S. V. Skresanov, Group topologies on the integers and s -unit equations, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 687–691

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.317>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 18:15:29

УДК 512.546.2+511.52

ГРУППОВЫЕ ТОПОЛОГИИ НА ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ И УРАВНЕНИЯ В S -ЕДИНИЦАХ

С. В. Скresанов

Аннотация. Последовательность целых чисел называется T -последовательностью, если существует такая хаусдорфова групповая топология на целых числах, в которой данная последовательность сходится к нулю. Для каждого конечного множества простых чисел S построена такая хаусдорфова групповая топология на целых числах, в которой всякая возрастающая последовательность, члены которой делятся только на простые числа из S , сходится к нулю. Дан положительный ответ на вопрос о T -последовательностях, поставленный И. В. Протасовым и Е. Г. Зелеником. Полученные результаты используют нетривиальный теоретико-числовой факт об уравнениях в S -единицах.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.317

Ключевые слова: топологическая группа, T -последовательность, S -единица, диофантово уравнение.

1. Введение

В [1] Е. Г. Зеленик и И. В. Протасов ввели понятие T -последовательности: последовательность целых чисел $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется T -последовательностью, если существует хаусдорфова групповая топология на $\mathbb{Z}$, в которой $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к 0. Этот новый инструмент оказался полезным при конструировании топологических групп с необходимыми свойствами и также, как выяснилось, тесно связан с теорией чисел. Например, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \alpha$, где α трансцендентно, то $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — T -последовательность (см. [1, теоремы 10, 11]). Некоторые рекуррентные последовательности являются T -последовательностями, например последовательность Фибоначчи (см. [1, теорема 14, следствие теоремы 14]). Также известно, что всякая T -последовательность имеет нулевую плотность [1, лемма 6].

В данной статье рассматривается вопрос, поставленный И. В. Протасовым и Е. Г. Зелеником в [2, вопрос 1] (см. также [3, вопрос 15.79]): является ли $\{2^n + 3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ T -последовательностью?

Эта последовательность не удовлетворяет достаточным условиям, упомянутым выше, и имеет нулевую плотность. Заметим, что $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — T -последовательности, так как они сходятся к 0 в 2-адической и 3-адической топологиях соответственно, но очевидно, что никакая p -адическая топология не подходит для $\{2^n + 3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РФ, проект 0314-2019-0001.

Несмотря на эти препятствия, мы даем положительный ответ на этот вопрос. Более того, удается доказать, что класс Т-последовательностей достаточно большой. Например, сумма нескольких растущих геометрических прогрессий, в частности $\{2^n + 3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, всегда будет Т-последовательностью (см. следствие ниже).

Введем несколько определений. Пусть S — конечное множество простых чисел. Целое число будем называть S -целым, если оно делится только на простые числа из S . Если τ и σ — две топологии и $\tau \subseteq \sigma$, то будем говорить, что σ сильнее τ . Если $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — Т-последовательность, то существует самая сильная хаусдорфова групповая топология на $\mathbb{Z}$, в которой $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю. Обозначим через $\mathbb{Z}\{s_n\}$ группу $\mathbb{Z}$, снабженную этой топологией (подробности см. в [1]).

Теорема 1. Пусть S — непустое конечное множество простых чисел. Существует Т-последовательность S -целых чисел $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что любая последовательность S -целых чисел $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n| = \infty$, сходится к 0 в $\mathbb{Z}\{s_n\}$.

Отметим, что топология на $\mathbb{Z}\{s_n\}$ обладает интересными свойствами, в частности, она полна и неметризуема (см. [1, теорема 8, следствие теоремы 6]).

Теорема 1 имеет дело с последовательностями с ограничением на простые делители членов (простые делители должны лежать в заданном конечном множестве). Заметим, что этот результат невозможно обобщить на последовательности, в которых каждый член имеет равномерно ограниченное количество различных простых делителей. Действительно, последовательность простых чисел $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ не является Т-последовательностью, так как существует бесконечно много решений уравнения $p_{n+1} - p_n = M$, где $M \leq 600$ (см. [4] и лемму 2 ниже).

Положительный ответ на вопрос И. В. Протасова и Е. Г. Зеленюка дает следующее приложение теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $d_i, a_i, i = 1, \dots, k$, — произвольные целые числа. Если $a_i \neq \pm 1$ для всех $i = 1, \dots, k$, то $\{d_1 a_1^n + \dots + d_k a_k^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — Т-последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что все $a_i, i = 1, \dots, k$, не равны нулю. Пусть S — множество всех простых делителей произведения $a_1 \dots a_k$. Ясно, что $a_i^n, i = 1, \dots, k$, являются S -целыми числами для всех n , причем $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_i^n| = \infty, i = 1, \dots, k$. Ввиду теоремы 1 существует хаусдорфова групповая топология на $\mathbb{Z}$, в которой все последовательности вида $\{a_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходятся к нулю. Так как любая целочисленная линейная комбинация последовательностей, сходящихся к нулю, тоже сходится к нулю, требуемое утверждение доказано. $\square$

Ясно, что достаточное условие $a_i \neq \pm 1$ в формулировке следствия 1 существенно, так как последовательность $\{1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ не может сходиться к 0 ни в одной хаусдорфовой топологии. В случае суммы двух геометрических прогрессий это условие является и необходимым, и достаточным.

Следствие 2. Пусть a_1, a_2 — произвольные целые числа. Последовательность $\{a_1^n + a_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является Т-последовательностью тогда и только тогда, когда a_1 и a_2 не равны ± 1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1 осталось доказать необходимость. Пусть $s_n = a_1^n + a_2^n$ — Т-последовательность, и допустим, что $a_1 = \pm 1$ или

$a_2 = \pm 1$. Тогда $s'_n = s_{2n}$ тоже Т-последовательность и s'_n имеет вид $1 + q^n$ для некоторого целого q . Имеем $s'_{n+1} - q \cdot s'_n = 1 - q$. Переходя к пределу по n в этом равенстве, получаем, что $q = 1$. Значит $s'_n = 2$, что противоречит тому, что s'_n — Т-последовательность. $\square$

Отметим, что следствие 2 дает исчерпывающий ответ на вопрос 2.2.2 в [5].

Доказательство основного результата опирается на так называемые *уравнения в S-единицах*, являющиеся, по существу, диофантовыми уравнениями. Стоит упомянуть, что ранее уравнения в S-единицах были применены к Т-последовательностям Хигасикавой в [6], где было показано, что некоторые свойства топологических групп не сохраняются при взятии произведений.

2. Доказательство основного результата

Пусть S — конечное множество простых чисел. Рациональное число называется *S-единицей*, если оно принадлежит мультипликативной группе, порожденной $S \cup \{-1\}$. Множество всех S-единиц обозначается через U_S . Отметим, что S-целые числа являются S-единицами.

Пусть $c_i, i = 1, \dots, k$, и M — ненулевые целые числа. Будем говорить, что решение $(x_1, \dots, x_k)$ уравнения

$$c_1x_1 + \dots + c_kx_k = M \quad (1)$$

невырожденно, если $\sum_{i \in I} c_ix_i \neq 0$ для всех непустых $I \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Предложение 1 [7, следствие 6.1.2]. Пусть S — конечное множество простых чисел. Уравнение (1) имеет лишь конечное число невырожденных решений в S-единицах.

Легко видеть, что у такого уравнения может быть бесконечное число вырожденных решений. Например, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ имеет бесконечно много решений вида $(x, -x, 1)$. Тем не менее некоторое условие конечности выполняется для любых решений уравнения (1).

Лемма 1. Пусть S — конечное множество простых чисел. Если дано уравнение (1), то существуют конечные множества $V_i, i = 1, \dots, k$, такие, что для любого решения $(x_1, \dots, x_k) \in (U_S)^k$ этого уравнения найдется $i \in \{1, \dots, k\}$, для которого $x_i \in V_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для непустого подмножества $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ и $i \in I$ определим

$$V(I, i) = \left\{ x_i \mid \{x_j\}_{j \in I} \subseteq U_S \text{ — невырожденное решение уравнения } \sum_{j \in I} c_jx_j = M \right\}.$$

По предложению 1 существует лишь конечное число невырожденных решений уравнения $\sum_{j \in I} c_jx_j = M$ в S-единицах, следовательно, множества $V(I, i)$ конечны для всех $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ и $i \in I$.

Положим $V_i = \bigcup_{i \in I \subseteq \{1, \dots, k\}} V(I, i)$. Очевидно, что все множества V_i конечны.

Пусть $(x_1, \dots, x_k) \in (U_S)^k$ — решение уравнения (1). Рассмотрим J — наибольшее подмножество в $\{1, \dots, k\}$ со свойством $\sum_{j \in J} c_jx_j = 0$. Ясно, что J является собственным подмножеством (так как $M \neq 0$) и, значит, $I = \{1, \dots, k\} \setminus J$

непусто. Из максимальнойности J следует, что $\{x_j\}_{j \in I}$ — невырожденное решение уравнения $\sum_{j \in I} c_j x_j = M$. Выберем любой индекс $i \in I$. Тогда $x_i \in V(I, i)$ и $x_i \in V_i$, как и требовалось. $\square$

Имеется связь между Т-последовательностями и уравнениями в целых числах.

Лемма 2. Последовательность целых чисел $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является Т-последовательностью тогда и только тогда, когда для любых целых чисел $c_1, \dots, c_k$ и любого ненулевого целого числа M существует число m такое, что

$$c_1 s_{m_1} + \dots + c_k s_{m_k} \neq M$$

для всех $m_1, \dots, m_k$, где $m < m_1 < \dots < m_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [1, теорема 2] (см. также § 3 в [1]). $\square$

Следующая лемма показывает, что бесконечно большие последовательности S -целых чисел являются Т-последовательностями.

Лемма 3. Пусть S — конечное множество простых чисел и $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность S -целых чисел. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \infty$, то $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является Т-последовательностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ не Т-последовательность. По лемме 2 существуют целые числа $c_1, \dots, c_k$ (которые можно считать ненулевыми) и ненулевое целое число M такие, что для всех m равенство

$$c_1 s_{m_1} + \dots + c_k s_{m_k} = M$$

выполнено при каких-то $m_1, \dots, m_k$, где $m < m_1 < \dots < m_k$. Далее будем считать, что при фиксированном m соответствующие числа $m_1, \dots, m_k$ тоже известны. Выбор m_i зависит от m , но мы опускаем эту зависимость.

Рассмотрим уравнение в S -единицах:

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i = M,$$

и напомним, что по лемме 1 существуют конечные множества V_i , $i = 1, \dots, k$, причем для любого решения $(x_1, \dots, x_k) \in (U_S)^k$ этого уравнения существует индекс i такой, что $x_i \in V_i$. Выберем m достаточно большим, чтобы s_{m_i} оказалось больше по модулю любого элемента из V_i для всех $i = 1, \dots, k$ (это возможно, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \infty$). Однако $(s_{m_1}, \dots, s_{m_k})$ является решением в S -единицах нашего уравнения, а значит, $s_{m_i} \in V_i$ для какого-то i , противоречие. $\square$

Перейдем к доказательству основного результата.

Пусть a_n равно n -му положительному S -целому числу в порядке возрастания. Положим $s_n = (-1)^n a_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$. Заметим, что $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ содержит все ненулевые S -целые числа, и $|s_n| \leq |s_{n+1}|$ для всех n . Ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \infty$ и, значит, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является Т-последовательностью по лемме 3.

Пусть $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность S -целых чисел, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n| = \infty$. Пусть W — окрестность 0 в $\mathbb{Z}\{s_n\}$. Так как $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к 0 в этой топологии, для некоторого индекса m все числа s_n , $n \geq m$, лежат в W . Ввиду

$\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n| = \infty$ для некоторого индекса k все числа d_n , $n \geq k$, лежат в множестве $\{s_n \mid n \geq m\}$ и, как следствие, в W . В силу произвольности выбора W последовательность $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к 0 в $\mathbb{Z}\{s_n\}$, что и требовалось.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. После принятия статьи в печать автору стало известно, что теорема 1 была ранее доказана Ружей [8, теорема 3] в других терминах, но тоже с использованием теории диофантовых уравнений. Приводимое нами доказательство схоже по духу с доказательством Ружи, но использует терминологию, введенную в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеленюк Е. Г., Протасов И. В. Топологии на абелевых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 5. С. 1090–1107.
2. Protasov I. V., Zelenuk E. G. Topologies on $\mathbb{Z}$ determined by sequences: seven open problems // Mat. Stud. 1999. V. 12, N 1. P. 111.
3. *Unsolved problems in group theory*. The Kourovka Notebook. 19th ed. Novosibirsk: Inst. of Math. SO RAN, 2018.
4. Maynard J. Small gaps between primes // Ann. Math. (2). 2015. V. 181, N 1. P. 383–413.
5. Protasov I., Zelenyuk E. Topologies on groups determined by sequences. Lviv: VNTL Publ., 1999. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 4).
6. Higashikawa M. Non-productive duality properties of topological groups // Topol. Proc. 2000. V. 25. P. 207–216.
7. Evertse J.-H., Györy K. Unit equations in Diophantine number theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2015. (Camb. Stud. Adv. Math.).
8. Ruzsa I. Arithmetical topology // Number theory. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 51. V. I (Budapest, 1987). Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 473–504.

Поступила в редакцию 5 февраля 2020 г.

После доработки 5 февраля 2020 г.

Принята к публикации 19 февраля 2020 г.

Скресанов Савелий Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
skresan@math.nsc.ru