A. G. Pinus, Algebraic functions and inner homomorphisms of universal algebras,
Sibirsk. Mat. Zh., 2020, Volume 61, Number 3, 669–673

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.314>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.217.227

April 26, 2023, 15:44:26

УДК 512.56

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ВНУТРЕННИЕ ГОМОМОРФИЗМЫ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Аннотация. На основе понятия алгебраической функции в теории функций действительного переменного исследуется вопрос о синтаксическом задании на универсальных алгебрах функций, графики которых являются алгебраическими или кусочно алгебраическими множествами.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.314

Ключевые слова: алгебраические, глобально алгебраические и квазиневявные функции, внутренние гомоморфизмы универсальных алгебр.

Юрию Леонидовичу Ершову, моему учителю,
с уважением и признательностью

Одним из естественных вопросов универсальной алгебры является вопрос возможности для объектов, определяемых на универсальных алгебрах тем или иным синтаксическим образом (уравнениями, формулами и т. п.), быть определенными в терминах производных объектов этих алгебр: подалгебр, конгруэнций, авто-, эпиморфизмов и пр. В частности, это касается функций, определенных на универсальных алгебрах: термальных, условно термальных, неявных и т. д. Представляет в этом плане интерес вопрос о функциях, график которых является алгебраическим или кусочно алгебраическим множеством, имеется в виду параллель с понятием алгебраической функции в теории функций действительного переменного.

Прежде всего напомним, что в теории функций действительного переменного функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определяется как алгебраическая, если в некоторой окрестности любой точки из области ее определения она задается неявно с помощью некоторого алгебраического уравнения.

Рассматривая аналогичное определение для произвольных универсальных алгебр (поскольку отсутствует однозначно определенная каноническая топология на этих алгебрах и может не выполняться для них, в общем случае, условие нётеровости по уравнениям), естественно приходим к определению функции $f(x_1, \dots, x_n)$ как алгебраической для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, если график этой функции $Grf = \{ \langle a_1, \dots, a_n, f(a_1, \dots, a_n) \rangle \mid a_i \in A \}$ является объединением алгебраических для $\mathfrak{A}$ множеств. Напомним также, что множество $B \subseteq A^m$ называется алгебраическим для алгебры $\mathfrak{A}$, если B есть совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно, бесконечной) системы термальных уравнений

$$t_i^1(x_1, \dots, x_m) = t_i^2(x_1, \dots, x_m) \quad (i \in I)$$

сигнатуры σ . Далее множества, являющиеся объединением алгебраических множеств, будем называть обобщенно алгебраическими.

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем *глобально алгебраической* для алгебры $\mathfrak{A}$, если ее график является алгебраическим множеством этой алгебры.

Внутренним гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой гомоморфизм между ее подалгебрами. Совокупность всех внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $\text{Pm } \mathfrak{A}$. Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ на алгебре $\mathfrak{A}$ определим как *квазиневявную* для $\mathfrak{A}$, если она коммутирует со всеми внутренними гомоморфизмами этой алгебры. Определение дано по аналогии с определением неявных функций на псевдомногообразиях универсальных алгебр от Эйленберга и Шутценберге [1], но в отличие от работы [2] где определены неявные для алгебры $\mathfrak{A}$ функции и дано их синтаксическое описание, не требуем при определении квазиневявной функции принадлежности элемента $f(a_1, \dots, a_n)$ подалгебре алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной элементами $a_1, \dots, a_n$ из $\mathfrak{A}$.

В связи с этим необходимо уточнить, что, говоря о коммутативности некоторой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, определенной на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A}$, с некоторым частичным отображением h этого множества в себя, имеем в виду равенство $hf(a_1, \dots, a_n) = f(h(a_1), \dots, h(a_n))$ для всех элементов $a_1, \dots, a_n$ из области $\text{Dom } h$ определения отображения h таких, что $f(a_1, \dots, a_n) \in \text{Dom } h$, т. е. замкнутость относительно h графика функции f .

Очевидно, что всякая алгебраическая, в том числе глобально алгебраическая, функция для алгебры $\mathfrak{A}$ квазиневявная для $\mathfrak{A}$. Покажем, что для алгебраических функций верно и обратное, в то время как для глобально алгебраических функций это не так.

Начнем с последнего, т. е. укажем универсальную алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и некоторую квазиневявную для нее функцию f , не глобально алгебраическую для $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, где сигнатура σ состоит из одной унарной функции $g(x)$, а $A = A_0 \cup A_1$ и g является 2-циклом на $A_0 = \{a_0^0, a_0^1\}$ и 3-циклом на $A_1 = \{a_1^0, a_1^1, a_1^2\}$. Очевидным образом внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$ суть внутренние гомоморфизмы ее подалгебр $\mathfrak{A}_0 = \langle A_0; \sigma \rangle$ и $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1; \sigma \rangle$ либо теоретико-множественные объединения таких гомоморфизмов, т. е. имеют вид φ_0, φ_1 , либо $\varphi_0 \cup \varphi_1$, где $\varphi_0(x) = g^{i_0}(x)$ для $x \in A_0$ и $i_0 \in \{0, 1\}$ и $\varphi_1(x) = g^{i_1}(x)$ для $x \in A_1$ и $i_1 \in \{0, 1, 2\}$. Функцию $f(x)$ на A определим следующим образом: $f(x) = g(x)$ на A_0 и $f(x) = g^2(x)$ на A_1 . Очевидно, что она коммутирует со всеми внутренними гомоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. квазиневявная для $\mathfrak{A}$. Заметим, что f не глобально алгебраическая для $\mathfrak{A}$, т. е. ее график $\text{Gr } f$ не является совокупностью решений в $\mathfrak{A}$ никакой системы термальных уравнений сигнатуры σ от переменных x_1, x_2 . Прежде всего, в силу определения алгебры $\mathfrak{A}$ любой σ -терм на $\mathfrak{A}$ эквивалентен одному из термов $g^m(x)$, где $m = 0, 1, \dots, 5$ и $g^0(x) = x$. Таким образом, термальные уравнения от x_1, x_2 на алгебре $\mathfrak{A}$ имеют вид: либо

$$(1) \quad g^{m_1}(x_i) = g^{m_2}(x_i), \text{ где } i = 1, 2 \text{ и } m_1, m_2 \in \{0, 1, \dots, 5\},$$

либо

$$(2) \quad g^{p_1}(x_1) = g^{p_2}(x_2), \text{ где } p_1, p_2 \in \{0, 1, \dots, 5\}.$$

Будем считать, что эти уравнения истинны на элементах $\langle x_1, x_2 \rangle$ множества $\text{Gr } f$. Истинность уравнений вида (1) на элементах a_0^0 и a_1^0 возможна лишь в случае истинности сравнений $m_0 \equiv m_2 \pmod{2}$ и $m_1 \equiv m_2 \pmod{3}$, последнее возможно лишь в случае $m_1 = m_2$, т. е. в случае тривиальности уравнений подобного вида. Истинность уравнения вида (2) на элементах $x_1 = a_0^0$ и $x_2 = f(a_0^0) = g(a_0^0)$ влечет истинность сравнения $p_1 = p_2 + 1$

(mod 2), а на элементах $x_1 = a_1^0$ и $x_2 = f(a_1^0) = g^2(a_1^0)$ — истинность сравнения $p_1 = p_2 + 2 \pmod{3}$. Поскольку одновременная истинность этих сравнений для $p_1, p_2 \in \{0, 1, \dots, 5\}$ невозможна, на элементах множества $\text{Gr } f$ выполнимы лишь тривиальные уравнения и его алгебраическое замыкание есть A^2 , т. е. множество $\text{Gr } f$ не алгебраическое, а функция $f(x)$ не глобально алгебраическая для алгебры $\mathfrak{A}$.

Покажем, что понятия алгебраической и квазииневявной функций для универсальных алгебр равносильны. Это непосредственно вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. *Множество $B \subseteq A^m$ обобщенно алгебраическое для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно внутренних гомоморфизмов этой алгебры (т. е. когда для любого кортежа $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \in B$ и любого $\varphi \in \text{Ihm } \mathfrak{A}$ в случае, когда $a_1, \dots, a_m \in \text{dom } \varphi$, имеет место и включение $\langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m) \rangle \in B$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $B \subseteq A^m$ является объединением $\bigcup_{i \in I} B_i$ алгебраических для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ множеств B_i , то, поскольку очевидным образом алгебраические множества B_i замкнуты относительно внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, таковым будет и множество B .

Обратно, пусть множество $B \subseteq A^m$ замкнуто относительно внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \in B$ и $D_{\langle a_1, \dots, a_m \rangle}^+(x_1, \dots, x_m)$ — позитивная диаграмма кортежа $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ в алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. совокупность всех термальных уравнений

$$t_j^1(x_1, \dots, x_m) = t_j^2(x_1, \dots, x_m) \quad (j \in J), \quad (*)$$

истинных на кортеже $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ в алгебре $\mathfrak{A}$. Таким образом, для любого кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle \in A^m$ истинность уравнений из $D_{\langle a_1, \dots, a_m \rangle}^+(x_1, \dots, x_m)$ на $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ равносильна существованию внутреннего гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ такого, что $\varphi(a_i) = b_i$ для $i = 1, \dots, m$. Тем самым алгебраическое для $\mathfrak{A}$ множество

$$B_{\langle a_1, \dots, a_m \rangle} = \{ \langle b_1, \dots, b_m \rangle \in A^m \mid \mathfrak{A} \models D_{\langle a_1, \dots, a_m \rangle}^+(b_1, \dots, b_m) \}$$

является подмножеством множества B , а так как $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \in B_{\langle a_1, \dots, a_m \rangle}$, то $B = \bigcup_{\langle a_1, \dots, a_m \rangle \in B} B_{\langle a_1, \dots, a_m \rangle}$, т. е. B является обобщенно алгебраическим для алгебры $\mathfrak{A}$ множеством, и лемма доказана.

Непосредственно из утверждения этой леммы и отмеченного выше факта, что любая алгебраическая для алгебры $\mathfrak{A}$ функция квазииневявная для этой алгебры, вытекает

Теорема 1. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ функция f алгебраическая для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она квазииневявная для $\mathfrak{A}$.*

Напомним, что алгебра $\mathfrak{A}$ называется (см. [3]) эквациональной областью тогда и только тогда, когда любое объединение конечного числа ее алгебраических множеств является алгебраическим множеством для алгебры $\mathfrak{A}$. Эквациональными областями являются, в частности, любые дискриминаторные алгебры. Другие многочисленные примеры эквациональных областей см., к примеру, в [3].

Таким образом, для конечных эквациональных областей понятия алгебраической и глобально алгебраической функции совпадают, и из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ глобально алгебраична для конечной эквивариантной области $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда f квазинеявна для $\mathfrak{A}$.

Для любого кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ элементов алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ кортеж ее элементов $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ назовем *Им $\mathfrak{A}$ -образом* кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$, если найдется $\varphi \in \text{Им } \mathfrak{A}$, область определения которого включает в себя $\{b_1, \dots, b_m\}$, и при этом $\varphi(b_i) = a_i$ для $i = 1, \dots, m$.

Пусть $\mathfrak{A}'$ — некоторое расширение алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$. Множество $B \subseteq A^m$ назовем *Им $\mathfrak{A}'$ -насыщенным в $\mathfrak{A}$ относительно кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$* элементов алгебры $\mathfrak{A}'$, если кортежи из B являются Им $\mathfrak{A}'$ -образами кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ и для любого Им $\mathfrak{A}'$ -образа кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$, состоящего из элементов алгебры $\mathfrak{A}$, этот Им $\mathfrak{A}'$ -образ входит в B , т. е. если $B = \{\langle a_1, \dots, a_m \rangle \in A^m \mid \langle a_1, \dots, a_m \rangle \text{ есть Им } \mathfrak{A}'\text{-образ кортежа } \langle b_1, \dots, b_m \rangle\}$.

Лемма 2. Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ множество $B \subseteq A^m$ алгебраическое для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда для некоторого расширения $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ и некоторого кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ элементов из $\mathfrak{A}'$ множество B является Им $\mathfrak{A}'$ -насыщенным в $\mathfrak{A}$ относительно этого кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ множество $B \subseteq A^m$ Им $\mathfrak{A}'$ -насыщено для некоторого расширения $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ и некоторого кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ элементов из $\mathfrak{A}'$. Тогда из соответствующих определений непосредственно следует, что

$$B = \{\langle a_1, \dots, a_m \rangle \in A^m \mid \mathfrak{A} \models D_{\langle b_1, \dots, b_m \rangle}^+(a_1, \dots, a_m)\},$$

т. е. B — алгебраическое множество для алгебры $\mathfrak{A}$.

Покажем обратное. Пусть $B \subseteq A^m$ — некоторое алгебраическое для алгебры $\mathfrak{A}$ множество и $B = \{\langle b_1^i, \dots, b_m^i \rangle \mid i \in I\}$. Пусть

$$T(x_1, \dots, x_m) = \bigcap_{i \in I} D_{\langle b_1^i, \dots, b_m^i \rangle}^+(x_1, \dots, x_m).$$

Алгебраичность множества B означает, что

$$B = \{\langle a_1, \dots, a_m \rangle \in A^m \mid \mathfrak{A} \models T(a_1, \dots, a_m)\}. \quad (**)$$

В качестве искомого расширения $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ подобно тому, как это делается в доказательстве теоремы 1 из [4], рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}^{A^m}$ (отождествляя элементы a алгебры $\mathfrak{A}$ с элементами $\bar{a}$ из $\mathfrak{A}^{A^m}$ такими, что $\bar{a}(j) = a$ для любого $j \in A^m$). Элементы $b_l \in \mathfrak{A}^{A^m}$ (для $l = 1, \dots, m$) определим так, что $\{\langle b_1(j), \dots, b_m(j) \rangle \mid j \in A^m\} = B$. Тогда $D_{\langle b_1, \dots, b_m \rangle}^+(x_1, \dots, x_m) = T(x_1, \dots, x_m)$. В частности, B состоит из Им $\mathfrak{A}'$ -образов кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ в алгебре $\mathfrak{A}$, а равенство $(**)$ означает Им $\mathfrak{A}'$ -насыщенность множества B в алгебре $\mathfrak{A}$ относительно кортежа $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$. Лемма доказана.

Обозначим совокупности алгебраических, глобально алгебраических и квазинеявных функций для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ через $\text{Algf } \mathfrak{A}$, $\text{GAlgf } \mathfrak{A}$ и $\text{QImpf } \mathfrak{A}$ соответственно. Через FunA обозначим совокупность всех функций на A . Имеют место следующие очевидные включения между этими совокупностями для любой алгебры $\mathfrak{A}$: $\text{GAlgf } \mathfrak{A} \subseteq \text{Algf } \mathfrak{A} = \text{Qimpf } \mathfrak{A} \subseteq \text{FunA}$.

Традиционный интерес представляет вопрос описания алгебр $\mathfrak{A}$, для которых перечисленные совокупности совпадают между собой.

Алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *алгебраически примальной* (аналог определения примальности для конечных алгебр с заменой клона термальных функций

алгебры $\mathfrak{A}$ совокупностью $\text{Algf } \mathfrak{A}$), если имеет место равенство $\text{Algf } \mathfrak{A} = \text{Fun } A$. Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *абсолютно жесткой*, если все ее внутренние гомоморфизмы тождественны.

Следствие 2. Алгебра $\mathfrak{A}$ алгебраически примальна тогда и только тогда, когда она абсолютно жестка.

Действительно, пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ — алгебраически примальная алгебра и φ — некоторый нетождественный внутренний гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. $\varphi(a) = b \neq a$ для некоторого $a \in A$. Но тогда алгебраическая по предположению константная на A функция $g(x) = a$ не коммутирует с φ . Это противоречие и доказывает тривиальности всех внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Верно и обратное: если все внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ тривиальны, то все функции на множестве A квазинеявны для $\mathfrak{A}$, а значит, в силу теоремы 1 они являются алгебраическими для алгебры $\mathfrak{A}$.

Также непосредственно из утверждения леммы 2 вытекает

Теорема 2. Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ следующие условия равносильны:

- (1) имеет место равенство $\text{GAlgf } \mathfrak{A} = \text{Algf } \mathfrak{A}$,
- (2) для любой алгебраической для алгебры $\mathfrak{A}$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ ее график является $\text{Ihm } \mathfrak{A}'$ -насыщенным в алгебре $\mathfrak{A}$ множеством относительно некоторого кортежа элементов из некоторого расширения $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Благодарность. Автор признателен рецензенту, указавшему на необходимость более тщательного, чем в первоначальном варианте статьи, определения ситуации коммутирования функции с частичным отображением и на то, что совокупность алгебраических, глобально алгебраических и квазинеявных функций на алгебре не обязаны быть клонами, а также за другие его замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eilenberg S., Schutzenberger M. P. On pseudovarieties // Adv. Math. 1979. V. 19, N 3. P. 413–418.
2. Пинус А. Г. Неявно эквивалентные универсальные алгебры // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1077–1090.
3. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
4. Пинус А. Г. n -Алгебраически полные алгебры, псевдопрямые произведения и оператор алгебраического замыкания на подмножествах универсальных алгебр // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 4. С. 97–102.

Поступила в редакцию 25 мая 2019 г.

После доработки 5 октября 2019 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
ag.pinus@gmail.com