N. S. Romanovskii, E. I. Timoshenko, Elementary equivalence and direct product decompositions of partially commutative groups of varieties, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 681–686

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.316>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.173.137.237

April 26, 2023, 17:17:55

УДК 512.5

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ
И ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ЧАСТИЧНО
КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП МНОГООБРАЗИЙ
Н. С. Романовский, Е. И. Тимошенко

Аннотация. Для частично коммутативных групп многообразий, содержащих многообразие всех 2-ступенно нильпотентных групп, исследуются вопросы сокращения множителей из прямого произведения, совпадения элементарных теорий, характеристики группы своей элементарной теорией, возможности разложения в прямое произведение.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.316

Ключевые слова: частично коммутативная группа, нильпотентная группа, разрешимая группа, элементарная теория.

К 80-летию академика Юрия Леонидовича Ершова

1. Введение

Напомним, что *элементарной теорией* группы G называется множество $\text{Th}(G)$ всех предложений языка первого порядка стандартной групповой сигнатуры, истинных на G . Группы G и H называются *элементарно эквивалентными*, если $\text{Th}(G) = \text{Th}(H)$.

Приведем лишь два из множества результатов, касающихся элементарных теорий групп. В. Шмелева [1] в 1955 г. нашла необходимые и достаточные условия для элементарной эквивалентности абелевых групп. В середине прошлого века А. Тарский сформулировал несколько вопросов относительно элементарной теории свободной группы. В частности, он спрашивал, верно ли, что свободные неабелевы группы различных рангов элементарно эквивалентны. Положительный ответ дали А. Г. Мясников и О. Г. Харлампович [2], а также независимо Села [3].

Иногда группа G почти однозначно характеризуется своей элементарной теорией. Так, авторами [4] доказано

Предложение 1. Пусть элементарная теория n -порожденной группы G совпадает с элементарной теорией свободной разрешимой группы $F_{r,m}$ ранга r и ступени разрешимости m . Тогда при $m = 2$ и любом конечном r или при $m > 2$, $n = r$, группы G и $F_{r,m}$ изоморфны.

В работе будут рассматриваться частично коммутативные группы некоторых многообразий групп. Напомним соответствующие определения. Пусть

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075–15–2019–1613.

$\mathfrak{M}$ — многообразие групп, F — его свободная группа с базой $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, Γ — конечный граф (всегда предполагаем, что он неориентированный, без петель и кратных ребер), множество вершин которого совпадает с X . Пусть R — нормальная подгруппа из F , порожденная теми коммутаторами $[x_i, x_j]$, для которых вершины x_i и x_j смежны, т. е. соединены в графе ребром. Фактор-группа F/R , обозначаемая в дальнейшем через $F(\Gamma, \mathfrak{M})$, называется *частично коммутативной группой многообразия $\mathfrak{M}$ с определяющим графом Γ* .

Наряду с частично коммутативными группами изучались частично коммутативные кольца и алгебры. В [5] установлено, что две частично коммутативные ассоциативные алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их определяющие графы. Опираясь на это, Дромс [6] доказал аналогичный результат для частично коммутативных групп в многообразии всех групп. Пусть $\mathfrak{N}_k$ обозначает многообразие нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше k . В ходе своего доказательства Дромс получил

Предложение 2. Пусть многообразие групп $\mathfrak{M}$ содержит многообразие $\mathfrak{N}_2$. Группы $F(\Gamma, \mathfrak{M})$ и $F(\Delta, \mathfrak{M})$ изоморфны в том и только том случае, когда изоморфны графы Γ и Δ .

В [7] доказано, что из совпадения элементарных теорий двух частично коммутативных метабелевых групп следует изоморфизм определяющих графов. При доказательстве этого результата было установлено

Предложение 3. Две частично коммутативные группы многообразия $\mathfrak{N}_2$ имеют одинаковые элементарные теории тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Изучая вопрос о классификации нильпотентных групп по элементарным свойствам, Оджер [8] доказал важное для применений

Предложение 4. Пусть G и H — конечно порожденные группы, причем каждая является расширением конечной группы с помощью нильпотентной, J — бесконечная циклическая группа. Элементарные теории групп G и H совпадают тогда и только тогда, когда $G \times J \cong H \times J$.

Допустим, что в условиях предложения 4 для групп G и H некоторого класса из изоморфизма $G \times J \cong H \times J$ следует изоморфизм $G \cong H$, т. е. в формуле $G \times J \cong H \times J$ группа J сокращается. Тогда группа G в соответствующем классе групп однозначно характеризуется своей элементарной теорией. Отдельно вопросы сокращения прямых произведений изучались Хирсоном (см., например, [9]).

Для частично коммутативных групп многообразий исследуем вопросы совпадения элементарных теорий, характеристики группы своей элементарной теорией, возможности разложения в прямое произведение. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие групп, содержащее $\mathfrak{N}_2$. Предположим, что группа $G = F(\Gamma, \mathfrak{M})$ разлагается в прямое произведение $H \times A$, где A — абелева группа. Тогда $H \cong F(\Delta, \mathfrak{M})$, где Δ — подграф графа Γ , порожденный некоторым множеством вершин, содержащим $X \setminus X^\perp$, здесь $X^\perp$ обозначает множество вершин, соединенных в графе ребрами со всеми другими вершинами.

Теорема 2. Пусть многообразие нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ содержит $\mathfrak{N}_2$ и $G = F(\Gamma, \mathfrak{N})$. Тогда если конечно порожденная группа H имеет ту же элементарную теорию, что и G , то $G \cong H$.

Из теоремы 2 и предложения 2 вытекает

Следствие. Пусть многообразие нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ содержит $\mathfrak{N}_2$, $G = F(\Gamma, \mathfrak{N})$, $H = F(\Delta, \mathfrak{N})$. Группы G и H имеют одинаковые элементарные теории тогда и только тогда, когда $\Gamma \cong \Delta$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие разрешимых групп, содержащее $\mathfrak{N}_2$. Если граф Γ несвязен, то группа $G = F(\Gamma, \mathfrak{M})$ не разложима в прямое произведение.

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. (1) Пусть группа G порождается множеством $\{x_i \mid i \in I\}$, $c_i \in G' \cap \mathcal{Z}(G)$, где $\mathcal{Z}(G)$ — центр группы G , G' — коммутант. Тогда G порождается множеством $\{x_i c_i \mid i \in I\}$.

(2) Пусть в условиях предыдущего утверждения G/G' является свободной абелевой группой с базой $\{x_i G' \mid i \in I\}$. Тогда отображение $x_i \mapsto x_i c_i$ ($i \in I$) определяет автоморфизм группы G .

Доказательство. Утверждение (1) следует из того, что коммутант группы, порожденной множеством $\{x_i c_i \mid i \in I\}$, совпадает с G' , поскольку как нормальная подгруппа порождается коммутаторами $[x_i c_i, x_j c_j] = [x_i, x_j]$, $i, j \in I$.

Докажем (2). Пусть $F = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ — свободная группа, $v(y_1, \dots, y_n) \in F$. Если в группе G будет $v(x_1, \dots, x_n) = 1$ или $v(x_1 c_1, \dots, x_n c_n) = 1$, то $v \in F'$. Но для $v \in F'$ значения $v(x_1, \dots, x_n)$ и $v(x_1 c_1, \dots, x_n c_n)$ всегда совпадают. Поэтому

$$v(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow v(x_1 c_1, \dots, x_n c_n) = 1.$$

Лемма доказана.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть $X^\perp = \{x_1, \dots, x_m\}$. Группа G/G' является свободной абелевой группой с базой $\{a_1 = x_1 G', \dots, a_n = x_n G'\}$. Пусть $a \in A$ и $a \equiv x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \pmod{G'}$. При $i > m$ найдется вершина x_j ($j > m$), не смежная с x_i . Допустим, что $\alpha_i \neq 0$. Тогда в группе $F(\Gamma, \mathfrak{N}_2)$, которая является гомоморфным образом G , выполнено неравенство $[x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, x_j] \neq 1$. Это противоречит перестановочности элементов a и x_j в группе G . Поэтому $A \leq \langle x_1, \dots, x_m \rangle G'$, так что при гомоморфизме $G \rightarrow G/G' = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ группа A вкладывается в подгруппу $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и выделяется в ней прямым множителем. Отметим, что в графе Γ множество вершин $X^\perp = \{x_1, \dots, x_m\}$ можно заменить любым другим множеством, составляющим базу свободной абелевой группы $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$, получим изоморфный граф. Поэтому без ограничений общности можно предполагать, что $A = \langle x_1 c_1, \dots, x_k c_k \rangle$, где $k \leq m$, и $c_i \in G' \cap \mathcal{Z}(G)$. По лемме 1 отображение

$$x_1 \rightarrow x_1 c_1, \dots, x_k \rightarrow x_k c_k, x_{k+1} \rightarrow x_{k+1}, \dots, x_n \rightarrow x_n$$

определяет некоторый автоморфизм группы G . На основании этого можно утверждать, что

$$H \cong G/A \cong \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle.$$

Последняя группа имеет искомый вид $F(\Delta, \mathfrak{M})$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие групп. Каждому конечному графу Γ поставим в соответствие частично коммутативную группу $F(\Gamma, \mathfrak{M})$. Назовем многообразие $\mathfrak{M}$ *точным*, если соответствие между графами и частично коммутативными группами этого многообразия взаимно однозначно, т. е. $F(\Gamma, \mathfrak{M}) \cong F(\Delta, \mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \cong \Delta$.

Предложение 2 означает, что любое многообразие групп, содержащее многообразие $\mathfrak{N}_2$, точное.

Пусть конечные графы Γ и Δ заданы на непересекающихся множествах вершин, $G = F(\Gamma, \mathfrak{M})$, $H = F(\Delta, \mathfrak{M})$. Очевидно, что прямое произведение $G \times H$ снова частично коммутативная группа того же многообразия $\mathfrak{M}$. Ее определяющим графом является граф, который называется *соединением графов* Γ и Δ (все вершины одного графа соединяются ребрами со всеми вершинами другого графа) и обозначается через $\Gamma + \Delta$.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — точное многообразие групп. Тогда для любых конечных графов A, B, D выполнено

$$F(A, \mathfrak{M}) \times F(B, \mathfrak{M}) \cong F(A, \mathfrak{M}) \times F(D, \mathfrak{M}) \Leftrightarrow B \cong D.$$

Доказательство состоит в проверке следующего свойства соединения графов. Предположим, что граф Γ можно двумя способами представить в виде соединения $\Gamma = A + B = C + D$ попарно не пересекающихся графов A и B , а также C и D . Тогда если $A \cong C$, то $B \cong D$.

Как обычно, $\overline{\Delta}$ обозначает дополнение графа Δ . Легко проверить, что соединение $\overline{\Delta_1} + \overline{\Delta_2}$ графов на непересекающихся вершинах можно записать в виде $\overline{\Delta_1 \sqcup \Delta_2}$. Очевидно, что графы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения. Поэтому достаточно установить следующее: если граф Δ представлен в виде дизъюнктного объединения $\Delta = X \sqcup Y = U \sqcup V$ и $X \cong U$, то $Y \cong V$.

Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — множество всех компонент связности графа Δ . Тогда

$$X = \Delta_{i_1} \sqcup \dots \sqcup \Delta_{i_m}, \quad Y = \Delta_{i_{m+1}} \sqcup \dots \sqcup \Delta_{i_n}.$$

Аналогичные разложения можно найти для графов U и V . По условию $X \cong U$. Значит, количество компонент связности в разложениях X и U одинаково и компоненты связности в разложении X изоморфны соответствующим компонентам связности в разложении U . Очевидно, что тогда соответствующие компоненты связности в разложении Y и V также изоморфны. Лемма доказана.

Докажем теорему 2. В ее условиях группа H должна быть нильпотентной. Тогда по предложению 4 $G \times A \cong H \times A$, где A — бесконечная циклическая группа. Группа $G \times A$ является частично коммутативной группой в многообразии $\mathfrak{N}$. Она также разлагается в прямое произведение $H \times A$. Тогда по теореме 1 H имеет вид $F(\Delta, \mathfrak{N})$. По предложению 2 многообразие $\mathfrak{N}$ точное. Из леммы 2 следует, что $\Gamma \cong \Delta$ и тогда $G \cong H$. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Лемма 3. Пусть группа G является двуступенно нильпотентным произведением нетривиальных свободных абелевых групп $A = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и $B = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$. Тогда центр $\mathcal{Z}(G)$ совпадает с G' , а централизатор элемента $g \in$

$G \setminus G'$ равен AG' , если $g \in AG'$, или BG' , если $g \in BG'$, либо по модулю G' является циклическим. В частности, во всех случаях $C_G(g)$ будет абелевой группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко понять, что G' — свободная абелева группа с базой $\{[a_i, b_j] \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Без ограничения общности можно предполагать, что для элемента $g \in G \setminus G'$, централизатор которого рассматриваем, имеется сравнение $g \equiv a_1^\alpha b_1^\beta$, где $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}$. Пусть $h \in C_G(g)$ и $h \equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m} b_1^{\beta_1} \dots b_n^{\beta_n} \pmod{G'}$. Из условия $[g, h] = 1$ и вида базы G' получаем следующее. При $\beta = 0$ все $\beta_1, \dots, \beta_n$ также равны нулю и $C_G(g) = AG'$. При $\beta \neq 0$ все $\alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_2, \dots, \beta_n$ равны нулю, а строки (α, β) и (α_1, β_1) коллинеарны. Пусть d — наибольший общий делитель чисел α, β и $\alpha' = \alpha/d, \beta' = \beta/d$. В этом случае $C_G(g)$ по модулю G' порождается элементом $a_1^{\alpha'} b_1^{\beta'}$. Так как $C_g(a_1) \cap C_g(b_1) = G'$, то $\mathcal{Z}(G) = 1$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы 3. Допустим противное, т. е. имеется нетривиальное разложение $G = A \times B$. Так как группы A, B разрешимы, фактор-группы $A/\gamma_3(A), B/\gamma_3(B)$ нетривиальны. Заменой G на $G/\gamma_3(G) = A/\gamma_3(A) \times B/\gamma_3(B)$ задача сводится к случаю $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_2$. Видим, что в этом случае G представляется в виде произведения подгрупп AG' и BG' , причем $[AG', BG'] = 1$. Понятно, что теорема вытекает из следующего утверждения, которое и докажем.

Лемма 4. Пусть Γ — несвязный граф. Тогда группу $G = F(\Gamma, \mathfrak{N}_2)$ нельзя представить в виде произведения AB подгрупп A и B , где $A > G', B > G'$ и $[A, B] = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т. е. предположим, что указанное представление имеется. Возьмем разбиение графа Γ на связные компоненты $\Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_n$, по условию $n \geq 2$. Пусть $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, где Δ_1 — полный граф, построенный на вершинах Γ_1 , а Δ_2 — полный граф, построенный на вершинах $\Gamma_2 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_n$. Группа $F(\Delta, \mathfrak{N}_2)$ изоморфна фактор-группе G по нормальной подгруппе, содержащейся в G' , и можно утверждать, что образы A и B в $F(\Delta, \mathfrak{N}_2)$ удовлетворяют условию леммы. Это сводит рассмотрение к случаю, когда $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$, где Γ_1, Γ_2 — нетривиальные полные графы. В этом случае группа G является 2-ступенно нильпотентным произведением двух свободных абелевых групп конечного ранга. Если группа A оказалась абелевой, то она содержится в $\mathcal{Z}(G)$, а по лемме 3 $\mathcal{Z}(G) = G' < A$; противоречие. Поэтому A — неабелева группа. Пусть $b \in B \setminus G'$. Тогда $C_G(b)$ содержит A и, следовательно, неабелев. Опять получили противоречие с леммой 3. Лемма 4, а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

В заключение сформулируем

Вопрос. Предположим, что многообразие $\mathfrak{M}$ содержит $\mathfrak{N}_2$. Верно ли, что группа $F(\Gamma, \mathfrak{M})$ имеет нетривиальное прямое разложение $F(\Gamma, \mathfrak{M}) = G \times H$ тогда и только тогда, когда G и H — частично коммутативные группы многообразия $\mathfrak{M}$?

ЛИТЕРАТУРА

1. Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups // Fund. Math. 1955. V. 41, N 2. P. 203–271.
2. Kharlampovich O., Myasnikov A. Elementary theory of free non-abelian groups // J. Algebra. 1980. V. 17. P. 451–552.

3. Sela Z. Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of free group // Geom. Funct. Anal. 2006. V. 16, N 3. P. 707–730.
4. Романовский Н. С., Тимошенко Е. И. О некоторых элементарных свойствах 2-ступенно разрешимых групп // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 438–443.
5. Kim K. H., Makar-Limanov L., Neggers J., Roush F. W. Graph algebras // J. Algebra. 1980. V. 64. P. 46–51.
6. Droms C. Isomorphisms of graph groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 100. P. 407–408.
7. Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И. Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 3. С. 309–341.
8. Oger F. Cancellation and elementary equivalence of finitely generated finite-by-nilpotent groups // J. London Math. Soc. (2). 1991. V. 44. P. 173–183.
9. Hirshon R. Some cancellation theorems with application to nilpotent groups // J. Austral Math. Soc. 1977. V. 23 (Ser. A). P. 147–165.

Поступила в редакцию 1 января 2020 г.

После доработки 31 марта 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Романовский Николай Семёнович
Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644043
`rmnvski@math.nsc.ru`

Тимошенко Евгений Иосифович
Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644043;
Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630073
`eitim45@gmail.com`