквивалентности $[a]_R$, не содержащий параметров. Пусть $x_0 \in HF(A) \cup A$ таков, что $\nu(x_0) = [a]_R$. Возможны два случая.

(1) $\text{sp}(x_0) \cap [a]_R = \emptyset$. Выберем автоморфизм f структуры $\mathfrak{A}$, действующий тождественно на множестве $\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s})$ и переводящий класс $[a]_R$ на некоторый другой класс $[b]_R$ (как нетрудно понять, также не пересекающийся с $\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s})$). Данный автоморфизм единственным образом продолжается до автоморфизма $f^\#$ структуры $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A})$. Имеем $x_0 = f^\#(x_0)$ и, следовательно,

$$[a]_R = \nu(x_0) = \nu(f^\#(x_0)) = [f^\#(a)]_R = [b]_R.$$

Таким образом пришли к противоречию с выбором a и b .

(2) $\text{sp}(x_0) \cap [a]_R \neq \emptyset$. Выберем автоморфизм f структуры $\mathfrak{A}$, действующий тождественно на множестве $(\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s})) \setminus [a]_R$ и переводящий класс $[a]_R$ на себя так, чтобы выполнялось соотношение $(\text{sp}(x_0) \cap f(\text{sp}(x_0))) \cap [a]_R = \emptyset$. Тогда $x_0 \neq f^\#(x_0)$, но

$$\nu(x_0) = [a]_R = \nu(f^\#(x_0)).$$

Приходим к противоречию с однозначностью ν .

Пусть $\mathfrak{A}$ несчетна. Допустим, что однозначная вычислимая $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A})$ -нумерация существует (скажем ν , причем Γ_ν^* определимо Σ -формулой $\Phi(x, y, \vec{s})$ с параметрами $\vec{s}$). Далее, $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}_0, \vec{s}) \preceq \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}, \vec{s})$ для некоторой счетной структуры $(\mathfrak{A}_0, \vec{s})$. В силу счетной категоричности $\text{Th}(\mathfrak{A})$ по доказанному выше заключаем, что не существует однозначной вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}_0)$ -нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}_0))$. Однако

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}) \models \forall a \exists b \forall c (U(a, c) \leftrightarrow \Phi(b, c, \vec{s})) \\ \wedge \forall a \forall b [\exists c \Phi(a, c, \vec{s}) \wedge \forall c (\Phi(a, c, \vec{s}) \leftrightarrow \Phi(b, c, \vec{s})) \rightarrow (a = b)], \end{aligned}$$

где U — универсальный Σ -предикат. Следовательно, эта же формула истинна и в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}_0)$. Пришли к противоречию. $\square$

Предложение 2. Не существует негативной вычислимой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерации семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+))$, где $\mathfrak{A}^+ \models T_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathfrak{A}^+$ счетна. Допустим, что существует негативная вычислимая $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерация семейства $\Sigma(\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{A}^+))$ (скажем ν_0 , причем $\Gamma_{\nu_0}^*$ и $(\delta\nu_0)^2 \setminus \eta_{\nu_0}$ определимы соответственно Σ -формулами $\Phi_0(x, y, \vec{s})$ и $\Phi_1(x, y, \vec{s})$ с параметрами $\vec{s}$). Как и выше, в силу термальности множества A^+ можно считать, что параметры лежат в A и $\delta\nu_0 \subseteq HF(A) \cup A$.

Возьмем класс эквивалентности $[a]_R$, не содержащий параметров. Пусть $x_0 \in HF(A) \cup A$ таков, что $\nu_0(x_0) = [a]_R$. Возможны два случая.

(1) $\text{sp}(x_0) \cap [a]_R = \emptyset$. Выберем автоморфизм f структуры $\mathfrak{A}^+$, действующий тождественно на множестве $\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s})$ и переводящий класс $[a]_R$ на некоторый другой класс $[b]_R$ (как нетрудно понять, также не пересекающийся с $\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s})$). Тогда $x_0 = f^\#(x_0)$ и, следовательно,

$$[a]_R = \nu(x_0) = \nu(f^\#(x_0)) = [f^\#(a)]_R = [b]_R.$$

Приходим к противоречию с выбором a и b .

(2) $\text{sp}(x_0) \cap [a]_R \neq \emptyset$. Выберем автоморфизм f структуры $\mathfrak{A}^+$, действующий тождественно на множестве $(\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s})) \setminus [a]_R$ и переводящий класс $[a]_R$ на некоторый другой класс $[b]_R$ (как нетрудно понять, также не пересекающийся с $\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s}) \setminus [a]_R$). Тогда

$$\nu_0(x_0) = [a]_R \neq [b]_R = \nu_0(f^\#(x_0))$$

и, следовательно,

$$\langle x_0, f^\#(x_0) \rangle \in (\delta\nu_0)^2 \setminus \eta_{\nu_0},$$

т. е. $\text{HIF}(\mathfrak{A}^+) \models \Phi_1(x_0, f^\#(x_0), \vec{s})$.

Рассмотрим структуру $\mathfrak{B}$ с основным множеством

$$B = (A \uplus A^+) \uplus \{\{z_1, z_2\} \mid z_1 \in [a]_R, z_2 \in [b]_R\},$$

на котором задано тернарное отношение

$$Q^+ \cup \{\langle x, y, z \rangle \mid z = \{x, y\}, z \subseteq [a]_R \cup [b]_R, \neg R(x, y)\}.$$

Отметим, что, с одной стороны, (1) $\mathfrak{A}^+ \leq \mathfrak{B}$, с другой стороны, (2) $\mathfrak{A}^+$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны. Из соотношения (1) получаем, что

$$\text{HIF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_1(x_0, f^\#(x_0), \vec{s}).$$

Используя соотношение (2), фиксируем изоморфизмы f_0 и f_1 из $\mathfrak{A}^+$ на $\mathfrak{B}$, соответственно тождественные на $\text{sp}(x_0) \cup \text{sp}(\vec{s})$ и $\text{sp}(f^\#(x_0)) \cup \text{sp}(\vec{s})$ и переводящие $[a]_R, [b]_R$ на $[a]_R \cup [b]_R$. Тогда

$$\begin{aligned} z \in [a]_R &\Leftrightarrow \text{HIF}(\mathfrak{A}^+) \models \Phi_0(x_0, z, \vec{s}) \Leftrightarrow \text{HIF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(f_0^\#(x_0), f_0^\#(z), f_0^\#(\vec{s})) \\ &\Leftrightarrow \text{HIF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(x_0, f_0^\#(z), \vec{s}) \Leftrightarrow f_0^\#(z) \in f_0^\#([a]_R) = [a]_R \cup [b]_R. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} z \in [b]_R &\Leftrightarrow \text{HIF}(\mathfrak{A}^+) \models \Phi_0(f^\#(x_0), z, \vec{s}) \\ &\Leftrightarrow \text{HIF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(f_1^\#(f^\#(x_0)), f_1^\#(z), f_1^\#(\vec{s})) \\ &\Leftrightarrow \text{HIF}(\mathfrak{B}) \models \Phi_0(f^\#(x_0), f_1^\#(z), \vec{s}) \Leftrightarrow f_1^\#(z) \in f_1^\#([b]_R) = [a]_R \cup [b]_R. \end{aligned}$$

Далее, возьмем изоморфизм g между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}^+$, оставляющий неподвижными параметры $\vec{s}$. Тогда, с одной стороны,

$$\nu(g^\#(x_0)) = \nu(g^\#(f^\#(x_0))),$$

а с другой стороны,

$$\text{HIF}(\mathfrak{A}^+) \models \Phi_1(g^\#(x_0), g^\#(f^\#(x_0)), \vec{s})$$

и, следовательно,

$$\nu(g^\#(x_0)) \neq \nu(g^\#(f^\#(x_0))).$$

Пришли к противоречию.

Пусть $\mathfrak{A}^+$ несчетна. Допустим, что негативная вычислимая $\text{HIF}(\mathfrak{A}^+)$ -нумерация существует (скажем ν , причем Γ_ν^* и $\delta\nu^2 \setminus \eta_\nu$ определимы Σ -формулами соответственно $\Phi_0(x, y, \vec{s})$ и $\Phi_1(x, y, \vec{s})$ с параметрами $\vec{s}$). Как и в доказательстве предложения 1, фиксируем счетную структуру $(\mathfrak{A}_0, \vec{s})$, для которой $\text{HIF}(\mathfrak{A}_0, \vec{s}) \preceq \text{HIF}(\mathfrak{A}^+, \vec{s})$. В силу счетной категоричности $\text{Th}(\mathfrak{A}^+)$ по доказанному выше заключаем, что не существует негативной вычислимой $\text{HIF}(\mathfrak{A}_0)$ -нумерации семейства $\Sigma(\text{HIF}(\mathfrak{A}_0))$. Однако

$$\begin{aligned} \text{HIF}(\mathfrak{A}^+) \models \forall a \exists b \forall c (U(a, c) \leftrightarrow \Phi_0(b, c, \vec{s})) \\ \wedge \forall a \forall b [\forall c (\Phi_0(a, c, \vec{s}) \leftrightarrow \Phi_0(b, c, \vec{s})) \rightarrow \neg \Phi_1(a, b, \vec{s})], \end{aligned}$$

где U — универсальный Σ -предикат. Следовательно, эта же формула истинна и в $\text{HIF}(\mathfrak{A}_0)$. Пришли к противоречию. $\square$

§ 4. О минимальных нумерациях

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и ν_0, ν_1 — $\mathbb{A}$ -нумерации множеств S_0 и S_1 соответственно. Будем говорить, что ν_0 *сводится* к ν_1 (и обозначать через $\nu_0 \leq \nu_1$), если существует бинарный Σ -предикат R , удовлетворяющий следующим условиям:

- $\delta\nu_0 = \{a \mid R(a, y) \text{ для некоторого } y\}$;
- $\{b \mid R(x, b) \text{ для некоторого } x\} \subseteq \delta\nu_1$;
- $R(a_0, a_1) \Rightarrow \nu_0(a_0) = \nu_1(a_1)$ для всех a_0, a_1 .

Будем говорить, что ν_0 и ν_1 *эквивалентны* (и обозначать через $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leq \nu_1$ и $\nu_1 \leq \nu_0$. Отношение сводимости индуцирует порядок на множестве $L_{\mathbb{A}}(S)$ классов эквивалентных $\mathbb{A}$ -нумераций подмножеств множества S , относително которого структура $\langle L_{\mathbb{A}}(S), \leq \rangle$ образует верхнюю полурешетку. При этом любой верхний конус $\check{a} = \{b \in L_{\mathbb{A}}(S) : a \leq b\}$ является дистрибутивной верхней полурешеткой (фактически доказано в [18]). $\mathbb{A}$ -нумерация ν множества S называется *минимальной*, если $\mu \leq \nu \Rightarrow \mu \equiv \nu$, для любой $\mathbb{A}$ -нумерации μ множества $\rho\nu$.

Как и в классическом случае, справедливо

Предложение 3. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и ν — позитивная $\mathbb{A}$ -нумерация. Тогда ν минимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и ν — позитивная $\mathbb{A}$ -нумерация, т. е. $\eta_\nu = \{\langle a, b \rangle \in (\delta\nu)^2 : \nu(a) = \nu(b)\}$ — Σ -предикат на $\mathbb{A}$. Пусть также $\mathbb{A}$ -нумерация μ такова, что $\mu \leq \nu$, причем Σ -предикат R осуществляет данную сводимость. Тогда Σ -предикат

$$\{\langle a, b \rangle : \exists x(\eta_\nu(x, a) \& R(b, x))\}$$

осуществляет сводимость ν к μ . $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость. М.: Экономика, 2000.
2. Пузаренко В. Г. О разрешимых вычислимых $\mathbb{A}$ -нумерациях // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 5. С. 568–584.
3. Пузаренко В. Г. Об одной полурешетке нумераций // Мат. тр. 2009. Т. 12, № 2. С. 170–209.
4. Пузаренко В. Г. Об одной полурешетке нумераций. II // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 4. С. 498–519.
5. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г., Файзрахманов М. Х. Позитивные представления семейств относительно e -оракулов // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 823–833.
6. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г., Файзрахманов М. Х. Частичные разрешимые представления в гиперарифметике // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 3. С. 599–609.
7. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
8. Гончаров С. С., Сорби А. Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.
9. Бадаев С. А., Гончаров С. С. Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 555–569.
10. Пузаренко В. Г. К вычислимости на специальных моделях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
11. Barwise J. Admissible sets and structures. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1975.
12. Soare R. I. Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1987.
13. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
14. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

15. Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I. $\mathbb{H}\mathbb{F}$ -computability // Computability in context: Computation and logic in the real world. Singapore: World Sci. Publ., 2011. P. 169–242. doi.org/10.1142/p577.
16. Пузаренко В. Г. Обобщенные нумерации и определимость поля $\mathbb{R}$ в допустимых множествах // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2003. Т. 2, № 3. С. 107–117.
17. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
18. Пузаренко В. Г. О вычислимости над моделями разрешимых теорий // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 170–197.

Поступила в редакцию 24 февраля 2020 г.

После доработки 24 февраля 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
ikalimul@gmail.com

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vagrigh@math.nsc.ru

Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
marat.faiзраhmanov@gmail.com