V. G. Romanov, A generalized Gronwall–Bellman inequality, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 674–680

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.315>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 18.234.156.22
April 26, 2023, 16:43:05

УДК 517.91

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО ГРОНУОЛЛА — БЕЛЛМАНА

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается интегральное неравенство, в котором ядро представляет собой неотрицательный полином по степеням произведения разности аргументов и большого параметра N . Устанавливается неравенство, совпадающее по форме с известным неравенством Гронуолла — Беллмана, в котором аргумент экспоненты линейно зависит от N .

DOI 10.33048/smzh.2020.61.315

Ключевые слова: интегральное неравенство, лемма Гронуолла — Беллмана.

В теории дифференциальных уравнений часто встречается интегральное неравенство

$$u(x) \leq A + \alpha \int_0^x u(\xi) d\xi, \quad x \in [0, x_0], \quad x_0 > 0, \quad (1)$$

в котором A и α — некоторые неотрицательные постоянные, $u(x)$ — неотрицательная непрерывная на отрезке $[0, x_0]$ функция. Это неравенство часто возникает при оценке решений дифференциальных уравнений. Хорошо известна, так называемая лемма Гронуолла — Беллмана, которая дает оценку решения неравенства (1) (см. [1–3]).

Лемма Гронуолла — Беллмана. Для неотрицательной и непрерывной на $[0, x_0]$ функции $u(x)$, удовлетворяющей неравенству (1), имеет место оценка

$$u(x) \leq Ae^{\alpha x}, \quad x \in [0, x_0]. \quad (2)$$

Существуют многочисленные обобщения этой леммы. Пожалуй, наиболее общим является следующее утверждение, принадлежащее Х. Мовлянкулову и А. Н. Филатову (см. [4, теорема 1.4.1]).

Утверждение. Пусть непрерывная и неотрицательная на $[0, x_0]$ функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$u(x) \leq a(x) + b(x) \int_0^x k(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad x \in [0, x_0], \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075–15–2019–1613.

в котором $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$ и $k(x, \xi) \geq 0$ — непрерывные функции при $0 \leq \xi \leq x \leq x_0$. Тогда

$$u(x) \leq A(x) + \exp \left(B(x) \int_0^x K(x, \xi) d\xi \right), \quad x \in [0, x_0]. \quad (4)$$

В неравенстве (4)

$$A(x) = \sup_{0 \leq \xi \leq x} a(\xi), \quad B(x) = \sup_{0 \leq \xi \leq x} b(\xi), \quad K(x, \xi) = \sup_{\xi \leq \sigma \leq x} k(\sigma, \xi). \quad (5)$$

Между тем, при оценке сходимости N приближений решения некорректных задач встречаются интегральные неравенства, содержащие большой параметр N (см., например, [5]). Эти неравенства имеют вид

$$u(x) \leq A + N \int_0^x P_m(N(x - \xi))u(\xi) d\xi, \quad x \in [0, x_0], \quad x_0 > 0, \quad (6)$$

в котором $A \geq 0$, $u(x) \geq 0$ — непрерывная на $[0, x_0]$ функция и $P_m(z)$ — полином степени $m \geq 1$,

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k \frac{z^k}{k!}$$

с коэффициентами $a_k \geq 0$.

Параметр N может принимать сколь угодно большие значения. При этом актуальна оценка функции $u(x)$, в которую этот параметр N входит в экспоненту линейным образом. Насколько известно автору, в научной литературе подобного рода оценок нет. В частности, из приведенного выше утверждения, обобщающего лемму Гронуолла — Беллмана, следует оценка, в которой аргумент экспоненты зависит от N полиномиально.

Для неравенства (6) оказывается справедливой

Теорема 1. Если непрерывная и неотрицательная на $[0, x_0]$ функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству (6), то для нее справедлива оценка

$$u(x) \leq Ae^{\alpha x}, \quad x \in [0, x_0], \quad (7)$$

в которой

$$\alpha = N \max_{0 \leq k \leq m} (2^m a_k / C_m^k)^{1/(k+1)} s \quad (8)$$

и C_m^k — биномиальные коэффициенты $C_m^k = m! / (k!(m-k)!)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 0$ оценка (7) составляет суть неравенства Гронуолла — Беллмана. Поэтому в дальнейшем принимается, что $m \geq 1$. Из равенства (8) следует, что коэффициенты a_k удовлетворяют неравенствам

$$a_k N^{k+1} \leq 2^{-m} \alpha^{k+1} C_m^k, \quad k = \overline{0, m}.$$

Усиливая неравенство (6), приходим к неравенству

$$u(x) \leq A + \alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x - \xi))u(\xi) d\xi, \quad x \in [0, x_0], \quad (9)$$

в котором полином $Q_m(z)$ определен формулой

$$Q_m(z) = 2^{-m} \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{z^k}{k!}.$$

Возникает естественный вопрос: чем неравенство (9) удобнее неравенства (6)? Отвлечемся на время от доказательства теоремы, чтобы дать ответ на этот вопрос. Вместо неравенства (9) рассмотрим соответствующее ему равенство

$$y(x) = A + \alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x-\xi))y(\xi) d\xi, \quad x \in [0, x_0], \quad (10)$$

для неотрицательной непрерывной функции $y(x)$. Нетрудно установить, что эта функция является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} y^{(m+1)}(x) &= 2^{-m} \alpha \left(\frac{d}{dx} + \alpha \right)^m y(x), \quad x \in [0, x_0], \\ y(0) &= A, \quad y^{(k)}(0) = 2^{-m} A C_m^{k-1} \alpha^k, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (11)$$

Характеристический полином, соответствующий дифференциальному уравнению (11), имеет вид

$$\lambda^{m+1}(x) = 2^{-m} \alpha (\lambda + \alpha)^m. \quad (12)$$

Этот полином, очевидно, имеет вещественный корень $\lambda = \alpha$. Достаточно простой анализ показывает, что при m четном $\lambda = \alpha$ является единственным вещественным корнем характеристического уравнения, остальные корни, если $m > 1$, являются комплексно сопряженными. При m нечетном существует еще один вещественный корень, принадлежащий интервалу $(-\alpha, 0)$, остальные корни, если $m > 2$, также являются комплексно сопряженными. Чтобы оценить $y(x)$, надо найти (или по крайней мере оценить) все корни λ_s , $s = \overline{1, m+1}$, характеристического уравнения и затем выбрать линейную комбинацию $\sum_{s=1}^{m+1} c_s e^{\lambda_s x}$ так, чтобы удовлетворялись начальные данные в (11). Сделать это довольно сложно. Однако наличие у характеристического полинома действительного корня $\lambda = \alpha$ (по-видимому, имеющего наибольшую вещественную часть) позволяет сделать предположение, что $y(x) \leq A e^{\alpha x}$, которое эквивалентно утверждению теоремы 1. Конечно, это лишь гипотеза, требующая доказательства. Фактически это доказательство приведено ниже. Мы пояснили только, почему неравенство (9) предпочтительнее неравенства (6).

Продолжим доказательство теоремы. Из (9) следуют очевидные неравенства

$$\begin{aligned} u(x) &\leq y_0(x) = A, \\ u(x) &\leq y_n(x) = A + \alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x-\xi))y_{n-1}(\xi) d\xi, \quad n = 1, \dots, \quad x \in [0, x_0]. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем в рассмотрение разности

$$\tilde{y}_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из определения последовательности y_n вытекают равенства

$$\tilde{y}_n(x) = \alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x-\xi))\tilde{y}_{n-1}(\xi) d\xi, \quad n = 1, \dots, \quad x \in [0, x_0]. \quad (14)$$

Вычислим последовательно $\tilde{y}_1(x)$, $\tilde{y}_2(x)$, $\dots$, $\tilde{y}_n(x)$. Из формул (13) следует равенство

$$\tilde{y}_1(x) = A\alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x-\xi)) d\xi = 2^{-m} A \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{(\alpha x)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad x \in [0, x_0]. \quad (15)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(x) &= A\alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x-\xi)) \tilde{y}_1(\xi) d\xi \\ &= 2^{-2m} A \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^m C_m^k C_m^\ell \alpha^{k+\ell+2} \int_0^x \frac{(x-\xi)^k \xi^{\ell+1}}{k!(\ell+1)!} d\xi, \quad x \in [0, x_0]. \end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям, находим, что

$$\int_0^x \frac{(x-\xi)^k \xi^{\ell+1}}{k!(\ell+1)!} d\xi = \frac{x^{k+\ell+2}}{(k+\ell+2)!}, \quad k, \ell = 0, 1, \dots, m. \quad (16)$$

В силу этих равенств

$$\tilde{y}_2(x) = 2^{-2m} A \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^m C_m^k C_m^\ell \frac{(\alpha x)^{k+\ell+2}}{(k+\ell+2)!}, \quad x \in [0, x_0]. \quad (17)$$

Чтобы преобразовать двойную сумму, удобно доопределить совокупность чисел C_m^k на все положительные целочисленные значения k , положив

$$C_m^k = 0, \quad k > m.$$

Тогда равенство (17) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(x) &= 2^{-2m} A \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^\infty C_m^k C_m^\ell \frac{(\alpha x)^{k+\ell+2}}{(k+\ell+2)!} = 2^{-2m} A \sum_{s=0}^\infty \sum_{k=0}^s C_m^k C_m^{s-k} \frac{(\alpha x)^{s+2}}{(s+2)!} \\ &= 2^{-2m} A \sum_{s=0}^\infty C_{2m}^s \frac{(\alpha x)^{s+2}}{(s+2)!}, \quad x \in [0, x_0]. \end{aligned} \quad (18)$$

Выше была использована формула свертки Вандермонда:

$$C_{p+q}^s = \sum_{k=0}^s C_p^k C_q^{s-k}, \quad (19)$$

справедливая для любых целых неотрицательных p, q и s .

Продолжая процесс вычислений, приходим к формуле

$$\tilde{y}_n(x) = 2^{-mn} A \sum_{s=0}^\infty C_{mn}^s \frac{(\alpha x)^{s+n}}{(s+n)!}, \quad n \geq 1, \quad x \in [0, x_0]. \quad (20)$$

Формула (20) уже установлена для $n = 1$ и $n = 2$ и легко обосновывается для любых n методом математической индукции. Действительно, если примем, что

она верна для $n = r - 1$, $r \geq 3$, то в результате вычислений получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_r(x) &= A\alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x-\xi))\tilde{y}_{r-1}(\xi) d\xi \\ &= 2^{-mr} A \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^{\infty} C_m^k C_{m(r-1)}^{\ell} \alpha^{k+\ell+r} \int_0^x \frac{(x-\xi)^k \xi^{\ell+r-1}}{k!(\ell+r-1)!} d\xi \\ &= 2^{-mr} A \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^{\infty} C_m^k C_{m(r-1)}^{\ell} \frac{(\alpha x)^{k+\ell+r}}{(k+\ell+r)!} = 2^{-mr} A \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^s C_m^k C_{m(r-1)}^{s-k} \frac{(\alpha x)^{s+r}}{(s+r)!} \\ &= 2^{-mr} A \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{mr}^s \frac{(\alpha x)^{s+r}}{(s+r)!}, \quad x \in [0, x_0].\end{aligned}$$

В промежуточных выкладках использованы равенство (16) и формула (19) при $p = m$ и $q = m(r-1)$.

Таким образом, из предположения, что формула (20) верна для $n = r - 1$, следует, что она верна и для $n = r$. Это оправдывает справедливость формулы (20) для любых n .

Рассмотрим ряд

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{y}_n(x), \quad x \in [0, x_0]. \quad (21)$$

Подставляя в него вместо $\tilde{y}_n(x)$ правую часть формулы (20), приходим к степенному ряду

$$\begin{aligned}A + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{y}_n(x) &= A + A \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-mn} C_{mn}^{\ell} \frac{(\alpha x)^{\ell+n}}{(\ell+n)!} \\ &= A \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^s}{s!} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-mn} C_{mn}^{s-n} = A \sum_{s=0}^{\infty} d_s \frac{(\alpha x)^s}{s!}, \quad x \in [0, x_0], \quad (22)\end{aligned}$$

в котором коэффициенты d_s вычисляются по формуле

$$d_0 = 1; \quad d_s = \sum_{n=1}^s 2^{-mn} C_{mn}^{s-n}, \quad s \geq 1. \quad (23)$$

Так как $2^{-mn} C_{mn}^{s-n} < 1$ для $n \geq 1$, из формулы (23) следует (очень грубая) оценка $d_s < s$ для $s \geq 1$. Эта оценка тем не менее означает, что степенной ряд (22) равномерно сходится на отрезке $[0, x_0]$. Его сумма, очевидно, совпадает с предельной функцией последовательности $y_n(x)$, т. е. с функцией $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$, которая, в свою очередь, совпадает с решением интегрального уравнения (10), а значит, и с решением задачи Коши (11).

Ниже доказываем, что при любом $m \geq 1$ справедливы соотношения

$$d_s < 1, \quad s \geq 1. \quad (24)$$

Использовать для доказательства этого факта формулу (23) довольно затруднительно и мы предпочтем здесь иной путь. Воспользуемся тем, что функция $y(x)$ является решением уравнения (10). Следовательно,

$$y(x) = A + A\alpha \int_0^x Q_m(\alpha(x-\xi)) \sum_{\ell=0}^{\infty} d_{\ell} \frac{(\alpha x)^{\ell}}{\ell!}$$

$$\begin{aligned}
&= A + 2^{-m} A \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m C_m^k \alpha^{\ell+k+1} d_{\ell} \int_0^x \frac{(x-\xi)^k \xi^{\ell}}{k! \ell!} d\xi \\
&= A + 2^{-m} A \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m C_m^k d_{\ell} \frac{(\alpha x)^{\ell+k+1}}{(\ell+k+1)!} \\
&= A + 2^{-m} A \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^{s+1}}{(s+1)!} \sum_{k=0}^s C_m^k d_{s-k}, \quad x \in [0, x_0].
\end{aligned}$$

Из этого равенства получаем рекуррентную формулу

$$d_{s+1} = 2^{-m} \sum_{k=0}^s C_m^k d_{s-k}, \quad s \geq 0; \quad d_0 = 1, \quad (25)$$

из которой и вытекают неравенства (24). В самом деле, при $s = 0$ находим, что $d_1 = 2^{-m} d_0 < 1$. Предположим теперь, что неравенства (24) выполнены для $s = \overline{1, r}$, $r \geq 2$. Тогда

$$d_{r+1} = 2^{-m} \sum_{k=0}^r C_m^k d_{r-k} < 2^{-m} \sum_{k=0}^r C_m^k \leq 1.$$

Таким образом, методом математической индукции установлено, что неравенства (24) верны при любом $s \geq 1$. Отсюда следует, что справедливо неравенство

$$u(x) \leq y(x) = A \sum_{s=0}^{\infty} d_s \frac{(\alpha x)^s}{s!} \leq A \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^s}{s!} = A e^{\alpha x}, \quad x \in [0, x_0],$$

из которого и вытекает утверждение теоремы 1. $\square$

То обстоятельство, что все d_s , $s \geq 1$, строго меньше 1, говорит о том, что оценка (7) не является оптимальной для неравенства (9). Ее можно улучшить, если найти точное решение задачи (11). В некоторых случаях это удастся сделать (например, при $m = 1$ и $m = 2$). Чтобы не усложнять изложения, рассмотрим случай $m = 1$. Для этого случая верна

Теорема 2. Если непрерывная и неотрицательная на $[0, x_0]$ функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству (9) с $m = 1$, то

$$u(x) \leq A \left(\frac{2}{3} e^{\alpha x} + \frac{1}{3} e^{-\alpha x/2} \right), \quad x \in [0, x_0]. \quad (26)$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что при $m = 1$ решение задачи (11) имеет вид

$$y(x) = A \left(\frac{2}{3} e^{\alpha x} + \frac{1}{3} e^{-\alpha x/2} \right), \quad x \in [0, x_0].$$

Отсюда следует оценка (26). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
4. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
5. Романов В. Г. Регуляризация задачи Коши с данными на времени-подобной плоскости // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 879–890.

Поступила в редакцию 5 марта 2020 г.

После доработки 5 марта 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`romanov@math.nsc.ru`