D. E. Pal'chunov, A. V. Trofimov, The theories of superatomic boolean algebras with distinguished subalgebra which lack countably saturated models, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 654–668

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.313>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.64.247

April 26, 2023, 04:34:43

УДК 512.563

ТЕОРИИ СУПЕРАТОМНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ВЫДЕЛЕННОЙ ПОДАЛГЕБРОЙ, НЕ ИМЕЮЩИЕ СЧЕТНО-НАСЫЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов

Аннотация. Исследуются булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Доказано существование континуума простых суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй (подалгебра совпадает с булевой алгеброй по модулю идеала Фреше), элементарные теории которых различны и каждая из которых не имеет счетно-насыщенной модели.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.313

Ключевые слова: булева алгебра, булева алгебра с выделенной подалгеброй, локальная алгебра, элементарная теория, конечно-аксиоматизируемая теория, разрешимая теория, элементарная эквивалентность.

Введение

Работа посвящена изучению теоретико-модельных свойств булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Одним из ключевых вопросов является наличие простых и счетно-насыщенных моделей у элементарных теорий. Простая модель — это счетная модель, в которой реализуются только главные типы [1] теории, счетно-насыщенная — счетная модель, в которой реализуются, наоборот, все типы, совместные с этой теорией. Другими словами, простая модель — это самая «маленькая» модель теории, счетно-насыщенная — самая «большая» модель из счетных моделей теории. Известно, что теория, имеющая счетно-насыщенную модель, имеет и простую модель.

Известно [2], что элементарная теория любой булевой алгебры имеет как простую, так и счетно-насыщенную модели. Если в сигнатуру булевых алгебр добавить одноместный предикат, выделяющий идеал, то ситуация с существованием насыщенных и простых моделей коренным образом меняется. В [3–9] исследовались булевы алгебры с выделенными идеалами, в частности, доказано, что существует континуум теорий булевых алгебр с одним выделенным идеалом, имеющих простую модель, но не имеющих счетно-насыщенной модели, существует континуум теорий, не имеющих простой модели, а также существует континуум элементарных теорий, имеющих счетно-насыщенную модель. Однако любая элементарная теория суператомной булевой алгебры с одним выделенным идеалом имеет простую и счетно-насыщенную модели [3, 4].

В настоящей работе доказано, что существует суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины, теория которой не имеет счетно-насыщенной модели. В этой алгебре подалгебра изоморфна самой булевой алгебре, более того, подалгебра совпадает с булевой алгеброй по модулю идеала Фреше.

1. Основные определения и предварительные результаты

Будем рассматривать булевы алгебры в сигнатуре $\sigma = \langle \cup, \cap, C, 0, 1 \rangle$. Пусть $\sigma^* = \langle \sigma, P \rangle$, где P — символ одноместного предиката, выделяющего подалгебру. Булеву алгебру с выделенной подалгеброй будем называть просто *алгеброй*. Через $P^{\mathfrak{A}} = \{a \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models P(a)\}$ обозначим основное множество выделенной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$.

Суператомную булеву алгебру с выделенной подалгеброй будем называть *суператомной алгеброй*. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная суператомная алгебра. Обозначим через $o(\mathfrak{A})$ наименьший ординал α такой, что единица алгебры принадлежит $(\alpha + 1)$ -му идеалу Фреше булевой алгебры, т. е. $1 \in F_{\alpha+1}(\mathfrak{A})$.

Пусть $\tau(\mathfrak{A}) = (o(\mathfrak{A}), n)$ — тип суператомности [2] алгебры $\mathfrak{A}$, где n — число атомов в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/F_\alpha$ при $\alpha = o(\mathfrak{A})$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра и $a \in P^{\mathfrak{A}}$ — элемент выделенной подалгебры. Определим алгебру, задаваемую элементом a :

$(a) = \langle \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\}, \cup, \cap, C^a, 0, a, P^{\mathfrak{A}} \cap \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\} \rangle$, где $C^a(b) = a \cap C(b)$.

Прямая сумма $\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ определяется стандартным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [10]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй ширины n* , если под любым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$ найдется не более n атомов алгебры $\mathfrak{A}$, лежащих под ним, и любой атом алгебры $\mathfrak{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [10]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *плотной*, если $\mathfrak{A} = \text{sub}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, F(\mathfrak{A}))$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая в себе подалгебру $\mathfrak{B}$ и идеал Фреше $F(\mathfrak{A})$.

Обозначим [10] через K_n класс суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [10]. Обозначим $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, если найдется $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *неисчезающей*, если из $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 [10]. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *локальной*, если число попарно элементарно не эквивалентных неисчезающих алгебраических систем $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$ конечно, т. е. существуют $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ такие, что для произвольной неисчезающей $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$ выполнено $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{B}_i$ для некоторого $i \leq n$.

Следуя [10], приведем построение счетной последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, языка σ^* с одной свободной переменной.

Пусть φ, ψ — формулы с одной свободной переменной языка σ^* , T — теория класса булевых алгебр с выделенной подалгеброй. Обозначим

$\varphi \leq \psi$, если $T \vdash (\psi(x) \rightarrow (\exists y \leq x) \varphi(y))$;

$\varphi \# \psi$, если $T \vdash (\psi(x) \rightarrow (\forall y \leq x) \neg \varphi(y))$.

Определим отношение линейного порядка на конечных подмножествах множества натуральных чисел без нуля. Пусть $A = \{a_1 > a_2 > \dots > a_l\}$, $B = \{b_1 > b_2 > \dots > b_m\} \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ — два произвольных конечных подмножества множества натуральных чисел без нуля. Положим, $A < B$, если $(a_1, a_2, \dots, a_l, 0, \dots, 0) < (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ в лексикографическом порядке, и $A \leq B$, если $A < B$ или $A = B$ (добавляем нули так, чтобы длины кортежей стали равными).

Обозначим $X = \{A \subset \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid 2 \leq \|A\| < \omega\}$. Занумеруем множество X в порядке возрастания. Пусть $\Omega : X \rightarrow \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение всех конечных неоднородных подмножеств множества натуральных чисел

без нуля на множество натуральных чисел такое, что $\Omega(A) < \Omega(B) \iff A < B$. Очевидно, что такое отображение можно определить так, чтобы оно было алгоритмически эффективным.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и соответственно класс K_n . Перейдем к построению последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ [10]. Построение будем вести по индукции.

БАЗИС ИНДУКЦИИ:

$$T_1(x) = ((x - \text{атом}) \& P(x));$$

$$T_l(x) = ((x - \text{объединение } l \text{ атомов}) \& P(x) \& (\forall y \leq x) \bigwedge_{i < l} \neg T_i(y)) \text{ для } 2 \leq l \leq n.$$

При помощи формулы

$$Q(x) = \exists y \exists z ((x = y \cup z) \& (y \cap z = 0) \& (\forall w \leq y)(w \neq 0 \rightarrow \neg P(w)) \& (\forall w \leq z)(w \neq 0 \rightarrow \neg P(w)))$$

для $2 \leq j \leq n$ определим

$$T_{n+j-1}(x) = P(x) \& \left(\neg Q(x) \& (\exists y \leq x) T_j(y) \& \left(\bigwedge_{i \neq j, i \leq n} (\forall y \leq x) \neg T_i(y) \right) \& (\forall y, z \leq x) ((y \cap z = 0 \rightarrow (Q(y) \vee Q(z))) \right) \right).$$

ШАГ ИНДУКЦИИ. Предположим, что формулы $T_1(x), \dots, T_m(x)$ построены. Пусть $R \in X$, $R \subset \{1, 2, \dots, m\}$, такое, что $T_i \# T_j$ для любых $i, j \in R$, $i \neq j$, и имеющее наименьший номер $l = \Omega(R)$, который еще не был использован при построении формул $T_1(x), \dots, T_m(x)$. Пусть $R = \{i_1, \dots, i_k\}$. Определим множество R^* и вспомогательные формулы $\pi_R(x)$, $T_R(x)$ следующим образом:

$$R^* = \{i \leq m \mid (T_i \# T_j) \text{ для всех } j \in R\};$$

$$\pi_R(x) = (\exists_{i \in R} x_i) \left(\bigwedge_{i \neq j} (x_i \cap x_j = 0) \& \left(\bigcup_{i \in R} x_i = x \right) \& \left(\bigwedge_{i \neq j} (\forall z \leq x_i) \neg T_j(z) \right) \right),$$

где $(\exists_{i \in R} x_i) \equiv \exists x_{i_1} \dots \exists x_{i_k}$;

$$T_R(x) = \left(\neg \pi_R(x) \& P(x) \& (\forall y \leq x) \left(\left(\bigvee_{i \in R} (\forall z \leq y) \neg T_i(z) \right) \rightarrow \pi_R(y) \right) \& \left((\forall y \leq x) \bigwedge_{i \in R^*} \neg T_i(y) \right) \& (\forall y \leq x) (\forall z \leq x) (y \cap z = 0 \rightarrow (\pi_R(y) \vee \pi_R(z))) \right).$$

Полагаем, $T_{m+1}(x) = T_R(x)$. Обозначим $R_{m+1} = R$ и $R_{m+1}^* = R^*$.

Для формул $T_k(x)$, $n < k \leq 2n - 1$, обозначим:

$$T_R(x) = T_k(x) \text{ для множества } R = \{k + 1 - n\}; \quad R^* = \{i \leq n \mid i \neq k + 1 - n\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$. $1^{\mathfrak{A}}$ является атомом подалгебры $P(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда найдется число $l \leq n$ такое, что $\mathfrak{A} \models T_l(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 1.1 найдется число $l \leq n$ такое, что $1^{\mathfrak{A}}$ — объединение l атомов. Так как $1^{\mathfrak{A}}$ является атомом подалгебры, $\neg T_1(1), \dots, T_{l-1}(1)$. Стало быть, $T_l(1)$.

Обратно, пусть $T_l(1)$. Предположим, что найдется $b < a$ такой, что b является атомом подалгебры $P(\mathfrak{A})$. Тогда $T_k(b)$ для некоторого $k \leq l$. С другой стороны, $(\forall y \leq x) \neg T_k(y)$ в силу определения формулы T_l . Полученное противоречие завершает доказательство замечания.

При помощи построенной последовательности формул для каждой алгебры $\mathfrak{A}$ и каждого элемента $a \in \mathfrak{A}$ определена характеристическая функция $w_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} w_a(0) &= 0, \text{ если } \mathfrak{A} \models P(a); \\ w_a(0) &= 1, \text{ если } \mathfrak{A} \models \neg P(a); \\ w_a(m) &= 0, \text{ если } \mathfrak{A} \models (\forall y \leq a) \neg T_m(y), m \geq 1; \\ w_a(m) &= \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\exists x_1, \dots, \exists x_k \leq a) ((\bigwedge_{i \neq j} x_i \cap x_j = 0) \\ &\quad \& (\bigwedge_{i \leq k} T_m(x_i)))\}, m \geq 1, \text{ иначе.} \end{aligned}$$

Положим $w_{\mathfrak{A}} = w_{1_{\mathfrak{A}}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 [10]. Формула $\varphi(x)$ с одной свободной переменной сигнатуры σ^* называется *неисчезающей*, если

$$T \vdash (((x = y \cup z) \& (y \cap z = 0) \& \varphi(x) \& P(y) \& P(z)) \rightarrow (\varphi(y) \vee \varphi(z))).$$

Предложение 1.7 [10]. Справедливы следующие утверждения:

- (а) для любого числа $k \geq 1$ формула $T_k(x)$ *неисчезающая*;
- (б) для любого числа $k \geq 1$ формула $T_k(1)$ *полная* в теории T , т. е. любые две модели теории T , на которых истинна формула $T_k(1)$, элементарно эквивалентны;
- (в) если $i < j$, то $T_j \# T_i$;
- (г) для любых i, j либо $T_i \leq T_j$, либо $T_i \# T_j$.

Теорема 1.8 [10]. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — локальные булевы алгебры с выделенными подалгебрами, принадлежащими классу K_n . Для того чтобы $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы $w_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{B}}$.

Рассмотрим обогащение сигнатуры $\sigma_1 = \sigma^* \cup \{c_1, \dots, c_k\}$ конечным числом константных символов. Через $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ обозначим булеву алгебру с выделенной подалгеброй в обогащенной константами сигнатуре, где $a_1, \dots, a_k$ — значения в модели $\mathfrak{A}$ константных символов $c_1, \dots, c_k$ соответственно.

Пусть $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ и $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ — булевы алгебры с выделенными подалгебрами в обогащенной константами сигнатуре σ_1 , $A_0 \subseteq \mathfrak{A}$ и $B_0 \subseteq \mathfrak{B}$. Отображение $f : A_0 \rightarrow B_0$ назовем *частичным изоморфизмом* из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если множество A_0 определяет подалгебру в алгебре $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$, множество B_0 — подалгебру в алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ (в частности $a_1, \dots, a_k \in A_0$ и $b_1, \dots, b_k \in B_0$) и отображение f является изоморфизмом соответствующих подалгебр, т. е. для любых $a, b \in A_0$ выполнено

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b); \quad f(a \cap b) = f(a) \cap f(b); \quad f(C(a)) = C(f(a));$$

$$P(a) \iff P(f(a)); \quad f(0) = 0; \quad f(1) = 1; \quad f(a_1) = b_1, \dots, f(a_k) = b_k.$$

Обозначим $\text{dom } f = A_0$, $\text{im } f = B_0$.

Отображение $f : A_0 \rightarrow B_0$ назовем *конечным частичным изоморфизмом*, если это отображение является частичным изоморфизмом и его область определения $\text{dom } f = A_0$ конечна.

Говорят, что алгебра $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ *m-эквивалентна* алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, и используют обозначение $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если существуют непустые множества $F_0, \dots, F_m$ конечных частичных изоморфизмов из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, удовлетворяющие следующему условию: для любых $l < m$, $f \in F_l$, $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$ найдутся $g_1, g_2 \in F_{l+1}$ такие, что $g_1, g_2 \supset f$, $a \in \text{dom } g_1$ и $b \in \text{im } g_2$.

Будем обозначать $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ для алгебр без выделенных констант, т. е. если $\sigma_1 = \sigma^*$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная булева алгебра с выделенной подалгеброй и $a \in \mathfrak{A}$. Введем обозначения:

$M(a) \equiv \{m \neq 0 \mid w_a(m) \neq 0\}$ — носитель характеристической функции w_a ;

$N(a) \equiv \{m \in M(a) \mid \forall n \in M(a)(T_m \leq T_n \rightarrow m = n)\}$ — множество максимальных элементов множества $M(a)$ относительно следующего порядка: $\leq(m, n) \iff T_m \leq T_n$.

Обозначим $M(\mathfrak{A}) \equiv M(1^{\mathfrak{A}})$ и $N(\mathfrak{A}) \equiv N(1^{\mathfrak{A}})$.

Следующее определение является уточнением аналогичного определения из [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Элемент a булевой алгебры с выделенной подалгеброй называется *m-простым*, если $N(a) = \{m\}$ и выполнено $P(a)$. Элемент a называется *простым*, если $a \in F(\mathfrak{A})$ и найдутся число $l \leq n$ и l -простой элемент $d \geq a$ или a является *m-простым* для некоторого m . Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *простой (m-простой)*, если $1^{\mathfrak{A}}$ — простой (*m-простой*) элемент.

Предложение 1.10 [10]. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и $a \in \mathfrak{A}$. В алгебре $\mathfrak{A}$ выполнено $T_l(a)$ тогда и только тогда, когда элемент a является l -простым и $w_a(l) = 1$.

Предложение 1.11 [10]. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — l -простые алгебры, принадлежащие классу K_n . Предположим, что $w_{\mathfrak{A}}(l), w_{\mathfrak{B}}(l) \geq 2^m$ и $l > n$. Тогда $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Предложение 1.12 [10]. Для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была локальной, необходимо и достаточно, чтобы множество $M(\mathfrak{A})$ было конечным.

Будем говорить, что элемент $a \in \mathfrak{A}$ *локальный*, если множество $M(a)$ конечно, и *нелокальный* в противном случае.

Предложение 1.13 [10]. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная локальная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу K_n . Тогда любой элемент алгебры $\mathfrak{A}$ есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся простых элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14 [10]. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры, принадлежащие классу K_n . Множество $S \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \times \mathbb{N}$ называется *признаком m-эквивалентности*, если S удовлетворяет следующим условиям:

Ax1) $(0^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{B}}, 0), (1^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{B}}, 0) \in S$;

Ax2) $(a, b, k) \in S, k < m \rightarrow (a, b, k+1) \in S$;

Ax3) $(a, b, k) \in S \rightarrow ((a = 0 \iff b = 0) \& P(a) \& P(b) \& k \leq m)$;

Ax4) если $(a, b, k) \in S, k < m$ и $0 < c < a$, то найдутся попарно не пересекающиеся $c_0, \dots, c_l \leq a$, попарно не пересекающиеся $d_1, \dots, d_l \leq b$ и число $j \leq l$ такие, что $\bigcup_{i \leq l} c_i = a, \bigcup_{i \leq l} d_i = b, c_1 \cup \dots \cup c_j = c, (c_i, d_i, k+1) \in S$ при $i \geq 2, c_0 \cup c_1 \in F(\mathfrak{A})$ и $(c_0 \cup c_1) \cong (d_1)$ (здесь и в дальнейшем имеется в виду изоморфизм булевых алгебр с выделенными подалгебрами);

Ax5) если $(a, b, k) \in S, k < m$ и $0 < d < b$, то найдутся попарно не пересекающиеся $d_0, \dots, d_l \leq b$, попарно не пересекающиеся $c_1, \dots, c_l \leq a$ и число $j \leq l$ такие, что $\bigcup_{i \leq l} c_i = a, \bigcup_{i \leq l} d_i = b, d_1 \cup \dots \cup d_j = d, (c_i, d_i, k+1) \in S$ при $i \geq 2, d_0 \cup d_1 \in F(\mathfrak{B})$ и $(d_0 \cup d_1) \cong (c_1)$.

Предложение 1.15 [10]. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и $2 \leq i \leq n$. Тогда

- (а) если $w_{\mathfrak{A}}(i) = \infty$, то существует число $j > i$ такое, что $T_i \leq T_j$ и $w_{\mathfrak{A}}(j) \neq 0$;
 (б) если $\mathfrak{A}$ i -простая, то $w_{\mathfrak{A}}(i) < \infty$.

Теорема 1.16 [10]. Пусть алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ принадлежат классу K_n и для них существует признак m -эквивалентности S . Тогда $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

2. Теории, не имеющие счетно-насыщенной модели

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [1]. Счетная модель $\mathfrak{A}$ называется *счетно-насыщенной*, если для любых элементов $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{A}$ любой тип формул $p(x, a_1, \dots, a_k)$, совместный с теорией $\text{Th}(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$, реализуется в модели $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$, т. е. найдется элемент $a \in \mathfrak{A}$ такой, что для любой формулы $\varphi \in p(x, a_1, \dots, a_k)$ выполнено $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k) \models \varphi(a, a_1, \dots, a_k)$.

Предложение 2.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, принадлежащая классу K_n . Предположим, что найдется бесконечное множество $X \subset M(\mathfrak{A})$ такое, что для всех $i, j \in X$, $i \neq j$, выполнено $T_i \# T_j$. Тогда элементарная теория $\text{Th } \mathfrak{A}$ не имеет счетно-насыщенной модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ и множество $X \subset M(\mathfrak{A})$ удовлетворяют условиям предложения. Пусть $Y \subset X$. Рассмотрим следующее множество формул:

$$\Delta_Y = \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{(\exists y \leq x)T_i(y) \mid i \in Y\} \cup \{\neg(\exists y \leq x)T_i(y) \mid i \in X \setminus Y\}.$$

Докажем, что множество Δ_Y локально совместно. Зафиксируем множество Y и обозначим $\Delta \Leftarrow \Delta_Y$, $\Delta^1 \Leftarrow \{(\exists y \leq x)T_i(y) \mid i \in Y\}$, $\Delta^2 \Leftarrow \{\neg(\exists y \leq x)T_i(y) \mid i \in X \setminus Y\}$. При этих обозначениях $\Delta = \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \Delta^1 \cup \Delta^2$.

Пусть Δ_0 — конечное подмножество Δ , $\Delta_0^1 = \Delta_0 \cap \Delta^1$, $\Delta_0^2 = \Delta_0 \cap \Delta^2$. Тогда $\Delta_0 = \Delta_0^1 \cup \Delta_0^2$ и $\Delta_0^1 \cap \Delta_0^2 = \emptyset$. Пусть $Y_1 = \{i_1, \dots, i_m\} \subset Y \subset M(\mathfrak{A})$ и $\Delta_0^1 = \{(\exists y \leq x)T_{i_j}(y) \mid i \in Y_1\}$. Найдутся $c_1, \dots, c_m \in \mathfrak{A}$ такие, что $\mathfrak{A} \models T_{i_j}(c_j)$ для всех $j \leq m$. Обозначим $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2 \setminus a_1, \dots, a_m = c_m \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_{m-1})$. Тогда для $i, j \leq m$, $i \neq j$, выполнено $a_i \cap a_j = 0$. Кроме того, в силу неискязаемости формулы T_{i_j} и того, что $T_i \# T_j$ для всех $i \neq j$, $i, j \in Y_0$, будет выполнено $\mathfrak{A} \models T_{i_j}(a_j)$ для любого $j \leq m$. Рассмотрим $a = a_1 \cup \dots \cup a_m$. Очевидно, что тогда $(\exists y \leq a)T_k(y)$ для любого $k \in Y_1$.

Пусть $Y_2 = \{i \mid \neg(\exists y \leq x)T_i(y) \in \Delta_0^2\}$ и $k \in Y_2$, $b \leq a$ и выполнено $T_k(b)$. Тогда $b = (b \cap a_1) \cup \dots \cup (b \cap a_m)$, причем $(b \cap a_i) \cap (b \cap a_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, в силу того, что формула T_k неискзающая, выполнено $\mathfrak{A} \models T_k(b \cap a_l)$ для некоторого $l \leq m$, при этом $\mathfrak{A} \models T_{i_l}(a_l)$, $i_l \in Y$, и $k \in Y_2 \subset X \setminus Y$, значит, $i_l \neq k$, $i_l, k \in X$. Но тогда $T_k \# T_{i_l}$; противоречие с $\mathfrak{A} \models T_k(b \cap a_l)$, $b \cap a_l \leq a_l$ и $\mathfrak{A} \models T_{i_l}(a_l)$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \neg(\exists y \leq b)T_k(y)$ для любого $k \in Y_2$. Значит, $\mathfrak{A} \models \Delta_0(a)$. Мы показали, что множество формул Δ_Y локально совместно. В силу локальной теоремы Мальцева множество Δ_Y совместное. Пусть P_Y — максимальное непротиворечивое расширение множества Δ_Y . Поскольку $\text{Th}(\mathfrak{A}) \subset P_Y$, тип P_Y совместен с теорией $\text{Th}(\mathfrak{A})$. Так как различным подмножествам множества X соответствуют различные типы, существует континуум типов, совместных с элементарной теорией $\text{Th}(\mathfrak{A})$. Следовательно, элементарная теория $\text{Th } \mathfrak{A}$ не имеет счетно-насыщенной модели. Предложение доказано.

В [10] доказано следующее

Предложение 2.3 [10]. (а) Для $n \geq 3$ найдется бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что $T_i \# T_j$ для различных $i, j \in A$.

(б) Для любого числа $k \in \mathfrak{N}$ найдется алгебра $\mathfrak{N}_k \in K_n$ такая, что $\mathfrak{N}_k \models T_k(1)$.

Теорема 2.4. Для любого $n \geq 3$ существует континуум суператомных булевых алгебр с выделенными плотными подалгебрами ширины n , элементарные теории которых различны и не имеют счетно-насыщенных моделей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что $T_i \# T_j$ для различных $i, j \in A$. Для бесконечного множества $I \subset A$ обозначим $\mathfrak{A}_I = \sum_{i \in I} \mathfrak{N}_i$. Тогда $I \subset M(\mathfrak{A}_I)$. В силу предложения 2.2 элементарная теория $\text{Th } \mathfrak{A}_I$ не имеет счетно-насыщенной модели.

Пусть $I, J \subset A$ и $I \neq J$. Пусть, например, $I \not\subset J$. Тогда найдется число $i \in I \setminus J$. В этом случае $\mathfrak{A}_I \models \exists x T_i(x)$. Предположим, что $\mathfrak{A}_J \models \exists x T_i(x)$. Тогда найдется элемент $a \in \mathfrak{A}_J$ такой, что $T_i(a)$. Значит, $a \leq 1^{\mathfrak{N}_{j_1}} \cup \dots \cup 1^{\mathfrak{N}_{j_k}}$ для некоторых $j_1, \dots, j_k \in J$. В силу неистинности формулы T_i заключаем, что для некоторого $s \leq k$ выполнено $T_i \leq T_{j_s}$; противоречие. Стало быть, $\mathfrak{A}_J \models \neg \exists x T_i(x)$ и $\mathfrak{A}_I \not\models \mathfrak{A}_J$. Теорема доказана.

3. Простые модели

Напомним, что счетная модель $\mathfrak{A}$ простая, если в ней реализуются только главные типы. В настоящем разделе докажем, что все модели вида $\mathfrak{A}_I$, построенные в теореме 2.4, простые.

Предложение 3.1. Пусть $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, $w_{\mathfrak{A}_2} = w_{\mathfrak{B}_2}$, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$ — локальные алгебры. Тогда $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2$ локальные, то доказывать нечего. Пусть $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2$ нелокальные. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$. Определим

$$M = M(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_1) \cup \{1, 2, \dots, n\};$$

$$U = \{\exists z(P(z) \& (M(z) \subseteq M) \& (w_{C(z)}(l) = 0)) \mid l \in M\} \\ \cup \{w_1(l) = k \mid l \in M, k \leq 2^m\} \cup \{w_1(l) \geq 2^m \mid l \in M\} \cup \{P(x)\}.$$

Возьмем число t' такое, что все формулы из семейства U устойчивы относительно t' -эквивалентности, и определим $t = t' + m$. Построим признак S m -эквивалентности алгебр $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2$:

$S = \{(x, y, k) \mid x \in \mathfrak{A}_2, y \in \mathfrak{B}_2, \text{ и выполнены следующие условия:}$

- (1) $k \leq m$, $P(x)$, $P(y)$;
- (2) $\forall l \in M(w_x(l) = w_y(l) \text{ или } w_x(l), w_y(l) \geq 2^{m-k})$;
- (3) $(x) \times \mathfrak{C} \equiv_{t-k} (y) \times \mathfrak{D}$ для некоторых локальных $\mathfrak{C}, \mathfrak{D} \in K_n$, $M(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) \subseteq M$;
- (4) $(\forall l \leq n)(l \neq 1 \rightarrow w_x(l) = w_y(l))$.

Покажем, что множество S удовлетворяет требованиям Ax1–Ax5 из определения 1.14.

Ax1. В силу условий настоящего утверждения $(0^{\mathfrak{A}_2}, 0^{\mathfrak{B}_2}, 0)$, $(1^{\mathfrak{A}_2}, 1^{\mathfrak{B}_2}, 0) \in S$.

Ax2. По построению множества S если $(x, y, k) \in S$, то $(x, y, k+1) \in S$.

Ax3. Пусть $(x, y, k) \in S$ и $x = 0$. Тогда для любого $i \leq n$ выполнено $0 = w_x(i) = w_y(i)$. Следовательно, $y = 0$.

Ах4. Пусть $(x, y, k) \in S$, $k < m$, $0 < a < x$.

СЛУЧАЙ 1: выполнено $P(a)$. Поскольку $(x) \times \mathfrak{C} \equiv_{t-k} (y) \times \mathfrak{D}$, найдутся элемент $0 < b < y$ и разложения $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ такие, что

$$(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b) \times \mathfrak{D}_1; \quad (x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b) \times \mathfrak{D}_2.$$

Множество всех элементов $b < y$, $b > 0$, удовлетворяющих выше указанным условиям, обозначим через H . Пусть $b \in H$.

Заметим, что тогда для $(a, b, k+1)$ и $(x \setminus a, y \setminus b, k+1)$ выполнены следующие условия признака S :

(1) $P(b)$ и $P(y \setminus b)$ в силу того, что $P(x)$ принадлежит U и, следовательно, устойчиво относительно $t - (k+1)$ -эквивалентности.

(3) $(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b) \times \mathfrak{D}_1$, $M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1) \subseteq M$ и

$(x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b) \times \mathfrak{D}_2$, $M(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_2) \subseteq M$.

Покажем, что найдется элемент $b \in H$ такой, что выполнено условие (2) признака S , а именно, $\forall l \in M(w_a(l) = w_b(l) \text{ или } w_a(l), w_b(l) \geq 2^{m-(k+1)})$ и $\forall l \in M(w_{x \setminus a}(l) = w_{y \setminus b}(l) \text{ или } w_{x \setminus a}(l), w_{y \setminus b}(l) \geq 2^{m-(k+1)})$.

Предположим, что такого элемента $b \in H$ не существует. Тогда для каждого $b \in H$ обозначим $l_b = \max\{l \in M \mid \text{условие (2) признака } S \text{ нарушается на } l \text{ для } (a, b, k+1) \text{ или } (x \setminus a, y \setminus b, k+1)\}$.

Рассмотрим элемент $b \in H$ с наименьшим значением l_b . Обозначим $l = l_b$. Без ограничения общности можно считать, что условие S нарушается для l на $(a, b, k+1)$. Возможны следующие случаи.

СЛУЧАЙ 1.1: $w_b(l) < w_a(l)$, $w_b(l) < 2^{m-(k+1)}$, $w_x(l), w_y(l) \geq 2^{m-k}$, $w_{x \setminus a}(l) < 2^{m-(k+1)}$, $l > n$ или $l = 1$. В частности, рассматривается в том числе случай, когда $w_a(l) = \infty$.

Тогда $w_a(l) = w_x(l) - w_{x \setminus a}(l) \geq 2^{m-(k+1)}$ и $w_{y \setminus b}(l) \geq 2^{m-(k+1)}$. Так как $w_{x \setminus a}(l) < 2^{m-(k+1)}$, имеем

$$(x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \models \exists z(P(z) \& M(z) \subseteq M \& w_{C(z)}(l) = 0).$$

Стало быть, в силу устойчивости множества формул U относительно, t' -эквивалентности, заключаем, что $(y \setminus b) \times \mathfrak{D}_2 \models \exists z(P(z) \& M(z) \subseteq M \& w_{C(z)}(l) = 0)$. Значит, найдется локальный элемент $c \leq y \setminus b$, принадлежащий подалгебре, такой, что $w_{y \setminus (b \cup c)}(l) = 0$ и $M(c) \subseteq M$. Докажем, что найдется l -простой элемент $d \leq c$ такой, что $w_{c \setminus d}(l) = 0$. Предположим противное. Тогда в силу классификации локальных алгебр найдется s -простой элемент $c_1 \leq c$ такой, что $T_l \leq T_s$, $l < s$. Следовательно, $(y \setminus b) \models T_s(c_1)$ и $w_{y \setminus b}(s) \geq 1$. Так как $w_{x \setminus a}(l) < 2^{m-(k+1)}$, то $w_{x \setminus a}(s) = 0$. Поскольку $M(c) \subseteq M$, то $s \in M$. Таким образом,

$$0 = w_{x \setminus a}(s) < w_{y \setminus b}(s), \quad s \in M, \quad s > l_b = l.$$

Противоречие с тем, что $l = l_b$ — наибольшее число, для которого нарушается условие (2) признака S . Следовательно, существует l -простой элемент $d \leq c$ такой, что $w_{c \setminus d}(l) = 0$. Возьмем l -простой элемент $d_1 \leq d$ такой, что $w_{d_1}(l) = w_{x \setminus a}(l)$. Определим $b^* = b \cup (d \setminus d_1)$. Тогда

$$w_{x \setminus a}(l) = w_{d_1}(l) = w_{y \setminus b^*}(l), \quad w_a(l) \geq 2^{m-(k+1)},$$

$$w_{b^*}(l) = w_y(l) - w_{y \setminus b^*}(l) = w_y(l) - w_{x \setminus a}(l) \geq 2^{m-(k+1)},$$

так как $w_y(l) \geq 2^{m-k}$ и $w_{x \setminus a}(l) < 2^{m-(k+1)}$.

Поскольку $(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b) \times \mathfrak{D}_1$, то

$$(a) \times (d \setminus d_1) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b^*) \times \mathfrak{D}_1, \quad M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1 \times (d \setminus d_1)) \subseteq M.$$

Аналогично

$$(x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b^*) \times \mathfrak{D}_2 \times (d \setminus d_1), \quad M(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_2 \times (d \setminus d_1)) \subseteq M.$$

Таким образом, условие (2) признака S выполняется для l на $(a, b^*, k+1)$, $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$, при этом условие (2) признака S выполнено для всех $l' > l$ на $(a, b^*, k+1)$, $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$ автоматически. Следовательно, $l_{b^*} < l$. Противоречие с выбором элемента b и числа l .

СЛУЧАЙ 1.2: $w_b(l) < w_a(l)$, $w_b(l) < 2^{m-(k+1)}$, $w_x(l), w_y(l) \geq 2^{m-k}$, $w_{x \setminus a}(l) \geq 2^{m-(k+1)}$, $l > n$ или $l = 1$.

Тогда найдется l -простой элемент $c \leq y \setminus b$ с характеристикой

$$w_c(l) = \min\{2^{m-(k+1)} - w_b(l), w_a(l) - w_b(l)\}.$$

В этом случае полагаем $b^* = b \cup c$. Следовательно, либо $w_a(l) = w_{b^*}(l)$, либо $w_a(l), w_{b^*}(l) \geq 2^{m-(k+1)}$. При этом $w_{x \setminus a}(l), w_{y \setminus b^*}(l) \geq 2^{m-(k+1)}$.

Из $(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b) \times \mathfrak{D}_1$ следуют $(a) \times (c) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b^*) \times \mathfrak{D}_1$ и $M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1 \times (c)) \subseteq M$.

Аналогично

$$(x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b^*) \times (c) \times \mathfrak{D}_2, \quad M(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_2 \times (c)) \subseteq M.$$

Таким образом, условие (2) признака S выполняется для l на $(a, b^*, k+1)$, $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$; противоречие с выбором элемента b и числа l .

СЛУЧАЙ 1.3: $w_b(l) < w_a(l)$, $w_x(l) = w_y(l) < 2^{m-k}$, $l > n$ или $l = 1$.

Так как $w_x(l) = w_y(l) < \infty$, то $w_a(l), w_b(l), w_{x \setminus a}(l), w_{y \setminus b}(l) < \infty$. Стало быть, найдется l -простой элемент $c \leq y \setminus b$ с характеристикой $w_c(l) = w_a(l) - w_b(l)$. Определив $b^* = b \cup c$, получим

$$(a) \times (c) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b^*) \times \mathfrak{D}_1$$

и

$$M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1 \times (c)) \subseteq M; \quad (x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b^*) \times (c) \times \mathfrak{D}_2, \quad M(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_2 \times (c)) \subseteq M;$$

$$w_a(l) = w_{b^*}(l) \text{ и } w_{x \setminus a}(l) = w_{y \setminus b^*}(l).$$

Таким образом, условие (2) признака S выполняется для l на $(a, b^*, k+1)$, $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$; противоречие с выбором элемента b и числа l .

СЛУЧАЙ 1.4: $w_a(l) < w_b(l)$, $l > n$ или $l = 1$. Тогда $w_a(l) < 2^{m-(k+1)}$, так как в противном случае условие (2) признака S выполнено для l для $(a, b, k+1)$. С учетом рассуждений, аналогичных проведенным для случая 1.1, существует l -простой элемент $c \leq b$ такой, что $w_{b \setminus c}(l) = 0$. Возьмем l -простой $c_1 \leq c$ такой, что $w_{c_1}(l) = w_a(l)$. Положим $b^* = (b \setminus c) \cup c_1$. Тогда $b = b^* \cup (c \setminus c_1)$ и справедливо следующее:

$$w_{b^*}(l) = w_a(l); \quad w_{x \setminus a}(l) = w_{y \setminus b^*}(l) \text{ либо } w_{x \setminus a}(l), \quad w_{y \setminus b^*}(l) \geq 2^{m-(k+1)};$$

$$(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b^*) \times (c \setminus c_1) \times \mathfrak{D}_1$$

и

$$M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1 \times (c \setminus c_1)) \subseteq M; \quad (x \setminus a) \times (c \setminus c_1) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b^*) \times \mathfrak{D}_2,$$

и

$$M(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_2 \times (c \setminus c_1)) \subseteq M.$$

Отсюда следует, что условие (2) признака S выполняется для l на $(a, b^*, k+1)$, $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$; противоречие с выбором элемента b и числа l .

СЛУЧАЙ 1.5: $w_a(l) = w_b(l)$, $w_{x \setminus a}(l) \neq w_{y \setminus b}(l)$, $l > n$ или $l = 1$. Разбирается аналогично.

СЛУЧАЙ 1.6: $1 < l \leq n$. Если $w_a(l) = \infty$, то найдется $l' > l$ такое, что $T_l < T_{l'}$ и $w_a(l') \neq 0$. В таком случае $w_b(l') \neq 0$. Следовательно, $w_b(l) = \infty$. Аналогично $w_{x \setminus a}(l) = \infty \iff w_{y \setminus b}(l) = \infty$.

Пусть $w_b(l) < w_a(l) < \infty$. Поскольку $w_x(l) = w_y(l)$, найдется l -простой элемент $c \leq y \setminus b$ такой, что $w_c(l) = w_a(l) - w_b(l)$. Положим $b^* = b \cup c$. Тогда

$$w_a(l) = w_{b^*}(l); \quad w_{x \setminus a}(l) = w_{y \setminus b^*}(l); \quad (a) \times (c) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b^*) \times \mathfrak{D}_1$$

и

$$M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1 \times (c)) \subseteq M; \quad (x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b^*) \times (c) \times \mathfrak{D}_2,$$

и

$$M(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_2 \times (c)) \subseteq M.$$

В этом случае условие (2) признака S выполняется для l на $(a, b^*, k+1)$, $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$.

Итак, доказано, существование $0 < b < y$ такого, что выполнены условия (1)–(3) признака S .

Докажем существование b^* такого, что выполнены все условия (1)–(4) признака S для $(a, b^*, k+1)$ и $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$. Предположим, что для некоторого числа $1 < l \leq n$ нарушается условие (4) признака S : $w_a(l) \neq w_b(l)$ или $w_{x \setminus a}(l) \neq w_{y \setminus b}(l)$. Пусть для определенности $w_a(l) < w_b(l)$. Заметим, что $w_a(l) < \infty \iff w_b(l) < \infty$. В самом деле, пусть $w_a(l) < \infty$. В силу устойчивости множества формул U относительно t' -эквивалентности, практически дословно повторяя доказательство из случая 1.1, заключаем, что найдется l -простой элемент $b_1 \leq b$ такой, что $w_{b \setminus b_1}(l) = 0$. Стало быть, $w_{b_1}(l) = w_b(l)$. Следовательно, в силу предложения 1.15 $w_b(l) < \infty$. Аналогично $w_{x \setminus a}(l) < \infty \iff w_{y \setminus b}(l) < \infty$. Стало быть, найдется l -простой элемент $c \leq b$ с характеристикой $w_c(l) = w_b(l) - w_a(l)$. Полагаем $b^* = b \setminus c$. Так как $w_x(l) = w_y(l)$, имеем

$$w_a(l) = w_{b^*}(l), \quad w_{x \setminus a}(l) = w_{y \setminus b^*}(l); \quad (a) \times (c) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b^*) \times \mathfrak{D}_1$$

и

$$M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1 \times (c)) \subseteq M; \quad (x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{t-(k+1)} (y \setminus b^*) \times (c) \times \mathfrak{D}_2,$$

и

$$M(\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_2 \times (c)) \subseteq M.$$

Изменяя элемент b вышеуказанным образом для всех $1 < l \leq n$, на которых нарушается условие (4) признака S , получим элемент b^* такой, что будут выполнены все условия (1)–(4) признака S для $(a, b^*, k+1)$ и $(x \setminus a, y \setminus b^*, k+1)$.

Таким образом, если $P(a)$, то существование требуемого числа b доказано.

СЛУЧАЙ 2: $\neg P(a)$. Тогда найдутся непересекающиеся элементы $a_1, a_2, a_3, a_4 \leq x$ такие, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} x &= (a_1 \cup a_2) \cup (a_3 \cup a_4), \quad P(a_1), \quad P(a_4), \quad a_2 \in F(\mathfrak{A}_2), \quad a_3 \in F(\mathfrak{A}_2); \\ (\forall e \leq a_2)(e \neq 0 \rightarrow \neg P(e)), \quad (\forall e \leq a_3)(e \neq 0 \rightarrow \neg P(e)); \end{aligned}$$

$$a = a_1 \cup a_2.$$

Так как $P(a_1)$ и $(x, y, k) \in S$, аналогично рассмотренному случаю 1 найдутся элементы $b_1, b_2 \leq y$ такие, что $b = b_1 \cup b_2$, $P(b_1)$, $P(b_2)$, $b_1 \cap b_2 = 0$ и при этом $(a_1, b_1, k+1) \in S$, $(a_2 \cup a_3 \cup a_4, b_2, k+1) \in S$.

Поскольку $(a_2 \cup a_3 \cup a_4, b_2, k+1) \in S$, то $w_{a_2 \cup a_3 \cup a_4}(i) = w_{b_2}(i)$ для всех $1 < i \leq n$. Следовательно, найдется элемент $b_3 \leq b_2$ такой, что $(b_3) \cong (a_2 \cup a_3)$.

Докажем, что $(a_4, b_2 \setminus b_3, k+1) \in S$, а именно проверим последовательно выполнение условий (1)–(4).

(1) Выполнено очевидным образом;

(2) Пусть $l \in M$. Так как $w_{a_2 \cup a_3}(l) = w_{b_3}(l) < \infty$, то $w_{a_4}(l) = w_{a_2 \cup a_3 \cup a_4}(l) - w_{a_2 \cup a_3}(l)$ и $w_{b_2 \setminus b_3}(l) = w_{b_2}(l) - w_{b_3}(l)$. Заметим, что $M(a_2 \cup a_3) = M(b_3) \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$. Следовательно, для $l > n$ или $l = 1$ выполнено $w_{a_4}(l) = w_{a_2 \cup a_3 \cup a_4}(l)$ и $w_{b_2 \setminus b_3}(l) = w_{b_2}(l)$. Так как $(a_2 \cup a_3 \cup a_4, b_2, k+1) \in S$, либо $w_{a_4}(l)$, $w_{b_2 \setminus b_3}(l) \geq 2^{m-(k+1)}$, либо $w_{a_4}(l) = w_{b_2 \setminus b_3}(l)$. Случай $l \leq n$, $l \neq 1$, будет рассмотрен при доказательстве (4).

(3) $(a_4) \times (a_2 \cup a_3) \times \mathfrak{C}_1 \equiv (a_2 \cup a_3 \cup a_4) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{t-(k+1)} (b_2) \times \mathfrak{D}_1 \equiv (b_2 \setminus b_3) \times (b_3) \times \mathfrak{D}_1$ и $M((a_2 \cup a_3) \times \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{D}_1) \subseteq M$.

(4) Пусть $i \leq n$ и $i \neq 1$. Тогда

$$w_{a_4}(i) = w_{a_2 \cup a_3 \cup a_4}(i) - w_{a_2 \cup a_3}(i) = w_{b_2}(i) - w_{b_3}(i) = w_{b_2 \setminus b_3}(i).$$

Следовательно, $(a_4, b_2 \setminus b_3, k+1) \in S$.

Таким образом, доказано, что множество S является признаком m -эквивалентности и, стало быть, $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2$.

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$. Для каждого элемента $a \in \mathfrak{A}$ найдутся попарно не пересекающиеся элементы $c, d_1, \dots, d_k \leq a$ такие, что $a = c \cup d_1 \cup \dots \cup d_k$, $P(c)$, $d_1, \dots, d_k \in At(\mathfrak{A})$ и $(\forall z \leq d_1 \cup \dots \cup d_k)(P(z) \rightarrow z = 0)$. Набор элементов $c, d_1, \dots, d_k$ является однозначным с точностью до их перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A} \in K_n$, найдутся элементы $c_1, c_2 \leq a$ такие, что $a = c_1 \cup c_2$, $P(c_1)$, $c_2 \in F(\mathfrak{A})$ и $c_1 \cap c_2 = 0$. Пусть $D = \{d \mid d \leq c_2, P(d)\}$. Обозначим $c \equiv c_1 \cup \bigcup_{d \in D} d$. Тогда $a = c \cup (a \setminus c)$ и $(\forall z \leq a \setminus c)(P(z) \rightarrow z = 0)$.

Поскольку $a \setminus c \in F(\mathfrak{A})$, найдутся непересекающиеся атомы $d_1, \dots, d_k$ такие, что $a \setminus c = d_1 \cup \dots \cup d_k$. Элементы $c, d_1, \dots, d_k$ искомые.

Докажем однозначность. Заметим, что для каждого элемента d_i не существует элемента $e \geq d_i$ такого, что $P(e)$ и $e \leq a$. Стало быть, для двух различных разложений $a = c \cup d_1 \cup \dots \cup d_k$, $a = c^1 \cup d_1^1 \cup \dots \cup d_{k_1}^1$, удовлетворяющих требуемым свойствам, для каждого $i \leq k$ выполнено $d_i \leq d_1^1 \cup \dots \cup d_{k_1}^1$. Следовательно, $d_1 \cup \dots \cup d_k = d_1^1 \cup \dots \cup d_{k_1}^1$ и $c = c^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и элементы $a, c, d_1, \dots, d_k \in \mathfrak{A}$ удовлетворяют требованиям замечания 3.2. Обозначим $f(a) = c$, $E(a) = \{d_1, \dots, d_k\}$, $e(a) = d_1 \cup \dots \cup d_k$, $a^1 = a$, $a^0 = C(a)$. Для каждого $d \in E(a)$ через $g(d)$ обозначим атом подалгебры $P^{\mathfrak{A}}$, лежащий над d , т. е. $d \leq g(d)$ и $g(d) \in At(P^{\mathfrak{A}})$.

Теорема 3.4. Пусть каждое разложение $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ счетной алгебры $\mathfrak{A} \in K_n$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) если $\mathfrak{B}$ локальна, то для любого $l \in N(\mathfrak{B})$ если $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$, то $w_{\mathfrak{C}}(l) < \infty$;
- (б) если $\mathfrak{B}$ нелокальна, то $\mathfrak{C}$ локальна.

Тогда $\mathfrak{A}$ — простая модель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{A}$ нелокальна. Пусть $b_1, \dots, b_k \in \mathfrak{A}$. Докажем существование полной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ такой, что $\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_k)$. Отсюда и будет следовать, что модель $\mathfrak{A}$ простая.

Пусть $r = 2^k - 1$, $\{0, 1\}^k = \{\epsilon_0, \dots, \epsilon_r\}$. Определим $a_i = b^{\epsilon_i}$, $i \leq r$. Тогда $a_i \cap a_j = 0$ для $i \neq j$, $i, j \leq r$ и $a_0 \cup \dots \cup a_r = 1$. Для каждого $i \leq r$ справедливо $a_i = f(a_i) \cup e(a_i)$. Следовательно, $1 = f(a_0) \cup \dots \cup f(a_r) \cup (e(a_0) \cup \dots \cup e(a_r))$, причем $P(e(a_0) \cup \dots \cup e(a_r))$. В силу условия (б) без ограничения общности можно считать, что $f(a_0)$ нелокальный. Тогда $f(a_1), \dots, f(a_r)$ локальные. Заметим, по условию (а), если $l \in N(f(a_i))$ и $w_{f(a_i)}(l) = \infty$ для $i \geq 1$, то $w_{f(a_j)}(l) < \infty$ для любого $j \neq i$, $j \leq r$.

Обозначим

$$L_i = \{j \in N(f(a_i)) \mid w_{f(a_i)}(j) < \infty\}, \quad i \geq 1;$$

$$M = \bigcup_{i \geq 1} M(f(a_i)); \quad M_0 = M \cup M(e(a_0) \cup \dots \cup e(a_r));$$

$$L_0 = \{j \in M \mid w_{f(a_0)}(j) < \infty\},$$

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \dots, x_r) = & \left(\bigwedge_{i \geq 1} \bigwedge_{j \in L_i} (w_{f(x_i)}(j) = w_{f(a_i)}(j)) \right) \& \left(\bigwedge_{i \geq 1} (M(f(x_i)) = M(f(a_i))) \right) \\ & \& \left(\bigwedge_{j \in L_0} (w_{f(x_0)}(j) = w_{f(a_0)}(j)) \right) \& \left(\bigwedge_{j \in M_0} (w_{f(a_0)}(j) \neq 0 \iff w_{f(x_0)}(j) \neq 0) \right) \\ & \& \left(\bigwedge_{I \subseteq \{0, \dots, r\}} (w_{\bigcup_{i \in I} e(x_i)} = w_{\bigcup_{i \in I} e(a_i)}) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим формулу $\varphi(y_1, \dots, y_k)$, полученную из формулы ψ подстановкой терма y^{ϵ_i} вместо x_i . Очевидно, что $\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_k)$. Докажем, что построенная формула полная. Пусть

$$(\mathfrak{B}, c_1, \dots, c_k) \models \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\phi(c_1, \dots, c_k)\}.$$

Докажем, что $(\mathfrak{B}, c_1, \dots, c_k) \equiv (\mathfrak{A}, b_1, \dots, b_k)$.

Пусть $d_i = c^{\epsilon_i}$, $i \leq r$. Тогда $(\mathfrak{B}, d_0, \dots, d_r) \models \psi(d_0, \dots, d_r)$. Заметим, что $d_i \cap d_j = 0$ для $i \neq j$, $i, j \leq r$ и $d_0 \cup \dots \cup d_r = 1$. Поскольку $M(f(d_i)) = M(f(a_i))$ для $i \geq 1$, элементы $f(d_1), \dots, f(d_r)$ локальны. Поскольку $\mathfrak{B}$ нелокальна, $f(d_0)$ нелокальный.

Докажем, что $w_{f(a_i)} = w_{f(d_i)}$. Пусть $i \geq 1$. Тогда в силу построения формулы ψ заключаем, что $M(f(a_i)) = M(f(d_i))$. Достаточно доказать, что для всех $j \in N(f(a_i)) = N(f(d_i))$ имеет место $w_{f(a_i)}(j) = w_{f(d_i)}(j)$. Возьмем произвольное $j \in M(f(a_i)) = M(f(d_i))$. Если $w_{f(a_i)}(j) < \infty$, то $j \in L_i$ и $w_{f(a_i)}(j) = w_{f(d_i)}(j)$. Пусть $w_{f(a_i)}(j) = \infty$. Предположим, что $w_{f(d_i)}(j) < \infty$. Тогда $w_{f(a_l)}(j) < \infty$ для всех $l \neq i$, $l \leq r$. Значит, $j \in L_l$ для всех $l \neq i$, $l \leq r$. Следовательно, $w_{f(d_l)}(j) < \infty$ для всех $l \leq r$. Последнее влечет $w_{\mathfrak{B}}(j) < \infty$; противоречие с $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Полученное противоречие доказывает, что $w_{f(a_i)} = w_{f(d_i)}$. Следовательно, $(f(a_i)) \equiv (f(d_i))$ для $i \geq 1$.

Докажем, что $w_{f(a_0)} = w_{f(d_0)}$. Пусть $j \notin M_0$. Тогда $w_{f(a_0)}(j) = w_{\mathfrak{B}}(j) = w_{\mathfrak{A}}(j) = w_{f(d_0)}$. Зафиксируем $j \in M_0$. Тогда $w_{f(a_0)}(j) \neq 0 \iff w_{f(d_0)}(j) \neq 0$. Стало быть, $M(f(a_0)) = M(f(d_0))$. Рассмотрим $j \in N(f(a_0))$. Возможны следующие два случая.

СЛУЧАЙ 1: $j \in M$. Если $w_{f(a_0)}(j) < \infty$, то $j \in L_0$ и $w_{f(a_0)}(j) = w_{f(d_0)}(j)$. Пусть $w_{f(a_0)}(j) = \infty$. В этом случае $w_{f(a_i)}(j) < \infty$ для всех $i \leq r$, $i \neq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} w_{f(a_0)}(j) &= w_{\mathfrak{A}}(j) - w_{f(a_1)}(j) - \cdots - w_{f(a_r)}(j) - w_{e(a_0) \cup \cdots \cup e(a_r)}(j) \\ &= w_{\mathfrak{B}}(j) - w_{f(d_1)}(j) - \cdots - w_{f(d_r)}(j) - w_{e(d_0) \cup \cdots \cup e(d_r)}(j) = w_{f(d_0)}(j). \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ 2: $j \in M_0 \setminus M$. Тогда

$$w_{f(a_0)}(j) = w_{\mathfrak{A}}(j) - w_{e(a_0) \cup \cdots \cup e(a_r)}(j) = w_{\mathfrak{B}}(j) - w_{e(d_0) \cup \cdots \cup e(d_r)}(j) = w_{f(d_0)}(j).$$

Таким образом, $w_{f(a_0)} = w_{f(d_0)}$. Так как

$$\left(\bigwedge_{I \subset \{0, \dots, r\}} (w_{\bigcup_{i \in I} e(x_i)} = w_{\bigcup_{i \in I} e(a_i)}) \right),$$

имеем

$$(e(a_0) \cup \cdots \cup e(a_r), e(a_0), \dots, e(a_r)) \cong (e(d_0) \cup \cdots \cup e(d_r), e(d_0), \dots, e(d_r)).$$

Обозначим $\mathfrak{M}_1 = (f(a_1)) \times \cdots \times (f(a_r)) \times (e(a_0) \cup \cdots \cup e(a_r))$, $\mathfrak{M}_2 = (f(d_1)) \times \cdots \times (f(d_r)) \times (e(d_0) \cup \cdots \cup e(d_r))$. Суммируя вышеизложенное, имеем

$$(f(a_0)) \times \mathfrak{M}_1 \equiv (f(d_0)) \times \mathfrak{M}_2; \mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2;$$

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \text{ — локальные алгебры; } w_{f(a_0)} = w_{f(d_0)}.$$

Отсюда в силу предложения 3.1 заключаем, что $(f(a_0)) \equiv (f(d_0))$.

Далее

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, a_0, \dots, a_r) &\equiv ((f(a_0)), f(a_0), 0, \dots, 0) \\ &\quad \times ((f(a_1)), 0, f(a_1), 0, \dots, 0) \times \cdots \times ((f(a_r)), 0, \dots, 0, f(a_r)) \\ &\quad \times ((e(a_0) \cup \cdots \cup e(a_r)), e(a_1), \dots, e(a_r)) \\ &\equiv ((f(d_1)), 0, f(d_1), 0, \dots, 0) \times \cdots \times ((f(d_r)), 0, \dots, 0, f(d_r)) \\ &\quad \times ((e(d_0) \cup \cdots \cup e(d_r)), e(d_1), \dots, e(d_r)) \\ &\quad \times ((f(d_0)), f(d_0), 0, \dots, 0) \equiv (\mathfrak{B}, d_0, \dots, d_r). \end{aligned}$$

Заметим, что $b_1, \dots, b_k$ термально выражаются через $a_1, \dots, a_r$ точно так же, как $c_1, \dots, c_k$ через $d_1, \dots, d_r$. Следовательно, $(\mathfrak{A}, b_1, \dots, b_k) \equiv (\mathfrak{B}, c_1, \dots, c_k)$ и, стало быть, формула ϕ полная.

Случай, когда $\mathfrak{A}$ локальна, разбирается аналогично.

Теорема доказана.

Следуя [10], для каждого $k \in \mathbb{N}$ построим $\mathfrak{N}_k$ такую, что $\mathfrak{N}_k \models T_k(1)$. Построение будем вести индукцией по числу k .

БАЗИС ИНДУКЦИИ: $k \leq n$. В этом случае $\mathfrak{N}_k$ есть k -атомная булева алгебра с выделенной двухэлементной подалгеброй.

Пусть $n < k \leq 2n - 1$ и $j = k + 1 - n$. Тогда $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{N}_j^\omega$.

ШАГ ИНДУКЦИИ. Предположим, что для всех $l < k$ алгебра $\mathfrak{N}_l$ построена. Для формулы T_k найдется непустое не одноэлементное конечное множество $R \subset \mathbb{N}$ такое, что $T_k = T_R$. Пусть для определенности $R = \{l_1, \dots, l_m\}$. Обозначим $\mathfrak{N}_k = (\mathfrak{N}_{l_1} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{l_m})^\omega$.

Предложение 3.5. Для любого $k \in \mathbb{N}$ модель $\mathfrak{N}_k$ простая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение докажем индукцией по k . Докажем, что любое разложение алгебры $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ удовлетворяет требованию (а) из теоремы 3.4.

БАЗИС ИНДУКЦИИ. Если $k \leq n$, то алгебра $\mathfrak{N}_k$ простая и $w_{\mathfrak{N}_k}(l) = 0$ для всех $l \neq k$.

Пусть $n < k \leq 2n - 1$ и $j = k + 1 - n$. В этом случае $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{N}_j^\omega$. Пусть $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $l \in N(\mathfrak{B})$ и $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$. В этом случае $l = j$ и для любого числа $i \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathfrak{B} \not\leq \mathfrak{N}_j^i$. Стало быть, найдется число $i \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{N}_j^i$. Последнее влечет, что $w_{\mathfrak{C}}(j) = w_{\mathfrak{C}}(l) \leq k < \infty$. Следовательно, разложение алгебры $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ удовлетворяет требованию (а) из теоремы 3.4, поэтому алгебра $\mathfrak{N}_k$ простая.

ШАГ ИНДУКЦИИ. Пусть $k > 2n - 1$. Тогда найдется конечное не одноэлементное множество $R = \{n_1, \dots, n_s\} \subset \mathbb{N}$ такое, что $T_k = T_R$. В силу индукционного предположения алгебры $\mathfrak{N}_{n_1}, \dots, \mathfrak{N}_{n_s}$ простые. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{n_1} \times \dots \times \mathfrak{N}_{n_s}$. Тогда $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}^\omega$.

Пусть $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $l \in N(\mathfrak{B})$ и $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$. Предположим, что $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{M}^r$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Так как $\mathfrak{B}$ локальная, она является прямой суммой конечного числа неисчезающих алгебр: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_i$ — неисчезающие алгебры. Пусть для определенности $\mathfrak{B}_1$ — l -простая алгебра и $w_{\mathfrak{B}_1}(l) = \infty$. Так как $\mathfrak{B}_1$ неисчезающая, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{B}_1 \leq \mathfrak{N}_{n_1}$. Тогда найдется алгебра $\mathfrak{C}_1 \leq \mathfrak{N}_{n_1}$ такая, что $\mathfrak{N}_{n_1} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{C}_1$. Так как $\mathfrak{N}_{n_1}$ простая, указанное разложение в силу индукционного предположения удовлетворяет требованию (а) из теоремы 3.4. Стало быть, $w_{\mathfrak{C}_1}(l) < \infty$. Следовательно, $\mathfrak{N}_{n_1} \equiv \mathfrak{B}_1$, $l = n_1$ и $w_{\mathfrak{N}_{n_1}}(n_1) = \infty$; противоречие с $\mathfrak{N}_{n_1} \models T_{n_1}(1)$. Следовательно, $\mathfrak{B} \not\leq \mathfrak{M}^r$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Стало быть, $\mathfrak{B} \models \exists x T_k(x)$ и $w_{\mathfrak{B}}(k) = 1 < \infty$.

Таким образом, любое разложение удовлетворяет требованиям (а) из теоремы 3.4.

Предложение доказано.

Следствие 3.6. Для любого $k \in \mathbb{N}$ модель $\mathfrak{N}_k^\omega$ простая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{N}_k^\omega = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $l \in N(\mathfrak{B})$ и $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$. Тогда найдется l -простая алгебра $\mathfrak{B}_1 \leq \mathfrak{B}$ такая, что $w_{\mathfrak{B}_1}(l) = \infty$. Предположим, что $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{N}_k^r$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Так как $\mathfrak{N}_k$ простая и неисчезающая, $\mathfrak{N}_k \equiv \mathfrak{B}_1$. Значит, $l = k$ и $w_{\mathfrak{N}_k}(k) = \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{N}_k^r$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Следовательно, $w_{\mathfrak{C}}(l) \leq r < \infty$.

Предложение доказано.

Следствие 3.7. Теория любой локальной алгебры имеет простую модель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная алгебра и $N(\mathfrak{A}) = \{k_1, \dots, k_s\}$. Тогда найдутся простые неисчезающие модели $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s$ такие, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_s$ и $\mathfrak{B}_i$ k_i -простая для всех $i \leq s$.

Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $l \in N(\mathfrak{B})$ и $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$. Тогда найдется l -простая алгебра $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{B}$ такая, что $w_{\mathfrak{D}}(l) = \infty$. В этом случае для некоторого $i \leq s$ будет выполнено $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{B}_i$. Так как $T_{k_i} \# T_{k_j}$ для $i, j \leq s$, $i \neq j$, то $w_{\mathfrak{D}}(k_j) = 0$. Следовательно, модель $\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_s$ простая.

Следствие доказано.

Теорема 3.8. Для любого $n \geq 3$ существует континуум простых суператомных булевых алгебр с выделенными плотными подалгебрами ширины n , элементарные теории которых различны и не имеют счетно-насыщенных моделей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что модель $\mathfrak{A}_I$, построенная при доказательстве теоремы 2.4, простая. Пусть $\mathfrak{A}_I = \sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. Напомним, что $T_i \# T_j$ для любых различных $i, j \in I$.

Несложно доказать, что $N(\mathfrak{A}_I) = \bigcup_{i \in I} N(\mathfrak{A}_i)$. Последнее влечет, что для всех $l \in N(\mathfrak{A}_I)$ будет $w_{\mathfrak{A}_I}(l) = 1$. Таким образом, условия (а) и (б) из теоремы 3.4 выполняется тривиальным образом и, стало быть, модель $\mathfrak{A}_I$ простая.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейслер Г., Чэн Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
2. Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Наука, 1997.
3. Пальчунов Д. Е. О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 326–346.
4. Pal'chunov D. E. Countably-categorical Boolean algebras with distinguished ideals // Studia Logica. 1987. V. XLVI, N 2. P. 121–135.
5. Пальчунов Д. Е. Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 435–455.
6. Пальчунов Д. Е. Прямые слагаемые булевых алгебр с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 5. С. 499–537.
7. Пальчунов Д. Е. Простые и счетно-насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 82–103.
8. Пальчунов Д. Е. Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 104–132.
9. Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В., Турко А. И. Автоустойчивость булевых алгебр с выделенными идеалами относительно сильных конструктивизаций // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 617–628.
10. Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В. Локальные и неисчезающие суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 6. С. 822–847.

Поступила в редакцию 10 марта 2020 г.

После доработки 6 апреля 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Пальчунов Дмитрий Евгеньевич, Трофимов Алексей Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
palch@math.nsc.ru, trof@mail.ru