M. N. Leont'eva, Relatively intrinsically computable relations on boolean algebras with a distinguished set of atoms, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 622–633

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.310>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.164.48.24

April 26, 2023, 15:40:34

УДК 510.5+510.6+512.563

ОТНОСИТЕЛЬНО НАСЛЕДСТВЕННО
ВЫЧИСЛИМЫЕ ОТНОШЕНИЯ
НА БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ С ВЫДЕЛЕННЫМ
МНОЖЕСТВОМ АТОМОВ
М. Н. Леонтьева

Аннотация. Доказывается теорема, дающая полное описание относительно наследственно вычислимых отношений на булевых алгебрах с выделенным множеством атомов.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.310

Ключевые слова: булева алгебра, вычислимая функция, вычислимая модель, наследственно вычислимое отношение, относительно наследственно вычислимое отношение.

К 80-летию академика Юрия Леонидовича Ершова

Введение

Данная работа является продолжением работ [1, 2] по изучению наследственно вычислимых отношений на булевых алгебрах в обогащенной сигнатуре. Пусть $\mathcal{A}$ — вычислимая структура в некотором языке. Подмножество $R \subseteq \mathcal{A}^l$ называется *наследственно вычислимым*, если для любой вычислимой структуры $\mathcal{B}$ того же языка и любого изоморфизма $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ образ $g(R)$ является вычислимым множеством. В [1] получено полное описание наследственно вычислимых отношений в случае, когда $\mathcal{A}$ — булева алгебра, которое говорит, что произвольное отношение R в вычислимой булевой алгебре $\mathcal{A}$ наследственно вычислимо тогда и только тогда, когда оно определимо в ней бескванторной формулой с конечным набором констант.

В [2] рассматривался случай, когда $\mathcal{A}$ — булева алгебра с добавленными в язык предикатными символами, выделяющими идеалы на булевой алгебре. Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathcal{A}^l$ *относительно наследственно вычислимо*, если для любой структуры $\mathcal{B}$ того же языка, носитель которой является подмножеством ω , и любого изоморфизма $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ образ $g(R)$ вычислим относительно оракула $D(\mathcal{B})$, где $D(\mathcal{B})$ — диаграмма $\mathcal{B}$. Из определений видно, что относительно наследственная вычислимость является более сильным понятием, чем наследственная вычислимость. В [2] получено полное описание относительно наследственно вычислимых отношений на булевых алгебрах с выделенными идеалами [2, теорема 3], а также доказано, что на булевых алгебрах с

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314–2019–0002) при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–01–00300.

двумя выделенными идеалами это описание характеризует также наследственно вычислимы отношения.

Цель настоящего исследования — изучение наследственно вычислимых отношений на булевых алгебрах с выделенным множеством атомов At . В данной статье удалось получить полное описание относительно наследственно вычислимых отношений на булевых алгебрах с выделенным множеством атомов (теорема 2). В настоящее время не существует примера наследственно вычислимого, но не относительно наследственно вычислимого отношения на булевой алгебре в расширенной сигнатуре и существует гипотеза о совпадении этих понятий на булевых алгебрах в любой расширенной сигнатуре. Вопрос, совпадает ли полученное в теореме 2 описание с описанием наследственно вычислимых отношений на булевых алгебрах с выделенным множеством атомов, остается открытым.

§ 1. Необходимое условие относительно наследственной вычислимости отношений на $(\mathcal{A}^*, \text{At})$

Булевы алгебры будут рассматриваться в языке $L_{BA} = (+, \cdot, -, 0, 1)$. Запись $x - y$ означает $x \cdot (-y)$. Пусть $\mathcal{A}^*$ — булева алгебра. Если $a \in \mathcal{A}^*$, то обозначим через $\hat{a}$ булеву алгебру, образованную множеством $\{x \in \mathcal{A}^* \mid x \leq a\}$ и операциями $+$ и $\cdot$, полученными сужением из $\mathcal{A}^*$; в такой алгебре $1_{\hat{a}} = a$, $0_{\hat{a}} = 0$ и $(-x)_{\hat{a}} = (-x)_{\mathcal{A}^*} \cdot a$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$. *Характеристикой* элемента $x \in \mathcal{A}$ будем называть

$$P_x = \begin{cases} 0, & \text{если } \hat{x} \models 0 = 1 \quad (x = 0); \\ 1, & \text{если } \hat{x} \models \text{At}(1) \quad (x - \text{атом}); \\ 2, & \text{если } \hat{x} \models \neg \text{At}(1) \& \neg 0 = 1 \quad (x \text{ не } 0 \text{ и не атом}). \end{cases}$$

Символом T_{At} обозначается теория булевых алгебр $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$. Если θ — предложение языка теории T_{At} , то легко указать способ построения формулы $\varphi_\theta(x)$ со следующим свойством: $\mathcal{A} \models \varphi_\theta(a) \Leftrightarrow \hat{a} \models \theta$ для любой булевой алгебры $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$ и $a \in \mathcal{A}$. Будем символически обозначать такую формулу $\varphi_\theta(x)$ через $\hat{x} \models \theta$. Зафиксируем число l , набор переменных $\bar{x} = x_1, \dots, x_l$ и некоторое перечисление $t_1^*(\bar{x}), \dots, t_r^*(\bar{x})$ всех термов вида $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_l^{\varepsilon_l}$, где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \in \{0, 1\}$, $x^1 = x$ и $x^0 = -x$ (в этом случае $r = 2^l$). Запись $y_1, \dots, y_k | x$ означает, что $y_1 + \dots + y_k = x$ и $y_i \cdot y_j = 0$ при $i \neq j$. Следующее предложение доказано в [2] для случая теории булевых алгебр с выделенными идеалами. Покажем, что оно верно и для теории T_{At} .

Предложение 1. (а) Любая формула $\varphi(\bar{x})$ эквивалентна в T_{At} конечной дизъюнкции формул вида

$$\widehat{t_1^*(\bar{x})} \models \theta_1 \& \dots \& \widehat{t_r^*(\bar{x})} \models \theta_r, \quad (1)$$

где $\theta_1, \dots, \theta_r$ — некоторые предложения;

(б) если $\varphi(\bar{x})$ является $\Sigma_n(\Pi_n)$ -формулой, то в качестве θ_i тоже можно выбрать $\Sigma_n(\Pi_n)$ -предложения;

(с) более того, если $\varphi(\bar{x})$ является $\exists$ -формулой, то каждое из предложений θ_i можно выбрать как имеющее вид

$$\theta_i \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_k [P_{y_1} = p_1, \dots, P_{y_k} = p_k], \quad (2)$$

где $p_1, \dots, p_k \in \{0, 1, 2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а), (б). Покажем индукцией по сложности формулы φ аналогично доказательству предложения 3 в [2]. Любой терм $t(\bar{x})$ равен в

T_{At} терму вида $\sum_{s \in S} t_s^*(\bar{x})$ для некоторого $S \subseteq \{1, \dots, r\}$, если сумма пустого множества равна 0.

Любая атомная формула имеет вид $At(t(\bar{x}))$ или $t'(\bar{x}) = t''(\bar{x})$, при этом последнее выражение эквивалентно тому, что $t(\bar{x}) = t'(\bar{x}) \triangle t''(\bar{x}) = (t'(\bar{x}) - t''(\bar{x})) + (t''(\bar{x}) - t'(\bar{x})) = 0$, и формулы приводятся к дизъюнкции конъюнкций формул вида $\widehat{t_s^*(\bar{x})} \models At(1)$ (т. е. $\widehat{t_s^*(\bar{x})} \models P_1 = 1$) или $\widehat{t_s^*(\bar{x})} \models 0 = 1$ (т. е. $\widehat{t_s^*(\bar{x})} \models P_1 = 0$). Замкнутость относительно $\&$ и $\vee$ очевидна, замкнутость относительно $\neg$ следует из того, что отрицание формулы $\widehat{t_i^*(\bar{x})} \models \theta$ равносильно $\widehat{t_i^*(\bar{x})} \models \neg\theta$, а $\neg[P_x = \delta] \Leftrightarrow [P_x = \gamma \vee P_x = \beta]$, где $\{\beta, \gamma, \delta\} = \{0, 1, 2\}$.

Получаем, что если $\varphi(x)$ — бескванторная формула, то в качестве θ_i могут быть взяты предложения $P_1 = \delta$, $\delta \in \{0, 1, 2\}$. Чтобы получить вид (1), перейдем от формул $\widehat{t_{s_1}^*(\bar{x})} \models P_1 = \delta$ к формулам

$$\widehat{t_{s_1}^*(\bar{x})} \models [P_1 = \delta] \& \widehat{t_{s_2}^*(\bar{x})} \models [P_1 = 0 \vee P_1 = 1 \vee P_1 = 2].$$

Рассмотрим случай, когда $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi(\bar{x}, y)$. Термы t^* , соответствующие набору $\bar{x}, y$, имеют вид $t_i^*(\bar{x}) \cdot y$ или $t_i^*(\bar{x}) - y$. По предположению индукции в качестве $\psi(\bar{x}, y)$ можно взять дизъюнкцию формул вида

$$\bigwedge_{i=1}^m [\widehat{t_i^*(\bar{x}) \cdot y} \models \theta'_i \& \widehat{t_i^*(\bar{x}) - y} \models \theta''_i],$$

и тогда $\exists y \psi(\bar{x}, y)$ эквивалентно $\bigwedge_{i=1}^m \widehat{t_i^*(\bar{x})} \models \theta_i$, где θ_i равно $\exists z [\widehat{z} \models \theta'_i \& \neg z \models \theta''_i]$.

Случай с квантором $\forall y$ рассматривается путем перехода от $\varphi(\bar{x})$ к $\neg\varphi(\bar{x})$.

(с) Если $\varphi(\bar{x})$ — $\exists$ -формула, то она сводится к дизъюнкции формул вида (1), где θ_i — предложения вида $\exists z_1 \dots \exists z_u \psi(\bar{z})$, а $\psi(\bar{z})$ — бескванторная формула. Заметим, что формула $\widehat{t_{s_1}^*(\bar{x})} \models P_1 = \delta$ равносильна $P_{t_{s_1}^*(\bar{x})} = \delta$, а значит, бескванторная формула $\psi(\bar{z})$ сводится к дизъюнкции формул вида $\bigwedge_{i=1}^{2^u} (P_{t_i^*(\bar{z})} = p_i)$, где $p_i \in \{0, 1, 2\}$. Следовательно, каждое θ_i сводится к дизъюнкции предложений вида $\exists \bar{z} \bigwedge_{i=1}^{2^u} (P_{t_i^*(\bar{z})} = p_i)$. Теперь достаточно в качестве $y_1, \dots, y_k$ взять $t_1^*(\bar{z}), \dots, t_{2^u}^*(\bar{z})$. Предложение доказано.

Будем говорить, что *размер* булевой алгебры $\mathcal{A}$ равен k , если $|\mathcal{A}| = 2^k$, и ω , если $|\mathcal{A}| = \omega$. Будем называть *размером элемента* x размер булевой алгебры $\hat{x}$ и писать $|x| = k$ ($|x| = \omega$). В соответствии с предложением 1(с) можно выделить следующие виды $\exists$ -формулы теории T_{At} :

$$\alpha^1(0) \Leftrightarrow \exists y_1 [1 | P_{y_1} = 0] - \text{«}0 = 1\text{»};$$

$$\alpha^1(k) \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_k [1 | P_{y_1} = 1, \dots, P_{y_k} = 1], k \geq 1 - \text{«размер 1 равен } k\text{»};$$

$$\alpha^2(k) \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_k [1 | P_{y_1} = 2, \dots, P_{y_k} = 2], k \geq 1 - \text{«размер 1 не меньше } 2k\text{»};$$

$$\alpha^3(k_1, k_2) \Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_{k_2} [1 | P_{y_1} = 1, \dots, P_{y_{k_1}} = 1, P_{y_{k_1+1}} = 2, \dots, P_{y_{k_2}} = 2], 1 \leq k_1 < k_2 - \text{«размер 1 не меньше } (2k_2 - k_1) \text{ и под 1 не меньше } k_1 \text{ атомов»}.$$

Бескванторные предложения теории T_{At} эквивалентны указанным выше: $\hat{1} \models At(1) \Leftrightarrow \alpha^1(1)$, $\hat{1} \models 0 = 1 \Leftrightarrow \alpha^1(0)$.

Известно, что вместо произвольного отношения R_0 в классе булевых алгебр можно рассматривать отношение $R(x_1, \dots, x_l)$ такое, что $x_1, \dots, x_l | 1$. Назовем

отношения такого вида *дизъюнктивными*. Набор $\bar{x}$ со свойством $x_1, \dots, x_l | 1$ также будем называть *дизъюнктивным*. Под $\bar{R}$ в этом случае будем понимать снова дизъюнктивное отношение $\{\bar{x} \in \mathcal{A}^l : x_1, \dots, x_l | 1 \& \bar{x} \notin R\}$. Заметим, что дизъюнктивность отношения задается бескванторной формулой

$$\text{Disjoint}(\bar{x}) \Leftrightarrow \left[x_1 + \dots + x_l = 1 \& \bigwedge_{i,j \in [1,l], i \neq j} x_i \cdot x_j = 0 \right].$$

Множество всех дизъюнктивных наборов из l элементов структуры $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A}^*$ — булева алгебра, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$. Если отношение $R \subseteq \mathcal{A}^l$ определимо в $\mathcal{A}$ вычислимой счетной дизъюнкцией $\exists$ -формулы с конечным набором параметров, то можно считать, что этот набор параметров является дизъюнктивным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отношение $R \subseteq \mathcal{A}^l$ определимо в $\mathcal{A}$ вычислимой счетной дизъюнкцией $\exists$ -формулы $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ с конечным набором параметров $c_1, \dots, c_n$. Перейдем к термам вида $c_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot c_n^{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, $c_m^1 = c_m$ и $c_m^0 = -c_m$, обозначим полученный набор через $b_1, \dots, b_k$. Каждый параметр из $c_1, \dots, c_n$ выражается через объединение некоторых из $b_1, \dots, b_k$, и при этой замене в вычислимой счетной дизъюнкции $\exists$ -формулы $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ получится снова некоторая вычислимая счетная дизъюнкция $\exists$ -формулы $\bigvee_{i \in I} \varphi'_i(\bar{x}, \bar{b})$. Замечание доказано.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{A}^*$ — булева алгебра, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$. Дизъюнктивное отношение $R \subseteq \mathcal{A}^l$ является относительно наследственно вычислимо перечислимым тогда и только тогда, когда оно определимо в $\mathcal{A}$ конъюнкцией формулы $\text{Disjoint}(\bar{x})$ и вычислимой счетной дизъюнкции $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ с конечным набором параметров $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ таких, что $c_1, \dots, c_n | 1$ в $\mathcal{A}$, и каждая формула $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ имеет вид

$$\bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \theta_{mp}^i,$$

где каждое θ_{mp}^i — это предложение видов α^1 , α^2 или α^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [3, 4] независимо доказан факт о том, что отношение R является относительно наследственно в.п. в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оно определимо в $\mathcal{A}$ вычислимой счетной дизъюнкцией $\exists$ -формулы с конечным набором параметров. Пусть R определимо формулой $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$, где $\bar{c}$ — некоторый конечный набор констант, а каждая $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ — $\exists$ -формула и по предположению 1(а) имеет вид (1), т. е. $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c}) \Leftrightarrow \bigwedge_s (t_s^*(\bar{x}, \bar{c}) \models \theta_s)$. Можно считать, что $\bar{c} = c_1, \dots, c_n | 1$ в $\mathcal{A}$ по замечанию 1.

Отношение R дизъюнктивное, т. е. $x_1, \dots, x_l | 1$, кроме того, $c_1, \dots, c_n | 1$, а значит, каждый терм $t_s^*(\bar{x}, \bar{c})$ имеет вид $c_m \cdot x_p$. Следовательно,

$$\varphi_i(\bar{x}, \bar{c}) \Leftrightarrow \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \theta_{mp}^i,$$

где по предположению 1(с) каждая θ_{mp}^i вида (2), а значит, это α^1 , α^2 или α^3 . Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}^*$ — булева алгебра, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$. Если дизъюнктивное отношение $R \subseteq \mathcal{A}^l$ является относительно наследственно вычислимым, то оно определимо в $\mathcal{A}$ конъюнкцией формулы $\text{Disjoint}(\bar{x})$ и вычислимой счетной дизъюнкции $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ с конечным набором параметров $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ таких,

что $c_1, \dots, c_n \mid 1$ в $\mathcal{A}$, и каждая формула $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ имеет вид $\bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \theta_{mp}^i$, где каждое θ_{mp}^i — это предложение видов α^1 или α^2 (т. е. определимо, как в предложении 2, но без α^3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R — относительно наследственно вычислимое отношение в $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$, значит, R и $\bar{R}$ — относительно наследственно в.п. (так как множество всех дизъюнктивных наборов $x_1, \dots, x_l \mid 1$ вычислимо), следовательно, определимы, как в предложении 2, формулами $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ и $\bigvee_{j \in J} \psi_j(\bar{x}, \bar{c})$ соответственно, где

$$\varphi_i(\bar{x}, \bar{c}) \Leftrightarrow \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \theta_{mp}^i, \quad \psi_j(\bar{x}, \bar{c}) \Leftrightarrow \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \gamma_{mp}^j$$

(в качестве набора параметров берем объединение наборов параметров для R и $\bar{R}$ и по замечанию 1 считаем полученный набор дизъюнктивным). Если среди параметров есть c_m , который можно разложить в сумму ненулевых атомного и безатомного элементов, то разделим его таким образом. Далее считаем, что среди $c_1, \dots, c_n$ нет разложимых в сумму ненулевых атомного и безатомного элементов.

Рассмотрим вычислимую дизъюнкцию $\bigvee_{i \in I'} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$, полученную из $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ удалением всех дизъюнктов $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$, содержащих α^3 . Если $\bigvee_{i \in I'} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ тоже задает отношение R , то это и есть необходимое описание. Если нет, то существуют $\bar{u} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$ и $i_1 \in I$ такие, что в формуле

$$\varphi_{i_1}(\bar{x}, \bar{c}) \Leftrightarrow \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \theta_{mp}^{i_1}$$

предложение $\theta_{11}^{i_1}$ (для определенности) — это формула $\alpha^3(k_1, k_2)$, и $\varphi_{i_1}(\bar{u}, \bar{c})$.

Рассмотрим следующие частные случаи.

СЛУЧАЙ 1: c_1 атомный. Тогда $\widehat{c_1 \cdot x_1} \models \alpha^3(k_1, k_2) \Leftrightarrow$ «размер $c_1 \cdot x_1$ не меньше $2k_2 - k_1$ » $\Leftrightarrow \widehat{c_1 \cdot x_1} \models (\alpha^2 \left[\frac{2k_2 - k_1 + 1}{2} \right] \vee \alpha^1(2k_2 - k_1))$.

СЛУЧАЙ 2: c_1 безатомный. Тогда $\widehat{c_1 \cdot x_1} \models \alpha^3(k_1, k_2)$ тождественно ложна, поэтому можно заменить на $\widehat{c_1 \cdot x_1} \models \alpha^1(2k_2 - k_1)$.

СЛУЧАЙ 3: c_1 не разложим в сумму атомного и безатомного элементов, в частности, под c_1 есть бесконечное число атомов и ненулевой безатомный элемент. Рассмотрим элементы $\bar{v} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$, удовлетворяющие одновременно двум свойствам:

(1) $\widehat{c_m \cdot v_p} \models \theta_{mp}^{i_1}$ для всех пар $(m, p) \neq (1, 1)$,

(2) $c_1 \cdot v_1$ — сумма ненулевого безатомного элемента и t атомов для некоторого $t < k_1$.

Если все элементы $\bar{v} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$ со свойствами (1) и (2) лежат в R , то в $\alpha^3(k_1, k_2)$ условие «не меньше k_1 атомов» можно опустить и заменить $\alpha^3(k_1, k_2)$,

как в случае 1. Пусть существуют $t \leq k_1$ и $\bar{v} \in \bar{R}$ со свойствами (1) и (2). Тогда $\exists j_1 \in J : \psi_{j_1}(\bar{v}, \bar{c})$. Под c_1 расположено бесконечное число атомов, а под $c_1 \cdot v_1$ — конечное число, значит, для некоторого $p \in [2, l]$ под $c_1 \cdot v_p$ будет бесконечное число атомов, пусть для определенности под $c_1 \cdot v_2$. Следовательно, $\theta_{12}^{i_1}$ и $\gamma_{12}^{i_1}$ — это α^2 или α^3 .

Рассмотрим $\bar{w} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$ такой, что $c_1 \cdot w_1$ — сумма $c_1 \cdot v_1$ и минимального количества атомов, лежащих под $c_1 \cdot v_2$, чтобы удовлетворить $\theta_{11}^{i_1} = \alpha^3(k_1, k_2)$ и $\gamma_{11}^{j_1}$ ($\gamma_{11}^{j_1}$ — это α^2 или α^3 , так как под $c_1 \cdot v_1$ есть ненулевой безатомный элемент); $c_1 \cdot w_2 = c_1 \cdot (v_2 - w_1)$, а для остальных пар $(m, p) \notin \{(1, 1), (1, 2)\}$ положим $c_m \cdot w_p = c_m \cdot v_p$. Заметим, что набор атомов под $c_1 \cdot w_2$ отличается от такового под $c_1 \cdot v_2$ конечным числом атомов, а под $c_1 \cdot v_2$ бесконечное число атомов, получаем, что у $c_1 \cdot w_2$ и $c_1 \cdot v_2$ один и тот же тип изоморфизма, значит, $c_1 \cdot w_2$ удовлетворяет и $\theta_{12}^{i_1}$, и $\gamma_{12}^{i_1}$. Для всех остальных пар (m, p) очевидно, что $c_m \cdot w_p$ удовлетворяет и $\theta_{mp}^{i_1}$, и $\gamma_{mp}^{i_1}$. Получаем, что $\varphi_{i_1}(\bar{w}, \bar{c})$ и $\psi_{j_1}(\bar{w}, \bar{c})$, $\bar{w} \in R$ и $\bar{w} \in \bar{R}$; противоречие. Значит, для любого $t < k_1$ и для любого $\bar{v} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$ со свойствами (1) и (2) $\bar{v}$ лежит в R и, следовательно, может быть заменено, как в случае 1.

Таким образом, в рассматриваемой дизъюнкции $\bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ для каждого атомного и неразложимого параметра c_m и для всех $p \in [1, l]$ заменим $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^3(k_1, k_2)$, как указано в случае 1, а также для всех безатомных c_m и для всех $p \in [1, l]$ заменим $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^3(k_1, k_2)$, как указано в случае 2. Очевидно, что полученная дизъюнкция будет вычислима и будет задавать то же отношение R . Теорема 1 доказана.

§ 2. Описание относительно наследственно вычислимых отношений на $(\mathcal{A}^*, \text{At})$

Возникает вопрос: является ли определение формулой вида, указанного в теореме 1, критерием для относительно наследственной вычислимости отношения на $(\mathcal{A}^*, \text{At})$? Оказывается, что в общем случае нет, и для формулировки критерия далее введем некое понятие Δ_1^* -определимости отношения относительно набора параметров.

Пусть $\text{Fin}_k(\mathcal{B}) = \{x \in \mathcal{B} : |\hat{x}| = 2^k\}$ — множество элементов размера k (отношение, определяемое предложением α^1) и $\text{G}_k(\mathcal{B}) = \{x \in \mathcal{B} : |\hat{x}| \geq 2^k\}$ (в случае четного $k \geq 2$ определяется предложением α^2 , иначе — конъюнкцией α^2 и одного или двух α^1). Пусть дан набор $\bar{c} = c_1, \dots, c_n | 1$. Назовем l -местное отношение Q базисным относительно $\bar{c}$, если оно дизъюнктивное и

$$Q(x_1, \dots, x_l) = \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l A_p^m(\widehat{c_m \cdot x_p}),$$

где каждый $A_p^m(\mathcal{B})$ — одноместный предикат, выделяющий множество вида $\text{Fin}_k(\mathcal{B})$ или $\text{G}_k(\mathcal{B})$. Иными словами, базисное отношение — определимое конечной дизъюнкцией формул $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ из теоремы 1 и формулой $\text{Disjoint}(\bar{x})$. Зафиксируем нумерацию формул вида $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ из теоремы 1, затем зафиксируем нумерацию всех конечных дизъюнкций таких формул (подобно стандартной нумерации всех конечных множеств D_u) и далее будем считать, что базисные относительно $\bar{c}$ отношения имеют указанную нумерацию.

Набор параметров $c_1, \dots, c_m$ назовем *простым*, если для любого $m \in [1, n]$ ($\hat{c}_m \cong \mathcal{B}(\omega)^k \Rightarrow k = 1$), где $\mathcal{B}(\omega)^k$ — булева алгебра, построенная по линейному

порядку $\omega + \dots + \omega$ (k раз). Заметим, что из любого набора легко сделать простой, заменив c_m такой, что $\hat{c}_m \cong \mathcal{B}(\omega)^k$ для некоторого $k > 1$, на $a_1, \dots, a_k|_{c_m}$ такой, что $\hat{a}_i \cong \mathcal{B}(\omega)$.

Для простого набора параметров $c_1, \dots, c_n|1$ в $\mathcal{A}$ и $l \in \omega$ (местности рассматриваемого отношения) определим набор чисел $(q_1, \dots, q_n)$: для каждого $m \in [1, n]$ число q_m («максимальное гарантированное число элементов конечного размера среди $c_m \cdot x_1, \dots, c_m \cdot x_l$ ») равно

$$q_m = \begin{cases} l, & \text{если } |\hat{c}_m| < \omega; \\ l-1, & \text{если } \hat{c}_m \cong \mathcal{B}(\omega); \\ 0, & \text{если существуют } b_1, \dots, b_l|_{c_m} : |\hat{b}_p| = \omega. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A}^*$ — булева алгебра, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$, R — l -местное дизъюнктивное отношение на $\mathcal{A}$, $c_1, \dots, c_n|1$ — параметры из $\mathcal{A}$ и $q_m \in \{0, l\}$ для всех $m \in [1, n]$. Тогда R будем называть Δ_1^* -определимым относительно $\bar{c}$, если оно является конечным объединением базисных отношений относительно $\bar{c}$ отношений.

Для фиксированных l и n будем писать $\bar{x} = (x_1, \dots, x_l)$, $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$. Определим множество «частичных размеров» S , элементы которого суть матрицы

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1l} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nl} \end{pmatrix} \in (\omega \cup \{*\})^{nl}$$

такие, что для любого $m \in [1, n]$ ровно q_m штук s_{mp} принадлежат ω , и если $|\hat{c}_m| < \omega$, то $\sum_{p=1}^l s_{mp} = |\hat{c}_m|$. Если $\bar{s} \in S$, то запись $|\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}$ означает, что

$$\forall m \in [1, n] \forall p \in [1, l] \quad (s_{mp} \neq *) \Rightarrow |\widehat{c_m \cdot x_p}| = 2^{s_{mp}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{A}^*$ — булева алгебра, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$, R — l -местное дизъюнктивное отношение на $\mathcal{A}$, $c_1, \dots, c_n|1$ — параметры из $\mathcal{A}$. Тогда R будем называть Δ_1^* -определимым относительно $\bar{c}$, если существует вычислимая функция $f(\bar{s}) : S \rightarrow \omega$ такая, что $R = \bigcup_{\bar{s} \in S} R_{\bar{s}}$, где

$$R_{\bar{s}} = \{\bar{x} \in \mathcal{A}^l : |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s} \& \Phi_{f(\bar{s})}(\bar{x}, \bar{c})\},$$

а $\Phi_{f(\bar{s})}(\bar{x}, \bar{c})$ — конечная дизъюнкция с номером $f(\bar{s})$ базисных отношений с параметрами $c_1, \dots, c_n$.

Лемма 1. 1. Отрицание формулы вида α^1 или α^2 — конечная дизъюнкция формул видов α^1, α^2 .

2. Конъюнкция формул вида α^1 и α^2 либо тождественно ложная формула, либо снова формула вида α^1 или α^2 .

3. Тождественно истинная формула представляется дизъюнкцией формул α^1 и α^2 : $\alpha^1(0) \vee \alpha^1(1) \vee \alpha^2(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Имеем

$$\neg \alpha^1(0) \Leftrightarrow \exists y_1 [P_{y_1} = 1] \vee \exists y_1 [P_{y_1} = 2] \Leftrightarrow \alpha^1(1) \vee \alpha^2(1).$$

Если $k > 0$, то

$$\neg \alpha^1(k) \Leftrightarrow \left[\bigvee_{i < k} \alpha^1(i) \right] \vee \alpha^1(k+1) \vee \alpha^2([(k+2)/2]) \quad \neg \alpha^2(k) \Leftrightarrow \bigvee_{i < 2k} \alpha^1(i).$$

2. Имеем $\alpha^1(k_1) \& \alpha^1(k_2) = \alpha^1(k_1)$, если $k_1 = k_2$, иначе это тождественно ложная формула. Далее, $\alpha^1(k_1) \& \alpha^2(k_2) = \alpha^1(k_1)$, если $k_1 \geq 2k_2$, иначе является тождественно ложной формулой. Наконец, $\alpha^2(k_1) \& \alpha^2(k_2) = \alpha^2(\max\{k_1, k_2\})$.

3. Очевидно.

Лемма 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}^*$ — булева алгебра, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*, \text{At})$, R — l -местное дизъюнктивное отношение на $\mathcal{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) R относительно наследственно вычислимо;

(б) существует простой набор параметров $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) \upharpoonright 1$ такой, что R Δ_1^* -определимо относительно $\bar{c}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (б) $\Rightarrow$ (а). Пусть существует простой набор параметров $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) \upharpoonright 1$ такой, что R Δ_1^* -определимо относительно $\bar{c}$. Существует вычислимая функция $f(\bar{s}) : S \rightarrow \omega$ такая, что $R = \bigcup_{\bar{s} \in S} R_{\bar{s}}$, где $R_{\bar{s}} = \{\bar{x} \in \mathcal{A}^l : |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s} \& \Phi_{f(\bar{s})}(\bar{x}, \bar{c})\}$, а $\Phi_{f(\bar{s})}(\bar{x}, \bar{c})$ — конечная дизъюнкция базисных отношений с номером $f(\bar{s})$ и параметрами $c_1, \dots, c_n$. Зафиксируем вычислимую однозначную нумерацию множества S , пусть I — множество кодов S , а $\bar{s}(i)$ — набор из S с номером i . Тогда отношение R задается формулой

$$\bigvee_{i \in I} [\Phi_{f(\bar{s}(i))}(\bar{x}, \bar{c}) \& |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}(i)],$$

где

$$|\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}(i) \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{m \in [1, n], \\ p \in [1, l] : s_{mp} \neq *}} \widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^1(s_{mp})$$

алгоритмично строится по $\bar{s}(i)$. Значит, R задается вычислимой счетной дизъюнкцией $\exists$ -формул и формулой $\text{Disjoint}(\bar{x})$.

Рассмотрим отношение $\bar{R}$, задаваемое формулой

$$\neg \left(\bigvee_{i \in I} [\Phi_{f(\bar{s}(i))}(\bar{x}, \bar{c}) \& |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}(i)] \right) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} [\neg \Phi_{f(\bar{s}(i))}(\bar{x}, \bar{c}) \vee \neg |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}(i)].$$

Пусть $x \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$, для некоторого $j \in I$ имеем $|\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}(j)$, а для всех $i \neq j$ выполняется $|\bar{x} \cdot \bar{c}| \neq \bar{s}(i)$ (так как для каждого $\bar{x}$ и $\bar{c}$ существует единственный $\bar{s}$ такой, что $|\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}$), поэтому для всех $i \neq j$ выполняется

$$\neg \Phi_{f(\bar{s}(i))}(\bar{x}, \bar{c}) \vee \neg |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}(i).$$

Значит,

$$\bar{x} \in \bar{R} \Leftrightarrow \bigvee_{j \in I} [\neg \Phi_{f(\bar{s}(j))}(\bar{x}, \bar{c}) \& |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}(j)].$$

Учитывая лемму 1, легко понять, что $\neg \Phi_{f(\bar{s}(j))}(\bar{x}, \bar{c})$ тоже является $\exists$ -формулой и имеет вычислимый номер. Значит, $\bar{R}$ тоже задается вычислимой счетной дизъюнкцией $\exists$ -формул и формулой $\text{Disjoint}(\bar{x})$, а R является относительно наследственно вычислимым.

(а) $\Rightarrow$ (б). Пусть R относительно наследственно вычислимо. Тогда R и $\bar{R}$ могут быть описаны формулами, как в теореме 1, т. е. формулой $\text{Disjoint}(\bar{x})$, вычислимыми счетными дизъюнкциями $\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ для R и $\psi = \bigvee_{i \in I} \psi_i(\bar{x}, \bar{c})$ для $\bar{R}$, где

$$\varphi_i(\bar{x}, \bar{c}) = \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \theta_{mp}^i,$$

аналогично

$$\psi_i(\bar{x}, \bar{c}) = \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \gamma_{mp}^i,$$

где каждое θ_{mp}^i и γ_{mp}^i — это предложение видов α^1 или α^2 , а $\bar{c}$ — простой дизъюнктивный набор. Считаем, что набор параметров для φ и ψ один и тот же (для этого берем объединение наборов параметров для φ и ψ и по замечанию 1 считаем полученный набор дизъюнктивным), набор простой и, кроме того, среди параметров нет разложимых в сумму ненулевых атомного и безатомного элементов (если есть, то раскладываем их на два параметра).

Заметим, что если даны $h_{mp} \in \omega \cup \{\omega\}$, $m \in [1, n]$, $p \in [1, l]$, то алгоритм проверки, существует ли в $\text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$ набор $\bar{y}$ такой, что $|c_m \cdot y_p| = h_{mp}$, будет следующий:

1) если $|c_m| = k$, то $\sum_{p=1}^l h_{mp} = k$;

2) если $c_m \cong \mathcal{B}(\omega)$, то ровно один среди $h_{m1}, \dots, h_{mp}$ равен ω , а остальные являются любыми натуральными числами;

3) если c_m ненулевой безатомный, то хотя бы один из $h_{m1}, \dots, h_{mp}$ равен ω , а остальные — либо 0, либо ω ;

4) если c_m неразложим в сумму атомного и безатомного или атомный такой, что $|\hat{c}_m/F| = \omega$, то хотя бы один из $h_{m1}, \dots, h_{mp}$ равен ω , а остальные любые (в том числе ω).

Покажем, что существует вычислимая функция, как в определении 2, $f(\bar{s}) : S \rightarrow \omega$ такая, что $R = \bigcup_{\bar{s} \in S} R_{\bar{s}}$, где

$$R_{\bar{s}} = \{\bar{x} \in \mathcal{A}^l : |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s} \& \Phi_{f(\bar{s})}(\bar{x}, \bar{c})\},$$

а $\Phi_{f(\bar{s})}(\bar{x}, \bar{c})$ — конечная дизъюнкция базисных отношений с номером $f(\bar{s})$ и параметрами $c_1, \dots, c_n$. Пусть дан произвольный $\bar{s} \in S$, покажем, как по нему построить подходящую конечную дизъюнкцию базисных отношений $\Phi_{f(\bar{s})}(\bar{x}, \bar{c})$ так, чтобы номер этой дизъюнкции $f(\bar{s})$ оказался вычислимым. Будем строить по шагам конечные дизъюнкции φ'_s и ψ'_s , добавляя на каждом шаге конечное число дизъюнктов вида, как в теореме 1.

АЛГОРИТМ. Пусть изначально φ'_s и ψ'_s пустые.

ШАГ 1. Легко показать, используя определение множества S и алгоритм проверки, указанный выше, что существует дизъюнктивный набор элементов $\bar{y}$ такой, что $|\bar{y} \cdot \bar{c}| = \bar{s}$ и

$$\forall m \in [1, n] \forall p \in [1, l] \quad (s_{mp} = *) \Rightarrow |\widehat{c_m \cdot y_p}| = \omega.$$

Такой y лежит в R или в $\bar{R}$, соответственно в φ или ψ должен быть дизъюнкт $\xi(\bar{x}, \bar{c})$ такой, что $\xi(\bar{y}, \bar{c})$, т. е.

$$\xi(\bar{x}, \bar{c}) = \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^{r'_{mp}}(k'_{mp}),$$

где r'_{mp} и k'_{mp} такие, что

1) если $|\widehat{c_m \cdot y_p}| = 2^{s_{mp}}$, то 1.1) $r'_{mp} = 1$, $k'_{mp} = s_{mp}$ либо 1.2) $r'_{mp} = 2$, $k'_{mp} \leq \lceil \frac{s_{mp}}{2} \rceil$;

2) если $|\widehat{c_m \cdot y_p}| = \omega$, то $r'_{mp} = 2$, $k'_{mp} \in \omega$.

Заметим, что дизъюнкт ξ не зависит от выбора $\bar{y}$, а только от $\bar{s}$; $\bar{y}$ нужен только, чтобы понять, что такой дизъюнкт ξ обязательно есть в φ или ψ . Получаем, что в случае 1.1 есть один возможный вариант параметров r'_{mp} и k'_{mp} , в случае 1.2 — конечное число вариантов, в случае 2 — счетное число вариантов. Таким образом, перебирая все возможные варианты наборов параметров и для каждого варианта проверяя, лежит ли соответствующий дизъюнкт в вычислимых дизъюнкциях φ и ψ , за конечное число шагов найдем дизъюнкт ξ , который является частью φ или ψ , и соответственно $y \in R$ или $y \in \bar{R}$.

Рассмотрим найденный ξ и для каждой пары (m, p) , для которой выполняется 1.2, заменим подформулу $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha_2(k'_{mp})$ на $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha_1(s_{mp})$. После всех таких замен в ξ получим дизъюнкт ξ' . Добавляем дизъюнкт ξ' в φ' , если ξ было дизъюнктом в φ , и в ψ' , если ξ было дизъюнктом в ψ . Шаг 1 завершен.

Пусть t шагов построения формул φ' и ψ' завершено. На шаге t в формулы φ' и ψ' было добавлено конечное число дизъюнктов.

Шаг $t + 1$. На шаге $t + 1$ поочередно рассмотрим каждый добавленный на шаге t дизъюнкт. Пусть на шаге t был добавлен дизъюнкт

$$\bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^{r_{mp}}(k_{mp}).$$

Рассмотрим каждую пару (m', p') такую, что $r_{m'p'} = 2$, и каждый $k < 2k_{m'p'}$, для которого существует набор $\bar{y} = (y_1, \dots, y_l) \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$ со свойствами для любых $m \leq n$, $p \leq l$:

$$|c_m \cdot y_p| = \begin{cases} k_{mp}, & \text{если } r_{mp} = 1 \text{ (и положим } s'_{mp} = k_{mp}); \\ k, & \text{если } (m, p) = (m', p') \text{ (и положим } s'_{mp} = k); \\ \omega & \text{иначе (и положим } s'_{mp} = *). \end{cases}$$

Существует ли такой $\bar{y}$, определяем по алгоритму проверки, указанному выше. Для полученного $\bar{y}$ и набора $\bar{s}'$ вместо $\bar{s}$ повторим полностью построения, приведенные на шаге 1. После рассмотрения всех дизъюнктов, добавленных на шаге t , и всех описанных выше пар (m', p') и k шаг $t + 1$ завершен.

Покажем, что алгоритм заканчивает работу через $\left(n \cdot l - \sum_{m=1}^n q_m - n_1\right)$ шагов, где n_1 — количество параметров c_m среди $c_1, \dots, c_n$, имеющих бесконечный размер. Действительно, на шаге 1 добавляем в φ' или ψ' дизъюнкт ξ' , содержащий ровно $\left(n \cdot l - \sum_{m=1}^n q_m\right)$ подформул вида α^2 (соответствует количеству $*$ в записи $\bar{s}$). На шаге $t + 1$ добавляем дизъюнкты, в которых количество подформул вида α^2 на единицу меньше, чем в дизъюнктах, добавленных на шаге t . Наконец, n_1 — это минимальное возможное количество элементов бесконечного размера среди $c_m \cdot x_p$ для $m \in [1, n]$, $p \in [1, l]$, поэтому n_1 — минимальное количество подформул вида α^2 в дизъюнкте, который выполняется на некотором $\bar{y} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$.

Если после завершения алгоритма оказалось, что φ'_s пусто, то положим

$$\varphi'_s = \bigwedge_{m=1}^n \bigwedge_{p=1}^l \widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha_1(k_m),$$

где $k_m = 1$, если $|\hat{c}_m| = \omega$, и $k_m = k + 1$, если $|\hat{c}_m| = 2^k$, чтобы формула φ'_s была тождественно ложной. Аналогично если оказалось, что ψ'_s пусто. На этом построение φ'_s и ψ'_s завершено.

Пусть $Q_{\bar{s}}$ — отношение, задаваемое формулой $\text{Disjoint}(\bar{x}) \& \varphi'(\bar{x}, \bar{c})$, а Q'_s — отношение, задаваемое формулой $\text{Disjoint}(\bar{x}) \& \psi'(\bar{x}, \bar{c})$. Докажем, что

- (1) $Q_{\bar{s}} \subseteq R$, $Q'_s \subseteq \bar{R}$;
- (2) $Q_{\bar{s}} \cup Q'_s = \{\bar{x} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l) : |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}\}$.

Сначала покажем (1). На каждом шаге алгоритма выбран некоторый дизъюнкт ξ из дизъюнкции φ (или ψ), в нем выполнено некоторое количество замен вида $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha_2(k'_{mp})$ на $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha_1(s_{mp})$ и полученный дизъюнкт ξ' добавлен в φ' (или соответственно ψ'). Заметим, что указанные замены совершаются в случае 1.2, т. е. когда $k'_{mp} \leq \lfloor \frac{s_{mp}}{2} \rfloor$, а значит, ξ' задает некое подмножество множества, которое задает ξ . Следовательно, $Q_{\bar{s}} \subseteq R$, $Q'_s \subseteq \bar{R}$.

Покажем (2). $Q_{\bar{s}} \cup Q'_s \subseteq \{\bar{x} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l) : |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}\}$. На шаге 1 добавили дизъюнкт ξ' такой, что если $s_{mp} \in \omega$, то $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^1(s_{mp})$ — часть этого дизъюнкта. На последующих шагах эта часть дизъюнкта сохраняется во всех добавляемых дизъюнктах.

Проверим $\{\bar{x} \in \text{Disjoint}(\mathcal{A}^l) : |\bar{x} \cdot \bar{c}| = \bar{s}\} \subseteq Q_{\bar{s}} \cup Q'_s$. Пусть $\bar{z}$ — произвольный набор из $\text{Disjoint}(\mathcal{A}^l)$ такой, что $|\bar{z} \cdot \bar{c}| = \bar{s}$.

- На шаге 1 добавили в φ' (или ψ') дизъюнкт ξ_1 такой, что если $s_{mp} \in \omega$, то $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^1(s_{mp})$ — часть дизъюнкта ξ_1 , а если $s_{mp} = *$, то $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^2(k'_{mp})$ — часть дизъюнкта ξ_1 для некоторых $k'_{mp} \in \omega$. Набор $\bar{z}$ удовлетворяет всем $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^1(s_{mp})$, так как $|\bar{z} \cdot \bar{c}| = \bar{s}$. Если $\bar{z}$ при этом удовлетворяет всем $\widehat{c_m \cdot x_p} \models \alpha^2(k'_{mp})$, то $\bar{z}$ удовлетворяет дизъюнctu ξ_1 и соответственно сразу получаем, что $\bar{z} \in Q_{\bar{s}} \cup Q'_s$. Если $\bar{z}$ не удовлетворяет некоторому $\widehat{c'_m \cdot x'_p} \models \alpha^2(k'_{mp})$, т. е. $|\widehat{c'_m \cdot x'_p}| = k \leq 2^{k'_{m'p'}}$, то на шаге 2 будет добавлен дизъюнкт ξ_2 , построенный по ξ_1 и содержащий $\widehat{c'_m \cdot x'_p} \models \alpha^1(k)$.

- Заметим, что если на шаге t был добавлен некоторый дизъюнкт, имеющий подформулу $\widehat{c'_m \cdot x'_p} \models \alpha^1(s'_{mp})$, то все построенные по нему дизъюнкты на шаге $t + 1$ тоже имеют эту подформулу. Таким образом, на шаге $t + 1$ работы алгоритма будет добавлен дизъюнкт, который имеет ровно на одну подформулу вида $\widehat{c'_m \cdot x'_p} \models \alpha^1$ больше, и пусть она удовлетворяется на $\bar{z}$. Значит, если до шага t не было добавлено дизъюнкта, который полностью удовлетворяется на $\bar{z}$, то на шаге t будет добавлен дизъюнкт, содержащий ровно $\sum_{m=1} nq_m + t - 1$ различных подформул вида $\widehat{c'_m \cdot x'_p} \models \alpha^1$, все из которых удовлетворяются на $\bar{z}$.

- Получаем, что если дизъюнкт, который полностью удовлетворяется на $\bar{z}$, не был добавлен ранее в φ' (или ψ'), то на последнем шаге работы алгоритма будет добавлен дизъюнкт ξ_{fin} , содержащий максимально возможное количество подформул вида $\widehat{c'_m \cdot x'_p} \models \alpha^1$, все из которых удовлетворяются на $\bar{z}$, а для всех (m, p) таких, что $\widehat{c'_m \cdot x'_p} \models \alpha^2$ — подформула дизъюнкта ξ_{fin} , будет $|\widehat{c'_m \cdot x'_p}| = \omega$ (не более одного p для каждого m). Значит, ξ_{fin} будет полностью удовлетворяться на $\bar{z}$.

Из пп. (1), (2) получаем, что

$$\bar{R} = \bigcup_{\bar{s} \in S} Q'_{\bar{s}}, \quad \bar{R} = \bigcup_{\bar{s} \in S} Q_{\bar{s}}.$$

Очевидно, что φ' — конечная дизъюнкция и ее код подходит в качестве значения функции $f(s)$. Теорема 2 доказана.

Вопрос. Каково описание наследственно вычислимых отношений на булевых алгебрах с выделенным множеством атомов? Совпадает ли оно с описанием в теореме 2?

Благодарность. Автор благодарна д.ф.-м.н. П. Е. Алаеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров С. С., Доуни Р., Хиршвельд Д. Спектры степеней для отношений на булевых алгебрах // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 2. С. 182–193.
2. Алаев П. Е. Вычислимые идеалы в I-алгебрах // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 157–174.
3. Ash C., Knight J., Manasse M., Slamon T. Generic copies of countable structures // Ann. Pure Appl. Logic. 1989. V. 42, N 3. P. 195–205.
4. Chisholm J. Effective modal theory vs. recursive modal theory // J. Symb. Log. 1990. V. 55, N 3. P. 1168–1191.

Поступила в редакцию 2 марта 2020 г.

После доработки 6 апреля 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Леонтьева Маргарита Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
margarita.leontyeva@gmail.com