A. N. Khisamiev, Universal functions and $k\sigma$ -structures, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 3, 703–716

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.319>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.197.8

April 26, 2023, 14:59:07

УДК 512.540+510.5

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И $K\Sigma$ -СТРУКТУРЫ

А. Н. Хисамиев

Аннотация. Введено понятие $K\Sigma$ -структуры и доказано существование универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке над такой структурой. Приведены примеры семейств $K\Sigma$ -структур теории деревьев.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.319

Ключевые слова: наследственно конечная надстройка, универсальная Σ -функция, $K\Sigma$ -структура, дерево.

*Статья посвящается 80-летию
выдающегося математика Юрия Леонидовича Ершова*

В настоящее время общепризнанно, что одним из важных обобщений понятия вычислимости является Σ -определимость (обобщенная вычислимость) в допустимых множествах. Это обобщение дало возможность исследовать проблемы вычислимости над произвольными структурами, например над полем вещественных чисел. Наиболее важные результаты по теории вычислимости в допустимых множествах и их применении в теоретической информатике (семантическое программирование, динамическая логика, теория эффективных f -пространств и т. д.) приведены в монографии Ю. Л. Ершова [1], в которой отмечена важность следующего направления дальнейших исследований: «для лучшего понимания общей природы вычислимости (конструктивной познаваемости) следует дальше развить (понять) вычислимость в допустимых множествах вида $\mathbb{HF}(\mathcal{A})$ — наследственно конечной надстройке над системой $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ является либо моделью достаточно простой теории, либо одним из классических объектов таким, например, как поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел» [1, предисловие к 1-му изданию].

Одним из принципиальных результатов классической теории вычислимости является существование универсальной частично вычислимой функции [1, 2]. Как известно [1], в любом допустимом множестве конечной сигнатуры существует универсальный Σ -предикат, но это неверно для Σ -функций. В [3] построена структура $\mathcal{M}$ такая, что в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathcal{M})$ не существует универсальной Σ -функции. Поэтому представляет интерес нахождение условия на структуру $\mathcal{M}$ для существования универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathcal{M})$. В обзорной статье [4] приведены дальнейшие результаты по этой проблеме. В [5–7] для одного класса K структур найдены необходимые и достаточные условия для существования универсальной Σ -функции в $\mathbb{HF}(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M} \in K$. В [8] установлено, что наследственно конечная списочная надстройка $\mathbb{HW}(\mathbb{R}_{\text{exp}})$ над полем вещественных чисел с

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314–2019–0003).

экспонентой удовлетворяет свойству униформизации и, как следствие, получено существование универсальной Σ -функции в такой надстройке. Справедливость свойства униформизации для наследственно конечных настроек $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathbb{Q}_p)$ над полями вещественных и p -адических чисел показана в [9, 10]. В [11] построена абелева группа без кручения A такая, что в $\mathbb{H}\mathbb{F}(A)$ не существует универсальной Σ -функции. В [12, 13] доказано, что в наследственно конечных надстройках над абелевой p -группой, линейным порядком и алгеброй Ершова существует универсальная Σ -функция. В [14, 15] введено понятие Σ -однородной структуры и дано необходимое и достаточное условие существования универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке над такой структурой, приведены примеры Σ -однородных абелевых групп и колец.

С. С. Гончаров поставил задачу исследования проблемы существования универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке над деревом. В [16] построено дерево T высоты 4 такое, что в $\mathbb{H}\mathbb{F}(T)$ не существует универсальной Σ -функции. В [17, 18] введено понятие почти s -простой структуры и доказано существование универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке над такой структурой. Построены семейства почти s -простых деревьев, эквивалентностей и колец. В частности, введен следующий класс деревьев. Если существует такое натуральное число N , что любой элемент дерева T , отличный от корня, ветвится не более N , то T называется *ограниченно ветвящимся деревом*. Дерево T конечной высоты $h + 1$ называется *почти ограничено ветвящимся*, если $T = F \cup I$, где F — ограниченно ветвящееся дерево, а I — объединение конечного числа элементарных деревьев, в которых имеются бесконечно ветвящиеся элементы и любой последователь таких элементов не имеет последователя. Доказано, что почти ограничено ветвящееся дерево T является почти s -простой структурой, а потому в наследственно конечной надстройке над T существует универсальная Σ -функция. В [19] введено понятие неограниченно ветвящегося дерева конечной высоты и доказано существование универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке над таким деревом.

В § 1 данной работы введено понятие $K\Sigma$ -структуры и доказано существование универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке над такой структурой. В § 2 построено семейство $K\Sigma$ -структур теории деревьев, которое является расширением семейства неограниченно ветвящихся деревьев. В § 3 показано, что любая почти s -простая структура является $K\Sigma$ -структурой.

Рассматриваются структуры конечных предикатных сигнатур. Заметим, что это ограничение не мешает рассматривать сигнатуры с операциями. Действительно, каждую сигнатурную операцию можно естественным способом заменить предикатом, который интерпретируется как график этой операции. Отметим, что при переходе от операционных сигнатур к соответствующим чисто предикатным сигнатурам и обратно класс Σ -определимых отношений не изменяется.

Мы придерживаемся терминологии и обозначений по допустимым множествам из [1, 12]. Напомним лишь некоторые из них.

Как обычно, для заданной сигнатуры $\sigma \supseteq \{\in\}$ через KPU_σ обозначается теория Крипке — Платека с праэлементами сигнатуры σ . Определение этих аксиом см., например, в [1]. Под *допустимым множеством* A будем понимать KPU -структуру, у которой отношение принадлежности вполне упорядочивает множество $\text{Ord } A$ всех ординалов.

Класс Δ_0 -*формул* — это наименьший класс, содержащий атомарные формулы и замкнутый относительно $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \exists x \in t, \forall x \in t$, где x — переменная, а t — терм ($\exists x \in t \dots$ и $\forall x \in t \dots$ служат сокращением для $\exists x(x \in t \wedge \dots)$ и $\forall x(x \in t \rightarrow \dots)$ соответственно).

Класс Σ -*формул* — это наименьший класс, содержащий Δ_0 -формулы и замкнутый относительно $\vee, \wedge, \exists x \in t, \forall x \in t$, а также $\exists x$, где x — переменная, а t — терм.

Пусть $\mathbb{A} = \langle A, \in^{\mathbb{A}}, \dots \rangle$ — допустимое множество и $n \geq 1$. n -Местный предикат R на $\mathbb{A}$ называется Σ -*предикатом*, если он определен некоторой Σ -формулой (возможно, с параметрами); Δ -*предикатом*, если R и $A^n \setminus R$ являются Σ -предикатами.

Одноместные Σ - и Δ -предикаты будем называть Σ - и Δ -*подмножествами* соответственно.

Частичная функция f в $\mathbb{A}$, график которой Γ_f является Σ -предикатом в $\mathbb{A}$, называется Σ -*функцией*.

Двухместная частичная Σ -функция $g(x, y) : A^2 \rightarrow A$ называется *универсальной* для семейства одноместных частичных Σ -функций в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если семейство $\{\lambda y g(a, y) \mid a \in A\}$ состоит из всех одноместных частичных Σ -функций.

Напомним определение следующего важного класса допустимых множеств. Пусть $\mathcal{P}_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств множества X .

Наследственно конечная надстройка $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ над структурой $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma_0 \rangle$ определяется как структура $\langle M \cup HF(M), U, \in, \emptyset, \sigma_0 \rangle$ сигнатуры $\sigma_1 = \langle U, \in, \emptyset \rangle$, где

$$HF(M) = \bigcup_{n \in \omega} HF_n(M), \quad HF_0(M) = \emptyset, \quad HF_{n+1}(M) = \mathcal{P}_\omega(M \cup HF_n(M)),$$

предикат U выделяет множество элементов структуры $\mathfrak{M}$ (*праэлементов*), а отношение $\in$ и константа $\emptyset$ имеют обычный теоретико-множественный смысл.

При рассмотрении наследственно конечных надстроек удобнее вместо принципа Σ -рефлексии использовать следующий его аналог. Пусть $\Phi(\bar{x})$ — произвольная Σ -формула. Тогда

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists a \in \mathcal{P}_\omega(M) [\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M} \upharpoonright a) \models \Phi(\bar{x})].$$

Носитель $\text{sp } u$ элемента $u \in \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ определяется так: если $u \in M$, то $\text{sp } u = \{u\}$. Пусть $u = \{x_0, \dots, x_s\}$, тогда $\text{sp } u = \bigcup_{i=1}^s \text{sp } x_i$. Элементами множества ω в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ являются ординалы.

Если $\varkappa = \varkappa(0, \dots, n-1) \in HF(\omega)$ и $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in M^{<\omega}$, то $\varkappa(\bar{a}) = \varkappa(a_0, \dots, a_{n-1}) \in HF(M)$.

Пусть $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in M^{<\omega}$ и $\mathcal{D}_{\bar{a}}(a_0, \dots, a_{n-1})$ — атомарная диаграмма подструктуры $\mathfrak{M} \upharpoonright \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Через $\mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{x})$ обозначим формулу, полученную из $\mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{a})$ заменой a_i на x_i . Легко заметить, что функция $\bar{a} \mapsto \mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{x})$ является Σ -функцией в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Если $\bar{a}^\varepsilon = \langle a_0^\varepsilon, \dots, a_{n_\varepsilon-1}^\varepsilon \rangle \in M^{<\omega}$, $\varepsilon < 2$, то $\langle \bar{a}^0, \bar{a}^1 \rangle = \langle a_0^0, \dots, a_{n_0-1}^0, a_0^1, \dots, a_{n_1-1}^1 \rangle$. Через $\text{lh } \bar{a}$ обозначим длину кортежа $\bar{a} \in M^{<\omega}$. В записи $\mathcal{D}_{\langle \bar{a}^0, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{b}^0, \bar{b}^1 \rangle)$ будем считать, что $\text{lh } \bar{a}^\varepsilon = \text{lh } \bar{b}^\varepsilon$, $\varepsilon < 2$.

Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ — структуры конечной сигнатуры σ_0 , носители которых обозначаются через M, N соответственно. В дальнейшем для элементов M и N будем использовать буквы $a, b, c, a_0, \dots$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_0, \dots$ соответственно; для кортежей элементов из M и N — $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}_0, \dots$ и $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}_0, \dots$ соответственно; для

функций в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$ — $f, g, h, \dots$ и $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}, \dots$ соответственно; для переменных в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$ — $x, y, z, x_0, \dots$ и $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{x}_0, \dots$ соответственно.

§ 1. $K\Sigma$ -структуры

Здесь введено понятие $K\Sigma$ -структуры и доказано существование универсальной Σ -функции в наследственно конечной надстройке над такой структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть для структуры $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ_0 и ее подструктуры $\mathfrak{N}$ справедливы следующие условия.

1. Носитель $\mathfrak{N}$ является Σ -подмножеством в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, и существует двухместная Σ -функция $\hat{g}$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$ такая, что для любой Σ -функции $\hat{f}(\hat{x})$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$ существуют число $l \in \omega$ и кортеж $\bar{\mathbf{b}}$, для которых $\Gamma_{\hat{f}} \subseteq \Gamma_{\hat{g}_{l, \bar{\mathbf{b}}}}$, где $\hat{g}_{l, \bar{\mathbf{b}}}(\hat{x}) = \lambda \hat{x} \hat{g}(\langle l, \bar{\mathbf{b}} \rangle, \hat{x})$, т. е. функция $\hat{g}_{l, \bar{\mathbf{b}}}$ продолжает $\hat{f}$.

2. Существует Σ -предикат $\mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$ такой, что справедливы следующие условия:

- (a) $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) \rightarrow \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \emptyset, \bar{\mathbf{c}})$;
- (b) $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \langle \bar{\mathbf{c}}^0, \bar{\mathbf{c}}^1 \rangle) \rightarrow \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}^0) \ \& \ \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}^1)$.

3. Существует Σ -предикат $\text{Rep}(k, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, R)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$, где R состоит из конечного числа кортежей элементов множества N длины $k \in \omega$, и верны следующие условия:

- (a) $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \forall \bar{\mathbf{c}} \in R \ \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$;
- (b) для любого кортежа $\bar{\mathbf{p}}$ длины k такого, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{p}})$, существует кортеж $\bar{\mathbf{c}} \in R$, для которого $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)$, и для любых элементов $\varkappa, \tau \in HF(\omega)$ и числа $l \in \omega$ справедливо: если $\hat{g}_{l, \bar{\mathbf{b}}}(\varkappa(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle)) = \tau(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle)$, то $\hat{g}_{l, \bar{\mathbf{b}}}(\varkappa(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)) = \tau(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)$.

4. Для любого кортежа $\bar{\mathbf{a}}^0$ существуют кортежи $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{a}}^1$, где $\text{sp } \bar{\mathbf{a}}^0 \subseteq \text{sp } \bar{\mathbf{a}}$, такие, что для любых кортежей $\bar{\mathbf{a}}^1$ и $\bar{\mathbf{b}}$, где $\text{sp } \bar{\mathbf{a}}^1 \cap \text{sp } \bar{\mathbf{a}} = \emptyset$, существует кортеж $\bar{\mathbf{a}}^1$, для которого

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^1 \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^1 \rangle) \quad \text{и} \quad \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}^1).$$

Пару $\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ в дальнейшем будем называть E -парой относительно $\bar{\mathbf{a}}^0$, если $\bar{\mathbf{a}}^0 = \emptyset$, то — просто E -парой.

5. Пусть даны кортежи $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}$ такие, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\bar{\mathbf{a}}}(\bar{\mathbf{a}})$. Тогда верны следующие условия:

(a) для любых кортежей $\bar{\mathbf{a}}^\varepsilon, \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon, \bar{\mathbf{b}}, \varepsilon < 2$, для которых $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon \rangle)$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon)$, существуют кортежи $\bar{\mathbf{a}}_0^\varepsilon$ такие, что

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^0, \bar{\mathbf{a}}^1 \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}_0^0, \bar{\mathbf{a}}_0^1 \rangle) \quad \text{и} \quad \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \langle \bar{\mathbf{a}}_0^0, \bar{\mathbf{a}}_0^1 \rangle);$$

(b) для любого кортежа $\bar{\mathbf{a}}^1$ такого, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \emptyset, \bar{\mathbf{a}}^1)$, существует кортеж $\bar{\mathbf{a}}^1$, для которого $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^1 \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^1 \rangle)$.

Тогда $\mathfrak{M}$ назовем $K\Sigma$ -структурой.

Теорема 1.1. В наследственно конечной надстройке $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ над $K\Sigma$ -структурой $\mathfrak{M}$ существует универсальная Σ -функция.

Для доказательства теоремы потребуются следующие леммы.

Лемма 1.1. Пусть даны кортежи $\bar{a}$, $\bar{a}$ такие, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{a})$ и Σ -формула $\Phi(\bar{a}, x, y)$ с параметром $\bar{a}$ определяет функцию f в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Тогда формула

$$\Phi^*(\hat{x}, \hat{y}) = \exists \bar{p} (\mathfrak{B}(\bar{a}, \emptyset, \bar{p}) \ \& \ [\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{p}] \models \Phi(\bar{a}, \hat{x}, \hat{y}))$$

определяет некоторую Σ -функцию $\hat{f}^*$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно принципу Σ -рефлексии $\Phi^*(\hat{x}, \hat{y})$ является Σ -формулой. Пусть $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \Phi^*(\hat{x}^\varepsilon, \hat{y}^\varepsilon)$, $\varepsilon < 2$, и $\hat{x}^0 = \hat{x}^1$. Тогда существуют $\bar{p}^\varepsilon$ такие, что

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \emptyset, \bar{p}^\varepsilon), \quad (1)$$

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{p}^\varepsilon \models \Phi(\bar{a}, \hat{x}^\varepsilon, \hat{y}^\varepsilon). \quad (2)$$

Поскольку $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{p}^\varepsilon \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{p}^\varepsilon \rangle)$, из (1) по условию 5(a) определения 1.1 найдутся $\bar{p}_0^\varepsilon$, для которых

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{p}_0^0, \bar{p}_0^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{p}_0^0, \bar{p}_0^1 \rangle), \quad (3)$$

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \emptyset, \langle \bar{p}_0^0, \bar{p}_0^1 \rangle). \quad (4)$$

В силу условия 5(b) определения 1.1 и (4) существуют $\bar{a}^\varepsilon$ такие, что

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^0, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{p}_0^0, \bar{p}_0^1 \rangle).$$

Отсюда и из (3) следует $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{p}_0^0, \bar{p}_0^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{a}^0, \bar{a}^1 \rangle)$. Тогда найдется изоморфизм $\varphi : \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{p}_0^0 \cup \text{sp } \bar{p}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{a}^0 \cup \text{sp } \bar{a}^1$, для которого $\varphi \bar{a} = \bar{a}$. Отсюда и из (2) вытекает $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\bar{a}, \varphi \hat{x}^\varepsilon, \varphi \hat{y}^\varepsilon)$. Так как $\varphi \hat{x}^0 = \varphi \hat{x}^1$ и формула Φ определяет функцию в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, имеем $\varphi \hat{y}^0 = \varphi \hat{y}^1$, т. е. $\hat{y}^0 = \hat{y}^1$. Таким образом, формула $\Phi^*(\hat{x}, \hat{y})$ определяет некоторую функцию $\hat{f}^*$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из условия 1 определения 1.1 следует, что существуют число $l^* \in \omega$ и кортеж $\bar{b}^*$ такие, что функция $\hat{g}_{l^*, \bar{b}^*}$ продолжает функцию $\hat{f}^*$, определенную в лемме 1.1.

Для любых $k \in \omega$, кортежей $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $R \in \mathcal{P}_\omega(N^{<\omega})$ введем формулу

$$\begin{aligned} I(k, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, R, Q) = & \text{Rep}(k, \bar{a}, \bar{b}, R) \ \& \ \bar{c} \in R \ \& \ \forall \bar{q} \in Q (\bar{q} \in R \ \& \ \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle)) \\ & \ \& \ \forall \bar{p} \in R (\mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{p} \rangle) \rightarrow \bar{p} \in Q). \end{aligned}$$

Эта формула определяет подмножество $Q = \{\bar{q} \in R \mid \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle)\}$ множества R , где $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \text{Rep}(k, \bar{a}, \bar{b}, R) \ \& \ \bar{c} \in R$.

Для любых кортежей $\bar{a}, \bar{a}, \bar{b}$, Σ -формулы $\Phi(\bar{a}, x, y)$ и числа $l \in \omega$ введем следующую формулу:

$$\begin{aligned} X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, l}(x, y) = & \exists k \exists \bar{d} ([\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{d}] \models \Phi(\bar{a}, x, y)) \ \& \ \text{lh } \bar{d} = k \\ & \ \& \ \exists \varkappa \exists \tau \exists \bar{c} \exists R \exists Q (x = \varkappa(\langle \bar{a}, \bar{d} \rangle) \ \& \ y = \tau(\langle \bar{a}, \bar{d} \rangle) \ \& \ \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{d} \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle) \\ & \ \& \ [\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models (I(k, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, R, Q) \ \& \ \forall \bar{q} \in Q \ \hat{g}_{l, \bar{b}}(\varkappa(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle)) = \tau(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle))]). \end{aligned}$$

Лемма 1.2. Пусть структуры $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ удовлетворяют условиям определения 1.1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для любых кортежей $\bar{a}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, числа l и Σ -формулы $\Phi(\bar{a}, x, y)$ формула $X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, l}$ определяет некоторую Σ -функцию f' в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

2. Пусть даны кортежи $\bar{a}$ и $\bar{a}$ такие, что $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle$ — E -пара. Если Σ -формула $\Phi(\bar{a}, x, y)$ с параметром $\bar{a}$ определяет функцию f в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, а число $l^* \in \omega$ и кортеж $\bar{b}^*$ такие же, как в замечании 1.1, то функция f'_* , определенная по $\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}^*, l^*$, как в п. 1, продолжает функцию f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1. Так как носитель N структуры $\mathfrak{N}$ является Σ -подмножеством в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, согласно принципу Σ -рефлексии $X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, l}$ — Σ -формула. Пусть

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, l}(x^\varepsilon, y^\varepsilon), \quad \varepsilon < 2, \quad (5)$$

и

$$x^0 = x^1. \quad (6)$$

Докажем, что $y^0 = y^1$. Из (5) следует, что существуют k^ε , $\bar{d}^\varepsilon$, $\varkappa^\varepsilon$, τ^ε , $\bar{c}^\varepsilon$, R^ε , Q^ε такие, что

$$x^\varepsilon = \varkappa^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{d}^\varepsilon \rangle), \quad y^\varepsilon = \tau^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{d}^\varepsilon \rangle), \quad (7)$$

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{d}^\varepsilon \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{c}^\varepsilon \rangle), \quad (8)$$

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models I(k^\varepsilon, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}^\varepsilon, R^\varepsilon, Q^\varepsilon) \ \& \ \forall \bar{q} \in Q^\varepsilon \ \hat{g}_{l, \bar{b}}(\varkappa^\varepsilon(\langle \bar{b}, \bar{q} \rangle)) = \tau^\varepsilon(\langle \bar{b}, \bar{q} \rangle). \quad (9)$$

Из (8), (9) и условия 3(a) определения 1.1 следует, что для кортежей $\bar{a}$, $\bar{d}^\varepsilon$, $\bar{c}^\varepsilon$ и $\bar{b}$ справедливы требования условия 5(a) определения 1.1, а потому существуют кортежи $\bar{p}^\varepsilon$, для которых

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{d}^0, \bar{d}^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{p}^0, \bar{p}^1 \rangle) \quad (10)$$

и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \langle \bar{p}^0, \bar{p}^1 \rangle)$. Отсюда и из условия 2(b) определения 1.1 вытекает, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{p}^\varepsilon)$. Тогда по условию 3(b) определения 1.1 для $\bar{p}^\varepsilon$ существуют $\bar{c}_0^\varepsilon \in R^\varepsilon$ такие, что

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{c}_0^\varepsilon \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{p}^\varepsilon \rangle) \ \& \ (\hat{g}_{l, \bar{b}}(\varkappa^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{c}_0^\varepsilon \rangle)) = \tau^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{c}_0^\varepsilon \rangle) \\ \rightarrow \hat{g}_{l, \bar{b}}(\varkappa^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{p}^\varepsilon \rangle)) = \tau^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{p}^\varepsilon \rangle)). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (8), (10) и (11) следует

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{c}^\varepsilon \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{c}_0^\varepsilon \rangle). \quad (12)$$

Так как $\bar{c}^\varepsilon, \bar{c}_0^\varepsilon \in R^\varepsilon$, из определения формулы I и (12) имеем $\bar{c}_0^\varepsilon \in Q^\varepsilon$. Отсюда и из (9) вытекает $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \hat{g}_{l, \bar{b}}(\varkappa^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{c}_0^\varepsilon \rangle)) = \tau^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{c}_0^\varepsilon \rangle)$. Тогда из (11) следует

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \hat{g}_{l, \bar{b}}(\varkappa^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{p}^\varepsilon \rangle)) = \tau^\varepsilon(\langle \bar{a}, \bar{p}^\varepsilon \rangle). \quad (13)$$

Из (6), (7) и (10) имеем $\varkappa^0(\langle \bar{a}, \bar{p}^0 \rangle) = \varkappa^1(\langle \bar{a}, \bar{p}^1 \rangle)$. Из (13) вытекает $\tau^0(\langle \bar{a}, \bar{p}^0 \rangle) = \tau^1(\langle \bar{a}, \bar{p}^1 \rangle)$. Отсюда и из (7), (10) имеем $y^0 = y^1$. Таким образом, формула $X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, l}$ определяет некоторую функцию f' в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

Докажем утверждение 2. Пусть $f(x) = y$. В силу п. 1 достаточно доказать, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}^*, l^*}(x, y)$. Так как f определяется Σ -формулой $\Phi(\bar{a}, x, y)$, существует $\bar{d}$, $\text{sp } \bar{d} \cap \text{sp } \bar{a} = \emptyset$, $\text{lh } \bar{d} = k$, для которой

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M} \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{d}) \models \Phi(\bar{a}, x, y). \quad (14)$$

Поскольку $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle$ — E -пара, в силу условий 3(b) и 4 определения 1.1 существуют множество R и кортеж $\bar{c}$ такие, что

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle), \quad (15)$$

$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \text{Rep}(k, \bar{a}, \bar{b}^*, R)$ и $\bar{c} \in R$. Пусть $x = \varkappa(\langle \bar{a}, \bar{d} \rangle)$ и $y = \tau(\langle \bar{a}, \bar{d} \rangle)$. Тогда из (14), (15) имеем

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M} \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{c}) \models \Phi(\bar{a}, \varkappa(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle), \tau(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle)). \quad (16)$$

Пусть множество Q и кортеж $\bar{q}$ такие, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models I(k, \bar{a}, \bar{b}^*, \bar{c}, R, Q)$ и $\bar{q} \in Q$. Тогда из (16) следует

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M} \upharpoonright \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{q}) \models \Phi(\bar{a}, \varkappa(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle), \tau(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle)). \quad (17)$$

Так как $\bar{q} \in R$, в силу условия 3(a) определения 1.1 имеем $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}^*, \bar{q})$. Отсюда и из условия 2(a) определения 1.1 вытекает, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \emptyset, \bar{q})$. Тогда из (17) имеем $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \Phi^*(\varkappa(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle), \tau(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle))$. Согласно лемме 1.1 формула $\Phi^*(\hat{x}, \hat{y})$ определяет функцию $\hat{f}^*$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. По замечанию 1.1 функция $\hat{g}_{l^*, \bar{b}^*}$ продолжает $\hat{f}^*$. Отсюда $\hat{g}_{l^*, \bar{b}^*}(\varkappa(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle)) = \tau(\langle \bar{a}, \bar{q} \rangle)$, следовательно, в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ верна формула $X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}^*, l^*}(x, y)$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $V(x_0, x_1, x_2)$ — Σ -формула без параметров, определяющая универсальный Σ -предикат на $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Покажем, что следующая формула определяет универсальную Σ -функцию в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$:

$$\begin{aligned} U_{\mathfrak{M}}(x_0, x_1, x_2) = & \exists s \exists l \exists \bar{a} \exists \bar{a} \exists \bar{b} \exists e (x_0 = \langle s, l, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, e \rangle \ \& \ s, l \in \omega \ \& \ \bar{a} \in M^{<\omega} \\ & \& \ \bar{a}, \bar{b} \in N^{<\omega} \ \& \ e \in HF(M) \ \& \ X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, l}(x_1, x_2) \ \& \ V(e, x_1, x_2)), \end{aligned}$$

где $\Phi_s(x_0, x_1, x_2)$ — Σ -формула без параметров номера s .

Пусть дана произвольная Σ -функция f в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. В силу справедливости п. 4 определения 1.1 найдется E -пара $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle$, для которой функция f определяется Σ -формулой $\Phi_s(\bar{a}, x_1, x_2)$ с параметром $\bar{a}$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. По лемме 1.1 формула $\Phi_s^*(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ определяет Σ -функцию $\hat{f}^*$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Согласно условию 1 определения 1.1 существуют $l^* \in \omega$ и $\bar{b}^*$ такие, что функция $\hat{g}_{l^*, \bar{b}^*}$ продолжает $\hat{f}^*$. Пусть график функции f определяется формулой $V(e, x_1, x_2)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ для некоторого $e \in HF(M)$. Тогда по лемме 1.2 (п. 2) формула $U_{\mathfrak{M}}(\langle s, l^*, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}^*, e \rangle, x_1, x_2)$ определяет в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ функцию f .

Пусть дан произвольный кортеж $\langle s, l, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, e \rangle$, где $s, l \in \omega$, $e \in HF(M)$. По лемме 1.2 (п. 1) формула $X_{\Phi, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, l}(x_1, x_2)$ определяет Σ -функцию в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Поскольку пересечение любого предиката, являющегося графиком функции, с другим предикатом вновь служит графиком некоторой функции, формула $U_{\mathfrak{M}}(\langle s, l, \bar{a}, \bar{a}, \bar{b}, e \rangle, x_1, x_2)$ определяет некоторую Σ -функцию в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. $\square$

§ 2. Почти неограниченно ветвящиеся деревья

Здесь приведено семейство $K\Sigma$ -структур теории деревьев, в наследственно конечных надстройках над которыми существует универсальная Σ -функция.

Приведем некоторые часто используемые определения и обозначения, связанные с понятием дерева.

Частично упорядоченное множество T называется *деревом*, если для любого $x \in T$ множество всех элементов, меньших x (*предшественников* x в T),

вполне упорядоченно и T содержит наименьший элемент r , который называется *корнем*. Для каждой вершины $x \in T$ через $\text{level}_T(x)$ будет обозначаться порядковый тип множества всех предшественников x в T , называемый *уровнем* вершины x в дереве T . *Высота* дерева T определяется следующим образом:

$$ht(T) = \sup\{\text{level}_T(x) + 1 \mid x \in T\}.$$

Если $x, y \in T$ и $x < y$ ($x \neq y$) и при этом между ними нет элементов из T , то y называется *непосредственным последователем* x . Пусть T — дерево и $x \in T$. Если мощность множества всех непосредственных последователей элемента x равна α , то будем говорить, что x α -*ветвится*. Если α — конечный кардинал, то будем говорить, что x *конечно ветвится*. Дерево T называется *конечно ветвящимся*, если любая вершина, отличная от r , конечно ветвится. Будем говорить, что x *ветвится не более* β , если x α -ветвится и $\alpha \leq \beta$. Если x и y из T несравнимы, будем использовать запись $x \perp y$.

Пусть $x \in T$. Поддерево

$$[x]_T = \{y \mid \exists z(z \leq x \text{ \& \& } \text{level}_T(z) = 1 \text{ \& } y \geq z)\} \cup \{r\}$$

называется *элементарным поддеревом, содержащим x* .

Если $X \subseteq T$, то поддерево $X^* = \{y \mid y \leq x, x \in X\} \cup \{r\}$ называется *замыканием вниз* подмножества X .

Пусть T_0 и T_1 — деревья с корнями r_0 и r_1 соответственно, $T_0 \cap T_1 = \emptyset$. Тогда через $T_0 \cup T_1$ обозначим дерево, полученное объединением T_0 и T_1 , при этом отождествляем $r_0 = r_1 = r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Конечно ветвящееся дерево T называется *неограниченно ветвящимся конечной высоты $h + 1$* , если

- любая максимальная цепь (т. е. линейно упорядоченное множество) имеет высоту $h + 1$;
- для любых натуральных чисел m и n существует n различных элементарных поддеревьев таких, что каждая из их вершин x , $0 < \text{level}_T(x) < h$, ветвится не менее m раз.

Пусть $T = T_0 \cup T_1$ — конечно ветвящееся дерево конечной высоты $h + 1$, $ht(T_0) < h + 1$, а T_1 — неограниченно ветвящееся дерево. Назовем T *почти неограниченно ветвящимся деревом высоты $h + 1$* .

Докажем, что почти неограниченно ветвящееся дерево является $K\Sigma$ -структурой. Для этого напомним некоторые определения и известные результаты.

Пусть $\mathfrak{M}$ — структура конечной сигнатуры σ_0 , $M_0 \in \mathcal{P}_\omega(M)$. Под Δ -предикатами (Σ -функциями) сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ будем понимать Δ -предикаты (Σ -функции) в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, определенные Σ -формулами с параметрами из M_0 . Через $|\mathfrak{M}|$ обозначим носитель $\mathfrak{M}$, а через $\langle M_0 \rangle_{\mathfrak{M}}$ — подструктуру, порожденную подмножеством M_0 в $\mathfrak{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [12]. Пусть для локально конечной и локально конструктивизируемой структуры $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ_0 и конечного подмножества $M_0 \in \mathcal{P}_\omega(M)$ справедливы следующие условия.

1. Определено понятие базы для любого конечного подмножества $X \in \mathcal{P}_\omega(M)$ относительно M_0 . Предикат $\mathfrak{B}_0^{M_0}(X, \bar{y}) \equiv$ «кортеж $\bar{y} \in M^{<\omega}$ есть база подмножества X относительно M_0 » является Δ -предикатом сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Если $\bar{y}^0, \bar{y}^1$ — две базы подмножества X , то $X \subseteq |\langle \text{sp } \bar{y}^\varepsilon \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}|$, $\varepsilon = 0, 1$, и либо $\mathfrak{B}_0^{M_0}(\text{sp } \bar{y}^0, \bar{y}^1)$, либо $\mathfrak{B}_0^{M_0}(\text{sp } \bar{y}^1, \bar{y}^0)$ истин в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Кортеж $\bar{y}$ называется *базой*, если предикат $\mathfrak{B}^{M_0}(\bar{y}) \equiv \mathfrak{B}_0^{M_0}(\text{sp } \bar{y}, \bar{y})$ истин в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

2. Для каждой базы $\bar{y}$ определено число $\chi^{M_0}(\bar{y})$, называемое *характеристикой* базы $\bar{y}$, такое, что $\chi^{M_0}(\bar{y})$ является Σ -функцией сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Множество всех характеристик Ξ^{M_0} является вычислимым подмножеством ω . Существует Δ -предикат $\text{Cor}^{M_0}(z, \bar{y}, n)$ сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ такой, что справедлива эквивалентность

$$z \in |\langle \text{sp } \bar{y} \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}| \Leftrightarrow \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \exists! n (n \neq 0 \ \& \ \text{Cor}^{M_0}(z, \bar{y}, n)).$$

Число n назовем *координатой* элемента z относительно базы $\bar{y}$. Если элементы не равны, то и их координаты не равны.

3. Пусть даны базы $\bar{y}^\varepsilon$ одинаковой характеристики χ и конечные подструктуры $\mathfrak{M}^\varepsilon \geq \langle \text{sp } \bar{y}^\varepsilon \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}$, $\varepsilon < 2$. Тогда существуют база $\bar{y}^2$ и подструктура $\mathfrak{M}^2 \geq \langle \text{sp } \bar{y}^2 \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}$, для которых справедливы условия

- $\chi = \chi(\bar{y}^2)$;
- существуют вложения $\varphi^\varepsilon : \mathfrak{M}^\varepsilon \rightarrow \mathfrak{M}^2$ такие, что $\varphi^\varepsilon \bar{y}^\varepsilon = \bar{y}^2$.

В частности, любые две базы одной и той же характеристики имеют одинаковую длину.

4. Для любой функции f , определенной Σ -формулой с параметрами из M_0 в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, из того, что $u \in \delta f$, следует существование базы $\bar{y}$ подмножества $\text{sp } u$, для которой $\text{sp } f(u) \subseteq |\langle \text{sp } \bar{y} \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}|$.

Тогда $\mathfrak{M}$ назовем Σ -ограниченной структурой относительно M_0 . Если для любого конечного подмножества M_0 существует конечное подмножество $M'_0 \supseteq M_0$ такое, что $\mathfrak{M}$ является Σ -ограниченной относительно M'_0 , то $\mathfrak{M}$ назовем Σ -ограниченной структурой.

Лемма 2.1 [12]. Пусть даны базы $\bar{y}^0, \bar{y}^1$ одной и той же характеристики χ . Тогда отображение $y_i^0 \mapsto y_i^1$ продолжается до изоморфизма $\varphi : \mathbb{H}\mathbb{F}(\langle \text{sp } \bar{y}^0 \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}) \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{F}(\langle \text{sp } \bar{y}^1 \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle})$ и справедливы следующие утверждения.

1. Для любых Δ -предиката $\Phi(\bar{x})$, $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ и кортежа $\bar{u}^0 = \langle u_1^0, \dots, u_n^0 \rangle$, $u_i^0 \in HF(|\langle \text{sp } \bar{y}^0 \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}|)$, $1 \leq i \leq n$, верно

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\bar{u}^0) \Leftrightarrow \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\varphi \bar{u}^0).$$

2. Для любых функции $f(x)$, определенной Σ -формулой с параметрами из M_0 в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, и элемента $u \in HF(|\langle \text{sp } \bar{y}^0 \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}|)$ верно

$$\text{если } f(u) = v, \ v \in HF(|\langle \text{sp } \bar{y}^0 \rangle_{\langle \mathfrak{M}, M_0 \rangle}|) \text{ и } \varphi u \in \delta f, \text{ то } f(\varphi u) = \varphi v.$$

Пусть структура $\mathfrak{M}$ Σ -ограничена относительно $M_0 \in \mathcal{P}_\omega(M)$. В [12] введен вычислимый класс числовых функций $\mathfrak{H}^{M_0}$, для которого справедливо

Предложение 2.1 [12]. Пусть структура $\mathfrak{M}$ является Σ -ограниченной относительно $M_0 \in \mathcal{P}_\omega(M)$ и $h \in \mathfrak{H}^{M_0}$. Тогда формула

$$\begin{aligned} \Psi(u, v, h) \Leftrightarrow \exists \bar{y} \exists \bar{x} \exists \bar{z} \exists \kappa \exists \chi \exists n \exists \tau \exists s (\mathfrak{B}_0^{M_0}(\text{sp } u, \bar{y}) \ \& \ u = \kappa(\bar{x}) \ \& \ \text{Cor}^{M_0}(\bar{x}, \bar{y}, n) \\ \& \ \text{Cor}^{M_0}(\bar{z}, \bar{y}, s) \ \& \ \chi = \chi^{M_0}(\bar{y}) \ \& \ h(\kappa, \chi, n) = \langle \tau, s \rangle \ \& \ v = \tau(\bar{z})) \end{aligned}$$

определяет некоторую Σ -функцию f_h в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

Теорема 2.1 [12]. Пусть структура $\mathfrak{M}$ является Σ -ограниченной. В $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ -функция, определенная Σ -формулой с параметром A , тогда и только тогда, когда для любого конечного подмножества C , относительно которого $\mathfrak{M}$ является Σ -ограниченной, найдется конечное подмножество C^1 такое, что для любого конечного подмножества X и любой его базы $\bar{y}_X^C$ относительно C существует база $\bar{y}_{X^*}^A$ подмножества X^* относительно A , для которой справедливо $|\langle \text{sp } \bar{y}_X^C \rangle_{\langle \mathfrak{M}, C \rangle}| \subseteq |\langle \text{sp } \bar{y}_{X^*}^A \rangle_{\langle \mathfrak{M}, A \rangle}|$, где $X^* = C^1 \cup X$.

Теорема 2.2. Пусть $T = T_0 \cup T_1$ — почти неограниченно ветвящееся дерево конечной высоты $h + 1$. Тогда T является $K\Sigma$ -деревом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость условий 1–5 определения 1.1 $K\Sigma$ -структуры для дерева T .

1. Легко заметить, что формула $\Phi_1(x) = \exists x_0 \dots \exists x_h \exists i \leq h (r = x_0 < x_1 < \dots < x_h \ \& \ x_i = x)$ определяет множество T_1 в $\mathbb{H}\mathbb{F}(T)$.

Для любого $X \in \mathcal{P}_\omega(T)$ подмножество $[X]$ определимо равенством $[X] = \cup\{[x]_T \mid x \in X\}$. В [19] показано, что дерево T_1 Σ -ограничено относительно любого подмножества $C \in \mathcal{P}_\omega(T_1)$ и удовлетворяет условиям теоремы 2.1 для $A = \emptyset$ и $C^1 = [C]$.

Для числа $l \in \omega$ и кортежа $\bar{\mathbf{b}} \in T_1^{<\omega}$ положим $\hat{g}_{l,\bar{\mathbf{b}}}(\hat{x}) = f_{h_l}(\langle \bar{\mathbf{b}}, \hat{x} \rangle)$, где h_l — функция номера l из $\mathfrak{H}^\emptyset$. Из доказательства теоремы 2.1 в [12] следует, что для любой Σ -функции $\hat{f}$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(T_1)$ существуют $l \in \omega$ и $\bar{\mathbf{b}} \in T_1^{<\omega}$, для которых $\hat{g}_{l,\bar{\mathbf{b}}}$ продолжает $\hat{f}$. Таким образом, справедливость условия 1 доказана.

2. Предикат $\mathfrak{B}$ определим равенством $\mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\text{sp } \bar{\mathbf{c}})^* \cap (\text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{b}})^* = \{r\}$. Поскольку предикат $X^* = Y$, $X, Y \in \mathcal{P}_\omega(T_1)$ является Σ -предикатом в $\mathbb{H}\mathbb{F}(T_1)$ (см. [19]), то $\mathfrak{B}$ — Σ -предикат в $\mathbb{H}\mathbb{F}(T_1)$. Справедливость условий 2(a),(b) непосредственно следует из определения предиката $\mathfrak{B}$.

3. Пусть $k \in \omega$. Введем предикат $K(k, E) \Leftrightarrow E$ — поддерево T_1 с единственным элементом уровня 1, в котором каждая вершина $\mathbf{a}$ такая, что $0 < \text{level}_{T_1}(\mathbf{a}) < h$, ветвится ровно k раз. Легко заметить, что K — Σ -предикат в $\mathbb{H}\mathbb{F}(T_1)$.

Определим предикат $\text{Rep}(k, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, R)$ следующей Σ -формулой:

$$\begin{aligned} & \exists E_0 \dots \exists E_{k-1} \left(\bigwedge_{i < k} (K(k, E_i) \ \& \ E_i \cap (\text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{b}})^* = \{r\}) \right. \\ & \quad \& \bigwedge_{i < j < k} E_i \cap E_j = \{r\} \ \& \ \forall \bar{\mathbf{c}} \in R (\text{lh } \bar{\mathbf{c}} = k \ \& \ \text{sp } \bar{\mathbf{c}} \subseteq E_0 \cup \dots \cup E_{k-1}) \\ & \quad \left. \& \ \forall \bar{\mathbf{c}} \subseteq E_0 \cup \dots \cup E_{k-1} (\text{lh } \bar{\mathbf{c}} = k \rightarrow \bar{\mathbf{c}} \in R) \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Покажем, что для предиката $\text{Rep}(k, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, R)$ справедливо условие 3 определения 1.1.

3(a). Истинность этого условия непосредственно вытекает из (18).

3(b). Пусть $\text{lh } \bar{\mathbf{p}} = k$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(T_1) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{p}})$. Положим $F \Leftrightarrow (\text{sp } \bar{\mathbf{p}})^* \cup (\text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{b}})^*$. Пусть $\mathbf{d}_{1,i}$, $i < m$, — все элементы уровня 1 из F . Так как $(\text{sp } \bar{\mathbf{p}})^* \cap (\text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{b}})^* = \{r\}$, будем считать, что $\mathbf{d}_{1,i} \in (\text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{b}})^*$, если $i < m_0 \leq m$, и $\mathbf{d}_{1,i} \in (\text{sp } \bar{\mathbf{p}})^*$, если $m_0 \leq i < m$. Доказательство проведем для случая $0 < m_0 < m$. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $\mathbf{e}_{i,j}$, $j < l_i$, — все максимальные элементы из F такие, что $\mathbf{e}_{i,j} \geq \mathbf{d}_{1,i}$, и $\bar{\mathbf{n}}_{i,j} = \langle r < \mathbf{d}_{1,i} < \dots < \mathbf{e}_{i,j} \rangle$ — цепь из всех элементов F , лежащих между $\mathbf{d}_{1,i}$ и $\mathbf{e}_{i,j}$. Пусть $\bar{\mathbf{n}} = \langle \bar{\mathbf{n}}_0, \dots, \bar{\mathbf{n}}_{m_0-1} \rangle$, $\bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{p}}} = \langle \bar{\mathbf{n}}_{m_0}, \dots, \bar{\mathbf{n}}_{m-1} \rangle$, $\bar{\mathbf{n}}_i = \langle \bar{\mathbf{n}}_{i,0}, \dots, \bar{\mathbf{n}}_{i,l_i-1} \rangle$. Кортеж $\langle \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{p}}} \rangle$ является базой множества $\text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{b}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{p}}$ относительно $\emptyset$ (см. [19]). Из (18) следует, что существуют кортежи $\bar{\mathbf{c}}$ и $\bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{c}}}$, для которых $\text{sp } \bar{\mathbf{c}} \subseteq E_0 \cup \dots \cup E_{k-1}$ и

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{F}(T_1) \models \mathfrak{B}_0^\emptyset(\text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{b}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{c}}, \langle \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{c}}} \rangle) \\ \& \ \chi^\emptyset(\langle \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{c}}} \rangle) = \chi^\emptyset(\langle \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{p}}} \rangle) \ \& \ \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{c}}} \rangle}(\langle \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{p}}} \rangle). \quad (19) \end{aligned}$$

Отсюда $\bar{\mathbf{c}} \in R$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(T_1) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)$.

Пусть $\hat{g}_{l,\bar{b}}(\varkappa(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle)) = \tau(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle)$, где $l \in \omega$, $\varkappa, \tau \in HF(\omega)$. Тогда

$$f_{h_l}(\langle \bar{b}, \varkappa(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle) \rangle) = \tau(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle).$$

Из предложения 2.1 следует, что функция f_{h_l} определена Σ -формулой Ψ без параметров в $\mathbb{HF}(T_1)$. Поскольку $\langle \bar{b}, \varkappa(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle) \rangle, \tau(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle) \in HF(\text{sp}(\bar{n}, \bar{n}_\varepsilon))$, из (19) в силу леммы 2.1 имеем $f_{h_l}(\langle \bar{b}, \varkappa(\langle \bar{a}, \bar{p} \rangle) \rangle) = \tau(\langle \bar{a}, \bar{p} \rangle)$, т. е. $\hat{g}_{l,\bar{b}}(\varkappa(\langle \bar{a}, \bar{p} \rangle)) = \tau(\langle \bar{a}, \bar{p} \rangle)$. Таким образом, справедливость условия 3(b) доказана.

4. Для доказательства справедливости условия 4 потребуются следующие леммы.

Из неограниченной ветвимости дерева T_1 вытекает

Лемма 2.2. Для любых кортежей $\bar{a}, \bar{a}^1$ существует кортеж $\bar{a}$ такой, что $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{a})$ и $(\text{sp } \bar{a})^* \cap (\text{sp } \bar{a}^1)^* = \{r\}$.

Подмножества $A^0, A^1 \in \mathcal{P}_\omega(T)$ назовем *несравнимыми*, если для любых $x^\varepsilon \in A^\varepsilon$, $x^\varepsilon \neq r$, $\varepsilon < 2$, верно $x^0 \perp x^1$.

Лемма 2.3. Пусть даны $\bar{a}, \bar{a}^1$ и $\bar{a}$ такие, что $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{a})$, $\text{sp } \bar{a}$ и $\text{sp } \bar{a}^1$ несравнимы. Тогда для любого $\bar{b}$ существует $\bar{a}^1$, для которого

$$\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle) \quad \text{и} \quad \mathbb{HF}(T_1) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}^1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.2 следует, что существует $\bar{a}^1$ такой, что $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\bar{a}^1}(\bar{a}^1)$ и $(\text{sp } \bar{a}^1)^* \cap (\text{sp } \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle)^* = \{r\}$, т. е. $\mathbb{HF}(T_1) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}^1)$. Так как $\bar{a}$ и $\bar{a}^1$ несравнимы, $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle)$. $\square$

Продолжим доказательство справедливости условия 4. Пусть дан кортеж $\bar{a}^0$. Тогда для $\bar{a}$ такого, что $\text{sp } \bar{a} = [\text{sp } \bar{a}^0]$, существование $\bar{a}$ непосредственно вытекает из леммы 2.2 при $\bar{a}^1 = \emptyset$. Покажем, что $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle$ — E -пара. Пусть даны кортежи $\bar{a}^1$ и $\bar{b}$, для которых $\text{sp } \bar{a}^1 \cap \text{sp } \bar{a} = \emptyset$. Легко заметить, что множества $\text{sp } \bar{a}$ и $\text{sp } \bar{a}^1$ несравнимы. Отсюда и из леммы 2.3 существует $\bar{a}^1$, для которого $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle)$ и $\mathbb{HF}(T_1) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}^1)$.

5. Пусть даны кортежи $\bar{a}, \bar{a}$ такие, что $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{a})$.

5(a). Если $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^\varepsilon \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{a}^\varepsilon \rangle)$, $\varepsilon < 2$, и

$$\mathbb{HF}(T_1) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}^\varepsilon), \quad (20)$$

то множества $\text{sp } \bar{a}$ и $\text{sp } \bar{a}^0 \cup \text{sp } \bar{a}^1$ несравнимы. Действительно, допустим противное, т. е. существуют $x \in \text{sp } \bar{a}^0 \cup \text{sp } \bar{a}^1$ и $y \in \text{sp } \bar{a}$ такие, что либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Пусть для определенности $x = a_i^0 \in \text{sp } \bar{a}^0$. Тогда $a_i^0 \in [\text{sp } \bar{a}]$. Отсюда $(\text{sp } \bar{a}^0)^* \cap (\text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{b})^* \neq \{r\}$; противоречие с (20). Следовательно, $\text{sp } \bar{a}$ и $\text{sp } \bar{a}^0 \cup \text{sp } \bar{a}^1$ несравнимы. Тогда по лемме 2.3 существуют $\bar{a}_0^\varepsilon$, для которых $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^0, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{a}_0^\varepsilon, \bar{a}_0^1 \rangle)$ и $\mathbb{HF}(T_1) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \langle \bar{a}_0^\varepsilon, \bar{a}_0^1 \rangle)$.

5(b). Пусть $\bar{a}^1$ такой, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{a}, \emptyset, \bar{a}^1)$. Легко заметить, что множества $\text{sp } \bar{a}^1$ и $\text{sp } \bar{a}$ несравнимы. Тогда по лемме 2.3 существует $\bar{a}^1$, для которого $\mathbb{HF}(T) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle)$.

Таким образом, условие 5 справедливо для T , т. е. T — $K\Sigma$ -дерево. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.1. В наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(T)$ над почти неограниченно ветвящимся деревом T конечной высоты $h + 1$ существует универсальная Σ -функция.

§ 3. Почти c -простые структуры

Здесь показано, что любая почти c -простая структура является $K\Sigma$ -структурой.

Пусть дана структура $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ_0 и для каждого конечного подмножества $M_0 \subseteq M$ существует однозначно определенное конечное подмножество $[M_0] \subseteq M$ такое, что $M_0 \subseteq [M_0]$ и $[[M_0]] = [M_0]$. Множество $[M_0]$ называется *замыканием множества* M_0 . Если $[M_0] = M_0$, то M_0 назовем *замкнутым* множеством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [17]. Пусть для структуры $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ_0 и ее подструктуры $\mathfrak{N}$ справедливы следующие условия.

1. $\mathfrak{N}$ — структура c -простой теории T , и ее носитель N является Σ -подмножеством в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

2. В $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$ существуют Σ -формулы без параметров, определяющие Δ -предикат $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathcal{P}_\omega(N) \times \mathcal{P}_\omega(N)$, для которого справедливо

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(x, y \cup z) \ \& \ x \subseteq y, x \subseteq z \rightarrow \mathfrak{B}_0(x, y) \ \& \ \mathfrak{B}_0(x, z).$$

3. Структура $\mathfrak{M}$ локально вложима в $\mathfrak{N}$.

Пусть $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ и $\alpha : A \rightarrow B$ — изоморфизм. Тогда

(а) если A замкнуто, то для любого конечного $A^1 \supseteq A$ существует вложение $\psi : A^1 \rightarrow \mathfrak{N}$, продолжающее α , такое, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(B, \psi A^1)$;

(б) если вложения $\varphi^\varepsilon : A^\varepsilon \rightarrow \mathfrak{N}$, $A^\varepsilon \supseteq A$, $\varepsilon < 2$, продолжают α и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(B, \varphi^\varepsilon A^\varepsilon)$, то существует вложение $\psi : (A^0 \cup A^1) \rightarrow \mathfrak{N}$, продолжающее α , для которого $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(B, \psi(A^0 \cup A^1))$;

(с) для любого $B^1 \supseteq B$ такого, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(B, B^1)$, существует вложение $\psi : B^1 \rightarrow \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1} .

Тогда $\mathfrak{M}$ назовем *почти c -простой* структурой.

Предложение 3.1. Любая почти c -простая структура $\mathfrak{M}$ является $K\Sigma$ -структурой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость условий 1–5 определения 1.1 $K\Sigma$ -структуры для $\mathfrak{M}$.

1. Поскольку $\mathfrak{N}$ — структура c -простой теории, а следовательно, регулярной теории, то в силу теоремы 3.5.1 в [1] и предложения 3.5.1 в [1] существует двухместная универсальная Σ -функция $\hat{g}_0$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$. Положим $\hat{g}_{\lambda, \bar{b}}(\hat{x}) = \hat{g}_0(\lambda(\bar{b}), \hat{x})$, где $\lambda \in HF(\omega)$, $\bar{b} \in N^{<\omega}$. Отсюда вытекает справедливость условия 1 определения 1.1.

2. Положим $\mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \iff \text{sp } \bar{a} \cap \text{sp } \bar{c} = \emptyset \ \& \ \mathfrak{B}_0(\text{sp } \bar{a}, \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{c})$. Отсюда вытекает справедливость условия 2 определения 1.1.

3. Пусть функция $\hat{h}$ с $\delta \hat{h} = \omega \times N^{<\omega}$, для которой $\hat{h}(l, \bar{a})$ состоит из номеров всех полных формул теории $\text{Th}(\mathfrak{N}, \bar{a})$ от l переменных. Так как $\mathfrak{N}$ — структура c -простой теории, $\hat{h}$ — Σ -функция в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N})$. Определим предикат $\text{Rep}(k, \bar{a}, \bar{b}, R)$ Σ -формулой

$$\begin{aligned} \forall \bar{c} \in R(\text{lh } \bar{c} = k \ \& \ \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})) \ \& \ R \in \mathcal{P}_\omega(N^{<\omega}) \\ \ \& \ \forall n \in \hat{h}(\text{lh } \bar{a} + k, \bar{b})(\exists \bar{p}(\text{lh } \bar{p} = k \ \& \ \mathfrak{B}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{p}) \ \& \ \Phi_n(\langle \bar{a}, \bar{p} \rangle)) \\ \rightarrow \exists \bar{c} \in R\Phi_n(\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle)). \end{aligned} \quad (21)$$

Покажем, что для предиката $\text{Rep}(k, \bar{a}, \bar{b}, R)$ справедливо условие 3 определения 1.1.

3(a). Истинность этого условия вытекает из (21).

3(b). Пусть дан кортеж $\bar{\mathbf{p}}$ такой, что $\text{lh } \bar{\mathbf{p}} = k$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{p}})$. Поскольку $\mathfrak{N}$ — структура s -простой теории, существует $n \in \hat{h}(\text{lh } \bar{\mathbf{a}} + k, \mathbf{b})$ такое, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \Phi_n(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)$. Из (21) следует, что существует $\bar{\mathbf{c}} \in R$, для которой $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \Phi_n(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle)$. Так как Φ_n — полная формула, то $\mathfrak{N} \models \Phi_n(\langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle) \rightarrow \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle}(\langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle)$. Отсюда $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)$.

Пусть $\hat{g}_{\lambda, \bar{\mathbf{b}}}(\kappa(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle)) = \tau(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}} \rangle)$, где $\lambda, \kappa, \tau \in HF(\omega)$. Так как $\mathfrak{N}$ — структура s -простой теории, существует формула $\Psi(\bar{\mathbf{b}}, \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle)$, для которой справедлива эквивалентность

$$\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \hat{g}_{\lambda, \bar{\mathbf{b}}}(\kappa(\langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle)) = \tau(\langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \Psi(\bar{\mathbf{b}}, \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle). \quad (22)$$

Поскольку Φ_n — полная формула, то $\mathfrak{N} \models \Phi_n(\langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle) \rightarrow \Psi(\bar{\mathbf{b}}, \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle)$. Отсюда и из (22) вытекает $\hat{g}_{\lambda, \bar{\mathbf{b}}}(\kappa(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)) = \tau(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{p}} \rangle)$. Таким образом, справедливость условия 3(b) доказана.

4. Пусть дан кортеж $\bar{a}^0$. Тогда существует $\bar{a}$, для которого $\text{sp } \bar{a} = [\text{sp } \bar{a}^0]$. Так как $\mathfrak{M}$ локально вложима в $\mathfrak{N}$, найдется вложение $\alpha : \text{sp } \bar{a} \rightarrow \mathfrak{N}$. Положим $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \bar{a}$. Отсюда $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{\mathbf{a}})$. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ — кортежи, для которых $\text{sp } \bar{a}^1 \cap \text{sp } \bar{a} = \emptyset$. В силу условия 3(a) определения 3.1 существует вложение $\psi : \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{a}^1 \rightarrow \mathfrak{N}$, продолжающее α , такое, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(\text{sp } \bar{a}, \text{sp } \bar{a} \cup \psi \text{sp } \bar{a}^1)$. Положим $\bar{\mathbf{a}}^1 = \psi \bar{a}^1$. Тогда $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^1 \rangle)$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}^1)$.

5. Пусть даны кортежи $\bar{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$ такие, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\bar{a}}(\bar{\mathbf{a}})$. Тогда существует изоморфизм $\alpha : \text{sp } \bar{a} \rightarrow \text{sp } \bar{\mathbf{a}}$, для которого $\alpha \bar{a} = \bar{\mathbf{a}}$.

5(a). Пусть кортежи $\bar{a}^\varepsilon$, $\bar{\mathbf{a}}^\varepsilon$ и $\bar{\mathbf{b}}$, $\varepsilon < 2$, такие, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^\varepsilon \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon \rangle)$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon)$. Тогда существуют изоморфизмы $\varphi^\varepsilon : \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{a}^\varepsilon \rightarrow \text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon$, для которых $\varphi^\varepsilon \bar{a} = \bar{\mathbf{a}}$, $\varphi^\varepsilon \bar{a}^\varepsilon = \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(\text{sp } \bar{\mathbf{a}}, \text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{a}}^\varepsilon)$. В силу условия 3(b) определения 3.1 существует вложение $\psi : \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{a}^0 \cup \text{sp } \bar{a}^1 \rightarrow \mathfrak{N}$, продолжающее α , такое, что $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(\text{sp } \bar{\mathbf{a}}, \text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \psi(\text{sp } \bar{a}^0 \cup \text{sp } \bar{a}^1))$. Положим $\bar{\mathbf{a}}_0^\varepsilon = \psi \bar{a}^\varepsilon$. Тогда $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^0, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}_0^\varepsilon, \bar{\mathbf{a}}_1^\varepsilon \rangle)$ и $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \langle \bar{\mathbf{a}}_0^\varepsilon, \bar{\mathbf{a}}_1^\varepsilon \rangle)$.

5(b). Пусть дан кортеж $\bar{\mathbf{a}}^1$, для которого $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\bar{\mathbf{a}}, \emptyset, \bar{\mathbf{a}}^1)$. Тогда $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}_0(\text{sp } \bar{\mathbf{a}}, \text{sp } \bar{\mathbf{a}} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{a}}^1)$. В силу условия 3(c) определения 3.1 существует вложение $\psi : \text{sp } \bar{a} \cup \text{sp } \bar{\mathbf{a}}^1 \rightarrow \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1} . Положим $\bar{a}^1 = \psi \bar{\mathbf{a}}^1$. Тогда $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \mathcal{D}_{\langle \bar{a}, \bar{a}^1 \rangle}(\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^1 \rangle)$.

Таким образом, условие 5 справедливо для $\mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}$ — $K\Sigma$ -структура. $\square$

Следствие 3.1. В наследственно конечной надстройке $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ над почти s -простой структурой $\mathfrak{M}$ существует универсальная Σ -функция.

Из теоремы 2.1 в [17] и следствия 3.1 имеем

Следствие 3.2. Пусть T — почти ограничено ветвящееся дерево конечной высоты $h+1$. Тогда в наследственно конечной надстройке $\mathbb{H}\mathbb{F}(T)$ существует универсальная Σ -функция.

Любое конечно ветвящееся дерево высоты не более трех либо ограничено ветвящееся, либо почти неограниченно ветвящееся дерево. Отсюда и из следствий 2.1 и 3.2 имеем

Следствие 3.3. В наследственно конечной надстройке $\mathbb{H}\mathbb{F}(T)$ над конечно ветвящимся деревом T высоты не более трех существует универсальная Σ -функция.

Благодарность. Автор выражает сердечную благодарность С. С. Гончарову за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость. 2-е изд. Новосибирск: Науч. книга; М.: Экономика, 2000. (Сибирская школа алгебры и логики).
2. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
3. Руднев В. А. Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.
4. Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I. HF-computability // Computability in context. Computation and logic in the real world. London: World Sci., 2011. P. 169–242.
5. Морозов А. С., Пузаренко В. Г. О Σ -подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
6. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г. О принципах вычислимости на допустимых множествах // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–72.
7. Пузаренко В. Г. К вычислимости на специальных моделях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
8. Александрова С. А. Проблема униформизации для Σ -предикатов в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 1. С. 3–14.
9. Коровина М. В. Об универсальной рекурсивной функции и абстрактных машинах на вещественных числах со списочной надстройкой // Структурные алгоритмические свойства вычислимости. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1996. С. 24–43. (Вычисл. системы; вып. 156).
10. Стукачев А. И. Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках // Обобщенная вычислимость и определимость. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1998. С. 3–14. (Вычисл. системы; вып. 161).
11. Хисамиев А. Н. О Σ -подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 695–706.
12. Хисамиев А. Н. Σ -ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. I // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 217–235.
13. Хисамиев А. Н. Σ -ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. II // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 676–693.
14. Хисамиев А. Н. Σ -однородные алгебраические системы и Σ -функции. I // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 659–684.
15. Хисамиев А. Н. Σ -однородные алгебраические системы и Σ -функции. II // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 1. С. 129–147.
16. Хисамиев А. Н. Об универсальной Σ -функции над деревом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 687–690.
17. Хисамиев А. Н. Универсальные функции и почти c -простые модели // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 663–681.
18. Хисамиев А. Н. Об одном классе c -простых колец // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1416–1426.
19. Хисамиев А. Н. Универсальные функции и неограниченно ветвящиеся деревья // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 4. С. 476–491.

Поступила в редакцию 10 декабря 2018 г.

После доработки 18 февраля 2020 г.

Принята к публикации 19 февраля 2020 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru