V. N. Berestovskii, I. A. Zubareva, Extremals of a left-invariant sub-finsler metric on the engel group, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 735–751

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.402>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.166.219.16
April 26, 2023, 16:54:15

УДК 514.752.8+514.763+514.765+514.764.227

ЭКСТРЕМАЛИ ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ СУБФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКИ НА ГРУППЕ ЭНГЕЛЯ

В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева

Аннотация. С помощью принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального быстрогодействия в координатах первого рода найдены экстремали произвольной левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Энгеля, определяемой распределением ранга 2.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.402

Ключевые слова: (а) нормальная экстремаль, левоинвариантная субфинслерова метрика, оптимальное управление, поляра, принцип максимума Понтрягина, экстремаль.

§ 1. Введение

В [1] указано, что кратчайшие линии левоинвариантной (суб)финслеровой метрики d на группе Ли G являются решениями левоинвариантной задачи оптимального быстрогодействия с замкнутым единичным шаром U некоторой произвольной нормы F на подпространстве $\mathfrak{p}$ алгебры Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ группы Ли G в качестве области управления. При этом подпространство $\mathfrak{p}$ порождает $\mathfrak{g}$. Необходимые условия для оптимальных траекторий этой задачи дает принцип максимума Понтрягина [2]; кривые, удовлетворяющие этим условиям, будем называть *экстремальями*. По-видимому, впервые кратчайшие левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Ли были найдены в [3] для случая произвольной субфинслеровой метрики d на группе Гейзенберга H . Фактор-группа группы H по ее центру Z изоморфна аддитивной группе $(\mathbb{R}^2, +)$. При этом дифференциал dp канонической проекции $p : H \rightarrow H/Z = \mathbb{R}^2$ является линейным изоморфизмом подпространства $\mathfrak{p}$ на $T_0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$. Отождествление пространств $\mathfrak{p}$ и $\mathbb{R}^2$ посредством dp превращает $\mathbb{R}^2$ в нормированное векторное пространство $(\mathbb{R}^2, F)$, часто называемое *плоскостью Минковского*. В [3] с помощью упомянутого принципа максимума доказано, что проекции относительно p кратчайших в (H, d) могут быть частью 1) метрических прямых или 2) (замкнутых) изопериметриков [4] плоскости Минковского $(\mathbb{R}^2, F)$.

Ранее решение изопериметрической задачи для плоскости Минковского получил Бузман в [5]. Со ссылкой на [3] Г. А. Носков в [6] нашел те же кратчайшие в (H, d) на основе [5] и некоторых своих нетривиальных аргументов. В то же время ошибочно содержащееся в [7, 8] утверждение, что в [5] найдены

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075–15–2019–1613.

кратчайшие пространства (H, d) . Не только потому, что в то время не было никакого эквивалента субфинслеровой геометрии, но и потому, что кратчайшие упомянутого выше первого типа не связаны с изопериметриками. Авторы статьи [9] (см. также [10]) полагали, что они впервые изучали субфинслеровы многообразия. Но под другим названием «неголономные финслеровы многообразия» они появились еще в трех работах первого автора 1988, 1989 гг., в том числе в [1], при характеристике *общих однородных многообразий с внутренней метрикой*. Кроме того, следуя традициям специалистов по финслеровой геометрии, авторы в [9, 10] накладывают сильные условия на норму F и применяют соответствующий громоздкий аппарат.

В данной работе найдены экстремали произвольной левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Энгеля, определяемой подпространством $\mathfrak{p}$ ранга два. В работах А. А. Ардентова и Ю. Л. Сачкова [11–14] проведено детальное исследование левоинвариантной субримановой метрики на группе Энгеля в координатах, отличных от используемых нами координат первого рода.

Здесь применяются только классические методы и результаты из монографии [2]. Некоторые новые методы поиска нормальных экстремалей левоинвариантных (суб)финслеровых и (суб)римановых метрик предложены в статье [15].

§ 2. Формула Кэмпбелла — Хаусдорфа для группы Энгеля

Пусть X, Y, Z, V — базис четырехмерной алгебры Энгеля $\mathfrak{g}$ такой, что

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = V, \quad [X, V] = [Y, V] = [Z, V] = [Y, Z] = 0. \quad (1)$$

Таким образом, $\mathfrak{g}$ — трехступенная нильпотентная алгебра Ли с двумя образующими X, Y . Поэтому, как известно, существуют единственная с точностью до изоморфизма связная односвязная нильпотентная группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (группа Энгеля) и экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ — диффеоморфизм. Этот диффеоморфизм и декартовы координаты x, y, z, v в $\mathfrak{g}$ с базисом X, Y, Z, V задают координаты первого рода на G и тем самым — диффеоморфизм $G \cong \mathbb{R}^4$.

Предложение 1. В координатах первого рода умножение в группе Энгеля $G \cong \mathbb{R}_{x,y,z,v}^4$ задается следующей формулой:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ v_1 + v_2 + \frac{1}{2}(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \frac{1}{12}(x_1^2 y_2 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_2 y_1 + x_2^2 y_1) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $A_i = x_i X + y_i Y + z_i Z + v_i V$, $i = 1, 2$. Используя (1), последовательно получаем

$$[A_1, A_2] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)[X, Y] + (x_1 z_2 - x_2 z_1)[X, Z] = (x_1 y_2 - x_2 y_1)Z + (x_1 z_2 - x_2 z_1)V;$$

$$[A_1, [A_1, A_2]] = x_1(x_1 y_2 - x_2 y_1)[X, Z] = x_1(x_1 y_2 - x_2 y_1)V;$$

$$[A_2, [A_2, A_1]] = [(A_1, A_2), A_2] = x_2(x_1 y_2 - x_2 y_1)[Z, X] = x_2(x_2 y_1 - x_1 y_2)V.$$

Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ трехступенная, справедлива следующая формула Кэмпбелла — Хаусдорфа (см. [16, лекция 4]):

$$\ln(\exp(A_1)\exp(A_2)) = A_1 + A_2 + \frac{1}{2}[A_1, A_2] + \frac{1}{12}[A_1, [A_1, A_2]] + \frac{1}{12}[A_2, [A_2, A_1]].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ln(\exp(A_1)\exp(A_2)) = & (x_1 + x_2)X + (y_1 + y_2)Y + \left(z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)\right)Z \\ & + \left(v_1 + v_2 + \frac{1}{2}(x_1z_2 - x_2z_1) + \frac{1}{12}(x_1y_2 - x_2y_1)(x_1 - x_2)\right)V. \end{aligned}$$

Последнее равенство дает формулу (2). $\square$

Из способа введения координат первого рода и формул (2) следует, что реализация выбранного базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G как левоинвариантных векторных полей на группе Ли G в этих координатах имеет вид

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{z}{2} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{xy}{12} \frac{\partial}{\partial v}, & Y &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2}{12} \frac{\partial}{\partial v}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial v}, & V &= \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Легко убедиться, что эти векторные поля удовлетворяют соотношениям (1).

§ 3. Левоинвариантная субфинслерова метрика и оптимальное управление на группе Энгеля

В [1] указано, что кратчайшие кривые левоинвариантной субфинслеровой метрики d на любой связной группе Ли G , определяемой левоинвариантным вполне неголономным распределением D и нормой F на $D(e)$, совпадают с оптимальными по быстродействию решениями управляемой системы

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}(u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (4)$$

с измеримыми управлениями $u = u(t)$. Здесь $l_g(h) = gh$, область управления — единичный шар $U = \{u \in D(e) \mid F(u) \leq 1\}$. При этом в силу принципа максимума Понтрягина для (локальной) оптимальности по быстродействию управления $u(t)$ и соответствующей ему траектории $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, необходимо существование не обращающейся в нуль абсолютно непрерывной вектор-функции $\psi(t) \in T_{g(t)}^*G$ такой, что для почти всех $t \in \mathbb{R}$ функция $\mathcal{H}(g(t); \psi(t); u) = \psi(t)(dl_{g(t)}(u))$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$M(t) = \psi(t)(dl_{g(t)}(u(t))) = \max_{u \in U} \psi(t)(dl_{g(t)}(u)). \quad (5)$$

Кроме того, функция $M(t)$, $t \in \mathbb{R}$, постоянна и неотрицательна, $M(t) \equiv M \geq 0$.

В случае $M = 0$ (соответственно $M > 0$) соответствующая *экстремаль*, т. е. кривая, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина, называется *анормальной* (соответственно *нормальной*).

Из (1) следует, что левоинвариантное распределение D на G с базисом X, Y для $D(e)$ вполне неголономно. Пусть F — произвольная норма на $D(e)$. Тогда пара $(D(e), F)$ определяет левоинвариантную субфинслерову метрику d на G ; при этом $u_1X(e) + u_2Y(e)$ отождествляется с $u = (u_1, u_2)$, где $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

С учетом (2) управляющая система (4) запишется в виде

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \quad \dot{v} = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{6}xy\right)u_1 + \frac{1}{12}x^2u_2, \quad (6)$$

где $u = (u_1, u_2) \in U$.

Вследствие левой инвариантности метрики d можно считать, что траектории начинаются в единице $e \in G$, т. е. $x(0) = y(0) = z(0) = v(0) = 0$.

Управление $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in U$, $t \in \mathbb{R}$, определяемое принципом максимума Понтрягина, ограничено и измеримо [2], следовательно, интегрируемо. Поэтому функции $x(t)$, $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определяемые первыми двумя уравнениями в (6), липшицевы, произведение любого конечного числа этих функций липшицево, а его производная ограничена и измерима на каждом компактном отрезке числовой прямой. Тем самым эту производную можно вычислять по обычному правилу дифференцирования произведения из дифференциального исчисления функций одного переменного. Следовательно, можно интегрировать по частям последние два уравнения системы (6), применяя первые два уравнения в (6) (см. [17, пп. 2.9.21, 2.9.24]). С учетом $x(0) = y(0) = z(0) = v(0) = 0$ последовательно получаем

$$z(t) = -\frac{1}{2}x(t)y(t) + \int_0^t x(\tau)u_2(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{1}{2}x(t)\left(z(t) + \frac{1}{3}x(t)y(t)\right) + \frac{1}{2}\int_0^t x^2(\tau)u_2(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{12}x^2(t)y(t) - \frac{1}{2}x(t)\int_0^t x(\tau)u_2(\tau) d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t x^2(\tau)u_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина соответствующая системе (6) функция $\mathcal{H}(x, y, z, v; \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4; u_1, u_2)$ определяется по формуле

$$\mathcal{H} = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \frac{1}{2}\psi_3(xu_2 - yu_1) - \frac{1}{2}\psi_4\left(z + \frac{1}{6}xy\right)u_1 + \frac{1}{12}\psi_4 x^2 u_2 = h_1 u_1 + h_2 u_2,$$

где

$$h_1 = \psi_1 - \frac{1}{2}\psi_3 y - \frac{1}{12}\psi_4 xy - \frac{1}{2}\psi_4 z, \quad h_2 = \psi_2 + \frac{1}{2}\psi_3 x + \frac{1}{12}\psi_4 x^2. \quad (9)$$

Абсолютно непрерывная вектор-функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет сопряженной к (6) системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \frac{1}{12}\psi_4 y u_1 - \left(\frac{1}{2}\psi_3 + \frac{1}{6}\psi_4 x\right)u_2, \\ \dot{\psi}_2 = \left(\frac{1}{2}\psi_3 + \frac{1}{12}\psi_4 x\right)u_1, \\ \dot{\psi}_3 = \frac{1}{2}\psi_4 u_1, \\ \dot{\psi}_4 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Зададим произвольно начальные данные $\psi_i(0) = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, системы (10). Из (10), первого уравнения в (6) и начального условия $x(0) = 0$ следует, что

$$\psi_4 \equiv \varphi_4, \quad \psi_3 = \varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4 x, \quad \psi_2 = \varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_3 x + \frac{1}{6}\varphi_4 x^2. \quad (11)$$

Заметим, что $\left(\frac{1}{2}xy + z\right)' = xu_2$, $\left(\frac{1}{2}xy - z\right)' = yu_1$ на основании (6). Ввиду (11) и (6) первое уравнение в (10) примет вид

$$\dot{\psi}_1 = \frac{1}{12}\varphi_4 \left(\frac{1}{2}xy - z\right)' - \frac{1}{2}\varphi_3\dot{y} - \frac{5}{12}\varphi_4 \left(\frac{1}{2}xy + z\right)'.$$

Поэтому с учетом начальных данных систем (6) и (10) получаем, что

$$\psi_1 = \varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_3y - \frac{1}{6}\varphi_4(xy + 3z). \quad (12)$$

Подставляя последнее равенство и равенства (11) в (9), находим

$$h_1 = \varphi_1 - \left(\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4x\right)y - \varphi_4z, \quad h_2 = \varphi_2 + \left(\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4x\right)x. \quad (13)$$

Заметим, что ψ_k , $k = 1, 2, 3, 4$, — компоненты ковектора $\psi = \psi(t)$ относительно системы координат (x, y, z, v) , т. е.

$$\psi_1 = \psi \left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \psi_2 = \psi \left(\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \psi_3 = \psi \left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \psi_4 = \psi \left(\frac{\partial}{\partial v}\right). \quad (14)$$

Положим $h_1 = \psi(X)$, $h_2 = \psi(Y)$, $h_3 = \psi(Z)$, $h_4 = \psi(V)$. Используя (3), легко проверить, что формулы (11), (12), (14) дают те же h_1 , h_2 , что и в (13), а

$$h_3 = \psi_3 + \psi_4\frac{x}{2} = \varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4x + \varphi_4\frac{x}{2} = \varphi_3 + \varphi_4x, \quad h_4 = \psi_4 = \varphi_4. \quad (15)$$

Из (13) и (15) получаем еще два интеграла гамильтоновой системы (6), (10):

$$h_4 \equiv \varphi_4, \quad \mathcal{E} = \frac{h_3^2}{2} - h_2h_4 \equiv \frac{\varphi_3^2}{2} - \varphi_2\varphi_4, \quad (16)$$

называемые в [7] *функциями Казимира*.

Используя (6), (13) и (15), вычисляем

$$\dot{h}_1 = -h_3u_2, \quad \dot{h}_2 = h_3u_1. \quad (17)$$

По принципу максимума Понтрягина для локальной оптимальности по быстродействию управления $u(t)$ и траектории $(x(t), y(t), z(t), v(t))$ необходимо существование не обращающейся в нуль абсолютно непрерывной вектор-функции $\psi(t)$ такой, что для почти всех $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяется система ОДУ (10) и функция $\mathcal{H}(x(t), y(t), z(t), v(t); \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t); u_1, u_2)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$M(t) = h_1(t)u_1(t) + h_2(t)u_2(t) = \max_{u \in U} (h_1(t)u_1 + h_2(t)u_2) \equiv M \geq 0. \quad (18)$$

Из (6), (13) и (18) вытекает, что при умножении функций $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, на положительную константу k траектория $(x(t), y(t), z(t), v(t))$ не изменится, а M умножится на k . Поэтому в случае $M > 0$ будем считать, что $M = 1$. Далее в настоящем параграфе рассматривается этот случай.

Из (18) следует, что $(h_1(t), h_2(t))$ из (13) и $(\varphi_1, \varphi_2) = (h_1(0), h_2(0))$ лежат на границе ∂U^* полярной для U фигуры $U^* = \{h \mid F_U(h) \leq 1\}$, где F_U — норма на $H = \{h\}$, равная опорной функции Минковского тела U :

$$F_U(h) = \max_{u \in U} h \cdot u.$$

При этом (H, F_U) — сопряженное нормированное пространство к $(D(e), F)$ и $(U^*)^* = U$ вследствие рефлексивности конечномерных нормированных пространств. Кроме того, используя (17) и (18), получаем, что

$$h_1(t)\dot{h}_2(t) - \dot{h}_1(t)h_2(t) = h_3(t)(h_1(t)u_1(t) + h_2(t)u_2(t)) = h_3(t). \quad (19)$$

Пусть $r = r(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, — полярное уравнение кривой $F_U(x, y) = 1$. В каждой точке $\theta \in \mathbb{R}$ существуют односторонние производные от $r = r(\theta)$ (причем за возможным исключением не более чем счетного числа значений θ существует обычная производная $r'(\theta)$). Для простоты любое значение между этими производными будет обозначаться через $r'(\theta)$. Тогда для $\theta = \theta(t)$

$$h_1(t) = h_1(\theta) = r(\theta) \cos \theta, \quad h_2(t) = h_2(\theta) = r(\theta) \sin \theta, \quad \theta = \theta(t), \quad (20)$$

$$h'_1(\theta) = -(r(\theta) \sin \theta - r'(\theta) \cos \theta), \quad h'_2(\theta) = r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta. \quad (21)$$

Независимо от существования обычных производных (21) вследствие (19) существует обычная производная удвоенной ориентированной площади

$$\sigma(t) = 2S(\theta(t)) = \int_0^{\theta(t)} r^2(\theta) d\theta$$

сектора, отсчитываемой от 0. При этом в силу (15) и (19)

$$\dot{\sigma}(t) = h_3(t) = \varphi_3 + \varphi_4 x(t) = r^2(\theta(t))\dot{\theta}(t), \quad \dot{\theta}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{r^2(\theta(t))}. \quad (22)$$

Возводя третье равенство в (22) в квадрат, вследствие (13) получаем

$$\begin{aligned} r^4(\theta)\dot{\theta}^2 &= \varphi_3^2 + 2\varphi_4 \left(\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4 x \right) x = \varphi_3^2 + 2\varphi_4(h_2 - \varphi_2), \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{\varphi_3^2 + 2\varphi_4(r(\theta) \sin \theta - \varphi_2)}{r^4(\theta)}. \end{aligned} \quad (23)$$

На основании (16), (19) и (22)

$$\ddot{\sigma}(t) = \varphi_4 u_1(t), \quad (24)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}(t))^2 - h_2(t)h_4(t) = \frac{1}{2}(h_3(t))^2 - h_2(t)h_4(t) = \frac{\varphi_3^2}{2} - \varphi_2\varphi_4. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. (25) эквивалентно (23).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В обозначениях из [8] уравнение (24) записывается в виде

$$\ddot{\theta}^\circ = \varphi_4 \cos_\Omega \theta, \quad (26)$$

при $\varphi_4 \neq 0$ это аналог уравнения (5): $\ddot{\theta}^\circ = \sin_\Omega \theta$ из [8]. Там $\Omega = U$, $\Omega^\circ = U^*$; θ° есть наше $\sigma(\theta)$ для Ω° , θ в [8] играет роль σ для Ω ,

$$\cos_\Omega \theta = u_1(\theta), \quad \sin_\Omega \theta = u_2(\theta), \quad \cos_{\Omega^\circ} \theta^\circ = h_1(\theta^\circ), \quad \sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ = h_2(\theta^\circ),$$

$$\cos_{\Omega^\circ} \theta^\circ \cos_\Omega \theta + \sin_{\Omega^\circ} \theta^\circ \sin_\Omega \theta = 1.$$

На рис. 8 в [8] дано схематическое изображение фазового портрета «обобщенного математического маятника» (5). На основе этого портрета там же даны некоторая общая словесная, но достаточно подробная информация о решениях

уравнения (5) и ее применение (в том числе) к группам Гейзенберга, Картана и Энгеля с заданной нормой F на $D(e)$ для левоинвариантного двумерного вполне неголономного распределения D на этих группах Ли. Другими словами, в [8] достаточно подробно описывается аналог нашей функции $\theta = \theta(t)$ для этих групп Ли. В то же время в [8] не ищутся соответствующие экстремали на этих группах.

Мы утверждаем, что в общем случае для $\theta = \theta(t)$

$$\dot{x}(t) = u_1(\theta) = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r^2(\theta)}, \quad \dot{y}(t) = u_2(\theta) = \frac{r(\theta) \sin \theta - r'(\theta) \cos \theta}{r^2(\theta)}, \quad (27)$$

где $u_1(\theta) = h'_2(\theta)/r^2(\theta)$, $u_2(\theta) = -h'_1(\theta)/r^2(\theta)$ вследствие (21). Действительно, должны выполняться оба равенства

$$h_1(\theta)u_1(t) + h_2(\theta)u_2(\theta) = 1, \quad h'_1(\theta)u_1(t) + h'_2(\theta)u_2(\theta) = 0.$$

Легко увидеть, что из (20) и (27) следует первое из этих равенств, а из (21) и (27) — второе.

Из (6) вытекает, что

$$\left(3v + \frac{1}{2}xz\right)' = -\frac{3}{2}\dot{x}z + \frac{1}{2}x\dot{z} + \frac{1}{2}\dot{x}z + \frac{1}{2}x\dot{z} = x\dot{z} - \dot{x}z, \quad (28)$$

поэтому на основании (6), (13) и (18), опустив для краткости записи переменную t , получаем

$$\begin{aligned} h_1u_1 + h_2u_2 &= \varphi_1\dot{x} + \varphi_2\dot{y} + \left(\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4x\right)(x\dot{y} - \dot{x}y) - \varphi_4\dot{x}z = (\varphi_1x + \varphi_2y + 2\varphi_3z)' \\ &+ \varphi_4(x\dot{z} - z\dot{x}) = \left(\varphi_1x + \varphi_2y + 2\varphi_3z + 3\varphi_4v + \frac{1}{2}\varphi_4xz\right)' = 1. \end{aligned}$$

Учитывая начальные данные системы (6), имеем

$$\varphi_1x + \varphi_2y + \left(2\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4x\right)z + 3\varphi_4v = t. \quad (29)$$

§ 4. Поиск субфинслеровых экстремалей

1. Рассмотрим аномальный случай.

Предложение 2. Аномальная экстремаль с началом в единице на группе Энгеля является однопараметрической подгруппой

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) = \pm \frac{t}{F(0,1)}, \quad z(t) \equiv 0, \quad v(t) \equiv 0 \quad (30)$$

и не является строго аномальной.

Доказательство. Пусть $M = 0$. Из условия максимума получаем, что тогда $h_1(t) = h_2(t) \equiv 0$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Так как $u_1(t)$ и $u_2(t)$ не могут одновременно равняться нулю ни при каком $t \in \mathbb{R}$, то $\varphi_3 + \varphi_4x(t) \equiv 0$ на основании (17). Отсюда следует, что $\varphi_3 = 0$ и $x(t) \equiv 0$, так как $x(0) = 0$. Вследствие (11) $\psi_2(t) = \psi_3(t) \equiv 0$, $\psi_4(t) \equiv \varphi_4$ и $\psi_1(t) = \frac{1}{2}\varphi_4z(t)$ на основании (12) и первого равенства в (13). Следовательно, $\varphi_4 \neq 0$, поскольку $\psi(t)$ не обращается в нуль.

Так как $x(t) \equiv 0$, то $u_1(t) \equiv 0$ согласно первому уравнению (6). Из третьего и четвертого уравнений (6) и начальных условий $z(0) = v(0) = 0$ последовательно получаем $z(t) = v(t) \equiv 0$.

Далее, поскольку $u_1(t) \equiv 0$ и $F(u_1(t), u_2(t)) \equiv 1$, то $u_2(t) \equiv \pm \frac{1}{F(0,1)}$. Отсюда, из второго уравнения (6) и начального условия $y(0) = 0$ вытекает, что $y(t) = \pm \frac{t}{F(0,1)}$, и получаем (30).

Вследствие (2) эта экстремаль является однопараметрической подгруппой,

$$g_1(t) = \exp\left(\frac{tY}{F(0,1)}\right), \quad g_2(t) = g_1(-t) = g_1(t)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

удовлетворяют (18) с $M(t) \equiv 1$ для постоянной ковекторной функции

$$\psi(t) = (0, \pm\varphi_2, 0, 0) = (0, \pm F(0,1), 0, 0) = (0, h_2(t), 0, 0),$$

подчиненной дифференциальным уравнениям (10) и (17); поэтому экстремаль нормальна относительно этой ковекторной функции, не строго аномальна и является геодезической, более того, метрической прямой (см. предложение 3). $\square$

2. Пусть $M = 1$.

Теорема 1. Для каждой экстремали с началом в единице на группе Энгеля

$$x(t) = \int_0^t \frac{[r'(\theta(\tau)) \sin \theta(\tau) + r(\theta(\tau)) \cos \theta(\tau)] d\tau}{r^2(\theta(\tau))}, \quad (31)$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{[r(\theta(\tau)) \sin \theta(\tau) - r'(\theta(\tau)) \cos \theta(\tau)] d\tau}{r^2(\theta(\tau))} \quad (32)$$

с произвольными измеримыми функциями указанного вида под интегралами и непрерывно дифференцируемой функцией $\theta = \theta(t)$, удовлетворяющей (22), (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие предложения 2 каждая экстремаль нормальна для соответствующего допустимого управления. На основании изложенного ранее каждое такое управление имеет вид (27), что влечет формулы (31), (32). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На участках экстремалей с $\dot{\theta}(t) \neq 0$ для вычисления функций $x(t)$, $y(t)$ по формулам (31), (32) имеют значения лишь те $\theta = \theta(t)$, где существует обычная производная $r'(\theta)$.

2.1. Пусть $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$.

Предложение 3. Для каждой экстремали с началом в единице на группе Энгеля с условием $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ имеем $\theta(t) \equiv \theta_0$, $t \in \mathbb{R}$, при некотором θ_0 . При этом каждая такая экстремаль является однопараметрической подгруппой тогда и только тогда, когда существует обычная производная $r'(\theta_0)$. Во всех случаях каждая экстремаль с $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ есть метрическая прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из (22).

При этом вследствие теоремы 1 каждое допустимое управление $(u_1(t), u_2(t)) = (u_1(\theta_0), u_2(\theta_0))$ из (27) постоянно тогда и только тогда, когда существует

обычная производная $r'(\theta_0)$, что эквивалентно тому, что система (6) имеет единственное решение — однопараметрическую подгруппу

$$x(t) = u_1(\theta_0)t, \quad y(t) = u_2(\theta_0)t, \quad z(t) \equiv 0, \quad v(t) \equiv 0.$$

Отметим, что существует не более чем счетное число значений θ_0 , для которых неверно второе утверждение. Для каждого такого θ_0 функции $x(t)$, $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определяются формулами (31), (32) с $\theta(\tau) \equiv \theta_0$ и произвольными измеримыми подынтегральными функциями $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$ указанного в теореме 1 вида, а функции $z(t)$ и $v(t)$ — формулами (7) и (8) соответственно.

Из (6) следует, что длина дуги траектории $(x(t), y(t), z(t), v(t))$ в (G, d) равна длине соответствующей дуги ее проекции $(x(t), y(t))$ на плоскости Минковского. Легко видеть, что проекции указанных траекторий — метрические прямые плоскости Минковского. Поэтому сами траектории — метрические прямые. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Метрические прямые получаются только в случае предложения 3, в частности, предложения 2.

2.2. Рассмотрим случай $\varphi_4 = 0$, $\varphi_3 \neq 0$.

Предложение 4. Пусть $(x, y, z, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с условием $x(0) = y(0) = z(0) = v(0) = 0$ является экстремалью на группе Энгеля, для которой $\varphi_4 = 0$, $\varphi_3 \neq 0$. Тогда функции $\theta(t)$, $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$, $x(t)$, $y(t)$ периодические с общим периодом $L = 2S_0/|\varphi_3|$, где S_0 — площадь фигуры U^* . Проекция $(x, y)(t)$ экстремали на плоскость Минковского $z = v = 0$ с нормой F имеет вид

$$x(t) = \frac{h_2(t) - \varphi_2}{\varphi_3}, \quad y(t) = -\frac{h_1(t) - \varphi_1}{\varphi_3} \quad (33)$$

и представляет собой параметризованную длиной дуги траекторию на изопериметрике. При этом $h_1 = h_1(\theta(t))$, $h_2 = h_2(\theta(t))$ задаются формулами (20), $\theta = \theta(t)$ — обратная функция к функции $t(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} (r^2(\xi)/\varphi_3) d\xi$; $z(t) = \frac{t - \varphi_1 x(t) - \varphi_2 y(t)}{2\varphi_3}$ равно ориентированной площади на евклидовой плоскости с прямоугольными координатами x , y , зачерчиваемой прямолинейным отрезком, соединяющим начало с точкой $(x(\tau), y(\tau))$, $\tau \in [0, t]$. Кроме того, $v = v(t)$ определяется формулой (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения о функции $\theta(t)$ вытекают из (22). Из (15) и (19) следует, что аналогично второму закону Кеплера радиус-вектор-функция $h(\tau) = (h_1(\tau), h_2(\tau)) \in U^*$, $t_1 \leq \tau \leq t_2$, зачерчивает в плоскости h_1, h_2 (или, если угодно, u_1, u_2 или x, y) со стандартной евклидовой метрикой ориентированную площадь $(\varphi_3/2)(t_2 - t_1)$. Следовательно, $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — периодическая функция с периодом $L = 2S_0/|\varphi_3|$, где S_0 — площадь фигуры U^* . При этом из (15), (17) и (6) следуют формулы (33), т. е. проекция $(x, y)(t)$ траектории $(x, y, z, v)(t)$ лежит на границе $I(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ фигуры, получаемой поворотом фигуры $U^*/|\varphi_3|$ на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг центра (начала координат) с последующим сдвигом на вектор $(-\frac{\varphi_2}{\varphi_3}, \frac{\varphi_1}{\varphi_3})$. Таким образом, аналогично случаю группы Гейзенберга с левоинвариантной субфинслеровой метрикой, рассмотренному в [3], $I(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — изопериметрикс плоскости Минковского с нормой F [4].

Аналогично [3] из (33) следует, что $(x(t), y(t))$ — периодическая кривая на $I(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ с указанным выше периодом L . Из (29) и (33) получаем, что

$$z(t) = (t - \varphi_1 x(t) - \varphi_2 y(t))/(2\varphi_3) = (\varphi_3 t - \varphi_1 h_2(t) + \varphi_2 h_1(t))/(2\varphi_3^2), \quad (34)$$

$$z(L) = L/(2\varphi_3) = S_0/(|\varphi_3|\varphi_3). \quad (35)$$

Утверждение предложения 4 о функции $z(t)$ вытекает из (6). Так как $(x(t), y(t))$ лежит на изопериметрике, проходимом по часовой стрелке (против часовой стрелки), если $\varphi_3 < 0$ ($\varphi_3 > 0$), то $z(t)$ — монотонная функция. В частности, $z(L)$ — ориентированная площадь фигуры, охватываемой изопериметриком $I(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, или, что то же, площадь фигуры $U^*/|\varphi_3|$, взятая со знаком, соответствующим знаку $z(L)$.

Последнее утверждение доказано раньше. $\square$

2.3. Пусть $\varphi_4 \neq 0$.

Лемма 1. Если функция $\theta(t)$ постоянна на каком-то невырожденном интервале $J \subset \mathbb{R}$, то на J

$$x(t) \equiv -\frac{\varphi_3}{\varphi_4}, \quad y(t) = y_0 + \frac{2\varphi_4(t-t_0)}{2\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}, \quad z(t) = z_0 + \frac{\varphi_3(t-t_0)}{\varphi_3^2 - 2\varphi_2\varphi_4}, \quad (36)$$

$$v(t) = v_0 + \frac{\varphi_3^2(t-t_0)}{6\varphi_4(2\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2)}, \quad (37)$$

где $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, t_0 — ближайшая к нулю точка интервала J ; v_0 вычисляется по $x_0 = -\frac{\varphi_3}{\varphi_4}$, y_0 , z_0 и (29) при $t = t_0$.

В частности, при $\varphi_3 = 0$

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) = y_0 + \frac{t-t_0}{\varphi_2}, \quad z(t) \equiv z_0, \quad v(t) \equiv v_0 = (t_0 - \varphi_2 y_0)/(3\varphi_4). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\theta(t) \equiv \theta_0$ на некотором интервале J , то $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv -\varphi_3/\varphi_4$, $h_2(t) = \varphi_2 - \varphi_3^2/(2\varphi_4)$, $t \in J$, вследствие (22) и (13). Из (6) и (18) вытекает, что тогда $u_1(t) \equiv 0$, $u_2(t) = 1/h_2(t) \equiv 2\varphi_4/(2\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2)$, $t \in J$, и функция $y(t)$ на интервале J определяется вторым равенством (36). Вследствие вычисленного значения u_2 и (7) функция $z(t)$ на интервале J определяется третьим равенством (36). Равенство (37) вытекает из (8) и первого равенства в (36). Равенства (38) — следствия из (36), (37) и (29). $\square$

Лемма 2. Пусть существуют $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $\Theta_1 < \Theta_2$, правая часть в (23) положительна при $\theta \in (\Theta_1, \Theta_2)$ и равна нулю для $\theta = \Theta_1$ и $\theta = \Theta_2$, $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — допустимая принципом максимума функция. Тогда $\varphi_4 u_1(\theta) > 0$ ($\varphi_4 u_1(\theta) < 0$) для $\theta \in (\Theta_1, \Theta_2)$, достаточно близких к Θ_1 (соответственно Θ_2), см. (27). Если $\theta(t_0) = \Theta_1$ ($\theta(t_0) = \Theta_2$) и $\theta(t) \neq \Theta_1$ ($\theta(t) \neq \Theta_2$) для всех $t < t_0$ или $t > t_0$, достаточно близких к t_0 , то $\dot{\theta}(t)(t-t_0) > 0$ ($\dot{\theta}(t)(t-t_0) < 0$) для этих t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не приводя детального доказательства, отметим лишь, что второе утверждение леммы — следствие первого и (22). $\square$

Теорема 2. При $\varphi_4 \neq 0$ каждая экстремаль с началом в единице на группе Энгеля определяется уравнениями (31), (32) (с произвольными измеримыми функциями указанного вида под интегралами и непрерывно дифференцируемой функцией $\theta = \theta(t)$, удовлетворяющей (22), (23)),

$$z(t) = -\frac{1}{\varphi_4} \left(r(\theta(t)) \cos \theta(t) - \varphi_1 + \left(\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4 x(t) \right) y(t) \right), \quad (39)$$

$$v(t) = \frac{1}{3\varphi_4} \left(t - \varphi_1 x(t) - \varphi_2 y(t) - \left(2\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi_4 x(t) \right) z(t) \right). \quad (40)$$

Положим

$$\theta_0 := \theta(0), \quad \mathcal{E}_0 = \max_{h \in U^*} (-\varphi_4 h_2), \quad \mathcal{E}_{-1} = \min_{h \in U^*} (-\varphi_4 h_2).$$

Возможны следующие случаи.

1. Пусть $\varphi_3 \neq 0$ и $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$. Тогда $\theta(t), t \in \mathbb{R}$, — обратная функция к функции $t(\theta)$, определяемой формулой

$$t(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r^2(\xi) d\xi}{\varphi_3 \sqrt{1 + (2\varphi_4/\varphi_3^2)(r(\xi) \sin \xi - \varphi_2)}}, \quad r(\theta_0) \sin \theta_0 = \varphi_2. \quad (41)$$

2. Пусть $\varphi_3 = 0$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{-1}$. Тогда $\theta(t) \equiv \theta_0$ и искомая экстремаль — метрическая прямая (30).

3. Пусть $\mathcal{E}_{-1} < \mathcal{E} < \mathcal{E}_0$. Тогда для некоторых чисел $t_1, t_2, t_1 < t_2$, любых $t \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\theta(t + 2k(t_2 - t_1)) = \theta(t), \quad \dot{\theta}(t_i + t) = -\dot{\theta}(t_i - t), \quad \theta(t_i + t) = \theta(t_i - t), \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

3.1. Если $\varphi_3 \neq 0$, то в равенствах (42) $t_i = t(\theta_i)$, $i = 1, 2$, вычислены по формуле (41), где $\theta_1 \neq \theta_2$ — ближайшие к θ_0 числа, в которых правая часть в (23) равна нулю и $\varphi_3(\theta_2 - \theta_1) > 0$.

3.2. Если $\varphi_3 = 0$, то $\theta_2 \neq \theta_1 = \theta_0$, в равенствах (42) $t_1 = 0, t_2 = t(\theta_2)$, где

$$t(\theta) = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r^2(\xi) d\xi}{\sqrt{2\varphi_4(r(\xi) \sin \xi - \varphi_2)}}, \quad r(\theta_0) \sin \theta_0 = \varphi_2, \quad (43)$$

и в правой части стоит знак $+$ ($-$), если $\varphi_4(\theta_2 - \theta_0) > 0$ ($\varphi_4(\theta_2 - \theta_0) < 0$). Здесь $\theta_2 \neq \theta_0$ такое, что $h_2(\theta_0) = h_2(\theta_2)$ и $\varphi_4(h_2(\theta) - h_2(\theta_0)) > 0$ для любого θ из интервала $I = (\min(\theta_0, \theta_2), \max(\theta_0, \theta_2))$.

4. Пусть $\varphi_3 \neq 0$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. Тогда существуют ближайшие к θ_0 числа θ_1, θ_2 такие, что $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ и правая часть в (23) при $\theta = \theta_i, i = 1, 2$, равна нулю. Если несобственные интегралы (41) при $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ расходятся, то $\theta(t) \in (\theta_1, \theta_2), t \in \mathbb{R}$, — обратная функция к функции $t(\theta)$, определяемой формулой (41). Если хотя бы один из несобственных интегралов (41) сходится при $\theta = \theta_1$ и/или $\theta = \theta_2$, то функция $\theta(t)$ не единственна и может принимать постоянные значения на некоторых отрезках произвольной длины, причем на каждом из этих отрезков справедливы формулы (36), (37).

5. Пусть $\varphi_3 = 0$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. Тогда существует наибольший по включению отрезок $[\theta_1, \theta_2], \theta_1 \leq \theta_2$, такой, что $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$ и $h_2(\theta) = \varphi_2$ для любого $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Если $\theta_0 = \theta_2$ (соответственно $\theta_0 = \theta_1$), то обозначим через $t(\theta)$ несобственный интеграл (43) для $\theta \in [\theta_0, \theta_1 + 2\pi]$ (соответственно $\theta \in [\theta_1 - 2\pi, \theta_0]$) без $+$ и $-$.

Тогда $\theta(t) \equiv \theta_0$ и искомая экстремаль — метрическая прямая (30) в следующих случаях:

5.1) $\theta_1 = \theta_0 = \theta_2$ и $t(\theta) = \infty$ при $\theta \nearrow \theta_0$ и при $\theta \searrow \theta_0$;

5.2) $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$;

5.3) $\theta_0 = \theta_1 < \theta_2$ и $t(\theta) = \infty$ при $\theta \nearrow \theta_0$;

5.4) $\theta_0 = \theta_2 > \theta_1$ и $t(\theta) = \infty$ при $\theta \searrow \theta_0$.

В остальных случаях функция $\theta(t)$ не единственна и может принимать постоянные значения на некоторых отрезках произвольной длины, причем на каждом из этих отрезков справедливы формулы (38).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из теоремы 1 и (13), (20), (29).

Докажем утверждения теоремы о функции $\theta(t)$. Для этого, зная знак производной $\dot{\theta}(\theta)$, из (23) найдем $\dot{\theta}(\theta)$, где $\dot{\theta}$ обозначает производную по t . Интегрируя эту функцию, найдем $\theta(t)$.

1. Указанные условия эквивалентны тому, что $\varphi_3 \neq 0$ и правая часть в (23) положительна при всех $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда вследствие (22), (23)

$$\dot{\theta}(\theta) = (\varphi_3/r^2(\theta))\sqrt{1 + (2\varphi_4/\varphi_3^2)(r(\theta)\sin\theta - \varphi_2)}, \quad (44)$$

откуда вытекает (41). При этом на основании (22), (44)

$$x(t) = (\varphi_3/\varphi_4)(\sqrt{1 + (2\varphi_4/\varphi_3^2)(r(\theta(t))\sin\theta(t) - \varphi_2)} - 1), \quad (45)$$

а $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определяется формулой (32).

2. Указанные условия эквивалентны тому, что $\varphi_3 = 0$ и правая часть в (23) неположительна при всех $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда $h_2(\theta_0) = \varphi_2$ — максимальное (соответственно минимальное) значение второй компоненты для $h \in U^*$, если $\varphi_4 > 0$ (соответственно $\varphi_4 < 0$), $\dot{\theta} \equiv 0$, $\theta(t) \equiv \theta_0$, и вследствие (22) получаем $x(t) \equiv 0$ и метрические прямые (30).

Опуская далее некоторые детали, заметим, что в доказательстве остальных утверждений используется лемма 2.

3. Указанные условия эквивалентны тому, что правая часть в (23) принимает и положительные, и отрицательные значения.

3.1. Рассмотрим сначала случай $\varphi_3 \neq 0$. Ясно, что существуют θ_1, θ_2 такие, как в формулировке п. 3 теоремы 2. Вследствие свойства рефлексивности операции перехода к двойственному нормированному пространству в конечномерном случае для всех достаточно близких к θ_1 (соответственно θ_2) значений θ первая формула в (27) определяет значения $u_1(\theta) \neq 0$ одного знака, но противоположных знаков для θ_1 и θ_2 . Тогда $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$, если $\varphi_3 > 0$; $\theta_2 < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 + 2\pi$, если $\varphi_3 < 0$, оба значения $t_i = t(\theta_i)$, $i = 1, 2$, конечны и на отрезке $[t_1, t_2]$ определена монотонная непрерывно дифференцируемая функция $\theta(t)$ с нулевыми односторонними производными на концах отрезка. На основании изложенного выполнены равенства (42), которые однозначно определяют функцию $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3.2. Ясно, что в случае $\varphi_3 = 0$ существует θ_2 при $\theta_1 = \theta_0$, как в формулировке п. 3.2. Вследствие формулы Тейлора, примененной к соответствующим односторонним производным первого порядка, подкоренная функция в знаменателе подынтегральной функции в (43) имеет порядок $1/2$ относительно $(\xi - \theta_0)^2$ и $(\xi - \theta_1)^2$ при $\xi \in I$ и $\xi \rightarrow \theta_0$, $\xi \rightarrow \theta_2$ соответственно. Поэтому функция $t(\theta)$, вычисленная по формуле (43), конечна при всех $\theta \in \bar{I}$, $t_2 > 0$ и при $\varphi_4(\theta_2 - \theta_0) > 0$ (соответственно $\varphi_4(\theta_2 - \theta_0) < 0$) на отрезке $[0, t_2]$ определена возрастающая (соответственно убывающая) функция $\theta(t)$, обратная к функции $t(\theta)$, где в правой части формулы (43) стоит знак $+$ (соответственно знак $-$). Вследствие рефлексивности для всех достаточно близких к θ_0 (соответственно θ_2) значений $\theta \in I$ первая формула в (27) определяет значения $u_1(\theta) \neq 0$ одного знака, но противоположных знаков для θ_0 и θ_2 . Поэтому функция $\theta(t) \in \bar{I}$, $t \in \mathbb{R}$, четная, периодическая с периодом $2t_2$, попеременно возрастающая и убывающая на соответствующих промежутках длины t_2 и выполнены соотношения (42), однозначно определяющие функцию $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Вследствие изложенного функция $x(t)$ при $t \in [0, t_2]$ определяется формулой

$$x(t) = (\operatorname{sgn}(\dot{\theta}(t))/\varphi_4)\sqrt{2\varphi_4(r(\theta(t))\sin\theta(t) - \varphi_2)}, \quad (46)$$

она нечетная, $x(t + 2kt_2) = x(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, и $x(t + t_2) = -x(t_2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. Функция $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определяется формулой (32).

4. Указанные условия эквивалентны тому, что $\varphi_3 \neq 0$, правая часть в (23) неотрицательна и существует единственное число $h_2^0 \neq \varphi_2$ с некоторым $h = (h_1, h_2^0) \in \partial U^*$ такое, что правая часть в (23) равна нулю. Ясно, что h_2^0 — минимальное (соответственно максимальное) значение второй компоненты для точек из U^* , если $\varphi_4 > 0$ (соответственно $\varphi_4 < 0$) и $h_2^0 = \varphi_2 - \varphi_3^2/2\varphi_4$ вследствие (22) и (13). При этом вектор $h \in \partial U^*$ с $h_2 = h_2^0$ не единственный, если ∂U^* не строго выпукло в точках h с $h_2 = h_2^0$, другими словами, если ∂U недифференцируема в точке $u^0 = (0, 1/h_2^0)$. В любом случае существуют ближайшие к θ_0 значения $\theta_1 < \theta_0$ и $\theta_2 > \theta_0$ такие, что $r(\theta_i) \sin \theta_i = h_2^0$, $i = 1, 2$.

4.1. Если $t(\theta_i) = \pm\infty$, $i = 1, 2$, то $\theta(t) \in (\theta_1, \theta_2)$, $t \in \mathbb{R}$, — обратная функция к функции $t(\theta)$, определяемой формулой (41). Например, это верно, если подкоренная функция в знаменателе подынтегральной функции в (41) имеет порядки не ниже первого относительно $(\xi - \theta_1)^2$, $(\xi - \theta_2)^2$ при $\xi \searrow \theta_1$, $\xi \nearrow \theta_2$ соответственно (что выполняется, если существуют обычные вторые производные $r''(\theta_i)$, $i = 1, 2$). Указанные условия могут нарушаться даже при существовании обычных производных $r'(\theta_i)$, $i = 1, 2$.

4.2. Пусть $t_i := t(\theta_i)$ конечно при $i = i_1$ и бесконечно при $i = i_2 \neq i_1$. Тогда $\dot{\theta}(t_{i_1}) = 0$, $t_{i_2} = \operatorname{sgn}(\phi_3(i_2 - i_1))\infty$ и в интервале I между t_{i_1} и t_{i_2} определена функция $\theta(t)$. Для всех $t \in \mathbb{R} - I$ экстремаль может определяться формулой $\theta(t) = \theta(2t_{i_1} - t)$. Может, и $\theta(t) \equiv \theta_{i_1}$ тогда и только тогда, когда t принадлежит замыканию некоторого непустого открытого интервала $I_1 \subset \mathbb{R} - I$, где $\overline{I_1} \cap \overline{I} = t_{i_1}$. Если I_1 конечен, то график функции $\theta(t)$ на $\mathbb{R} - (\overline{I} \cup \overline{I_1}) := I_2$ последнего решения получается из графика функции первого решения сдвигом интервала $\mathbb{R} - \overline{I}$ в интервал I_2 .

4.3. Пусть оба t_i , $i = 1, 2$, конечны. Тогда $\dot{\theta}(t_1) = \dot{\theta}(t_2) = 0$ и на отрезке I с концами $t_1 \neq t_2$ однозначно определена функция $\theta = \theta(t)$. При условии 4.3.1: $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, график непрерывно дифференцируемой функции $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, может допускать участки, полученные из графика функции на I или его отражения относительно прямой $t = t_2$ комбинацией вертикальных параллельных сдвигов на величины, равные $2k\pi$ при некоторых $k \in \mathbb{Z}$, и горизонтальных параллельных сдвигов с примыкающими замкнутыми промежутками произвольной длины постоянства функции $\theta = \theta(t)$. При условии 4.3.2: $\theta_2 < \theta_1 + 2\pi$, допустимы все непрерывные функции $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, графики которых на некоторых отрезках переменной t длины $|t_2 - t_1|$ являются горизонтальными сдвигами ее графика на I или его отражения относительно $t = t_2$ со значениями θ_1 и θ_2 на концах этих отрезков, с примыкающими замкнутыми промежутками произвольной длины постоянства функции $\theta = \theta(t)$.

5. Указанные условия эквивалентны тому, что $\varphi_3 = 0$ и правая часть в (23) неотрицательна при всех $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда $h_2(\theta_0) = \varphi_2$ — минимальное (соответственно максимальное) значение второй компоненты для $h \in U^*$, если $\varphi_4 > 0$ (соответственно $\varphi_4 < 0$). При этом вектор $h \in \partial U^*$ с $h_2 = \varphi_2$ не единственный, если ∂U^* не строго выпукло в точках h с $h_2 = \varphi_2$, другими словами, если ∂U недифференцируема в точке $u^0 = (0, 1/\varphi_2)$. В общем случае существует наибольший по включению отрезок $[\theta_1, \theta_2]$, $\theta_1 \leq \theta_2$, такой, что $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$ и $h_2(\theta) = \varphi_2$ для любого $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Снова рассмотрим несобственный интеграл (43). Легко видеть, что $\theta(t) \equiv$

θ_0 , и получим метрическую прямую вида (30) в случаях 5.1–5.4 теоремы 2. Во всех остальных случаях тоже могут быть такие решения.

Укажем все другие возможные экстремали в оставшихся случаях:

5.5) $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, $t(\theta)$ конечно при $\theta \searrow \theta_0$ и $t(\theta) = \infty$ при $\theta \nearrow \theta_0$;

5.6) $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, $t(\theta)$ конечно при $\theta \nearrow \theta_0$ и $t(\theta) = \infty$ при $\theta \searrow \theta_0$;

5.7) $\theta_1 < \theta_0 = \theta_2$ и $t(\theta)$ конечно при $\theta \searrow \theta_0$;

5.8) $\theta_0 = \theta_1 < \theta_2$ и $t(\theta)$ конечно при $\theta \nearrow \theta_0$;

5.9) $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, $t(\theta)$ конечно при $\theta \searrow \theta_0$ и при $\theta \nearrow \theta_0$.

Во всех этих случаях может быть, что $\theta(t) \equiv \theta_0$ на некотором конечном или бесконечном замкнутом интервале J , включающем 0. Предположим, что $J \neq \mathbb{R}$ и $\theta(t) \neq \theta_0$ для всех $t \notin J$, достаточно близких к J .

(а) Рассмотрим случаи 5.7 при условии $t(\theta_1 + 2\pi) = \infty$ и 5.5 (случаи 5.8 при условии $t(\theta_2 - 2\pi) = \infty$ и 5.6). Если $\sup(J) = t_2 < +\infty$, то в интервале J_2 между t_2 и $+\infty$ определена функция $\theta(t) = \Theta(t - t_2)$, где $\Theta(t)$, $t \geq 0$, обратная к функции $t(\theta)$, причем в правой части равенства (43) стоит знак $+$ (соответственно знак $-$). Если $\inf(J) = t_1 > -\infty$, то в интервале J_1 между t_1 и $-\infty$ определена функция $\theta(t) = \Theta(t_1 - t)$.

При тех же знаках на основании (22), (44), функции $x(t)$ и $y(t)$ определяются формулами (46) и (32) соответственно.

(б) Пусть в случае 5.7 $t_3 := t(\theta_1 + 2\pi)$ конечно. Тогда $t_3 > 0$ и на отрезке $I = [0, t_3]$ определена функция $\Theta(t)$, обратная к функции $t(\theta)$, задаваемой правой частью формулы (43) со знаком $+$. Допустимы все непрерывные функции $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что $\theta(0) = \theta_0$ и их графики на некоторых отрезках переменной t длины t_3 являются горизонтальными сдвигами графика функции $\Theta(t)$ на I или его отражения относительно вертикальной прямой $t = t_3$ с примыкающими замкнутыми интервалами произвольной длины, на которых θ принимает постоянные значения θ_0 или $\theta_1 + 2\pi$. Во всех рассмотренных случаях функции $x(t)$ и $y(t)$ определяются формулами (46) и (32) соответственно. Аналогично рассматривается случай 5.8 при условии, что $t_2 := t(\theta_2 - 2\pi)$ конечно.

5.9. Пусть $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, $t(\theta)$ конечно при $\theta \searrow \theta_0$ и $t_3 := t(\theta_1 + 2\pi)$.

Тогда $t_3 > 0$ и допустимы все непрерывно дифференцируемые функции $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что $\theta(0) = \theta_0$ и их графики имеют участки, полученные из графика функции $\Theta(t)$ на I из п. 5.7(б) или его отражения относительно прямой $t = t_3$ комбинацией вертикальных параллельных сдвигов на величины, равные $2k\pi$ при некоторых $k \in \mathbb{Z}$, и горизонтальных параллельных сдвигов с примыкающими замкнутыми интервалами произвольной длины постоянства θ . $\square$

§ 5. О случаях с квадратами в качестве областей управления

Норма F_α на $D(e)$ определяется формулой

$$F_\alpha(u_1, u_2) = \max\{|u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha|, |-u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha|\}, \quad \alpha \in [0, \pi/2). \quad (47)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В работе [7] рассматривались такие метрики при $0 \leq \alpha < \pi/4$.

Единичный шар $U_\alpha = \{(u_1, u_2) : F_\alpha(u_1, u_2) \leq 1\}$ получается из единичного шара $U := U_0$ нормы $F(u_1, u_2) = \max\{|u_1|, |u_2|\}$ поворотом на угол α , $\partial U_\alpha -$

описанный вокруг единичной окружности $S^1 = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 = 1\}$ квадрат с четырьмя точками касания. Поляра U_α^* — выпуклая оболочка этих точек, и ∂U_α^* — изопериметрикс плоскости Минковского $(D(e), F_\alpha)$.

Справедливо

Предложение 5. Полярное уравнение квадрата ∂U_α^* имеет вид

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos(\theta - \alpha - \frac{\pi}{4})}, \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad r\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = r(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

При этом

$$r'(\theta) = \frac{\sqrt{2} \sin(\theta - \alpha - \frac{\pi}{4})}{2 \cos^2(\theta - \alpha - \frac{\pi}{4})}, \quad \alpha < \theta < \alpha + \frac{\pi}{2},$$

$$-1 \leq r'(\alpha) \leq 1, \quad r'\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = r'(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Из (47) следует, что $F_\alpha(0, 1) = \cos \alpha$, если $0 \leq \alpha \leq \pi/4$, и $F_\alpha(0, 1) = \sin \alpha$, если $\pi/4 < \alpha < \pi/2$; уравнения (30) в аномальном случае примут вид

$$x(t) = z(t) = v(t) \equiv 0, \quad y(t) = \begin{cases} \pm \frac{t}{\cos \alpha}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \pi/4, \\ \pm \frac{t}{\sin \alpha}, & \text{если } \pi/4 < \alpha < \pi/2. \end{cases}$$

2.1. Пара $(\varphi_1, \varphi_2) = r(\theta_0)(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \in \partial U_\alpha^*$.

Сначала предположим, что точка (φ_1, φ_2) не является вершиной квадрата ∂U_α^* . Тогда (27) дает единственное решение $(u_1(t), u_2(t)) = (u_1(\theta_0), u_2(\theta_0))$, являющееся вершиной квадрата ∂U_α такой, что $\angle((u_1(\theta_0), u_2(\theta_0)), (\varphi_1, \varphi_2)) < \pi/4$, и система (6) имеет единственное решение — однопараметрическую подгруппу

$$x(t) = u_1(\theta_0)t, \quad y(t) = u_2(\theta_0)t, \quad z(t) \equiv 0, \quad v(t) \equiv 0.$$

Пусть точка (φ_1, φ_2) — одна из вершин квадрата ∂U_α^* . В этом случае найдется отрезок Δ (сторона квадрата ∂U_α) решений $(u_1, u_2) = (u_1(\theta_0), u_2(\theta_0))$ уравнений (27) таких, что $\angle((u_1, u_2), (\varphi_1, \varphi_2)) \leq \pi/4$. Всякая измеримая функция $(u_1(t), u_2(t)) \in \Delta$ определяет траекторию (31), (32), (7), (8).

В любом случае получаем только метрические прямые.

ПРИМЕР 1. Если $\alpha = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$, $\varphi_1 = 1$, то $\theta(t) \equiv \theta_0 = 0$, $t \in \mathbb{R}$, и произвольная вектор-функция вида

$$u(t) = (1, u_2(t)), \quad -1 \leq u_2(t) \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (48)$$

с измеримой вещественной функцией $u_2 = u_2(t)$ и ковекторная функция $\psi(t) \equiv (1, 0, 0, 0)$ удовлетворяют принципу максимума Понтрягина при $t \in \mathbb{R}$, причем соответствующая (экстремальная) траектория $g = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с началом $g(0) = e$ — метрическая прямая. Таким образом, в общем случае при поиске экстремалей и даже геодезических левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Ли исключить управление из гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина нельзя. Это утверждение верно для любой нестрогой выпуклой области управления $U \subset D(e)$, другими словами, поляры U^* с недифференцируемой границей ∂U^* .

2.2. Рассуждая, как при доказательстве предложения 4, получим, что $h(t)$, $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — периодические функции с периодом $L = 4/|\varphi_3|$ и выполнены равенства (33)–(35) и (8), в частности, проекция $(x, y)(t)$ траектории $(x, y, z, v)(t)$ лежит на квадрате, полученном из квадрата $\partial U_\alpha^*/|\varphi_3|$ путем сдвига

его центра в точку $(-\frac{\varphi_2}{\varphi_3}, \frac{\varphi_1}{\varphi_3})$. Управление кусочно постоянно на дополнении к счетному множеству изолированных точек.

2.3. Возможны случаи 1, 2, 3.1 и 3.2 теоремы 2. Случай 4 теоремы 2 возможен только в варианте 4.3, рассмотренном в доказательстве теоремы 2, причем вариант 4.3.2 возможен только при $\alpha = \pi/4$. Случай 5 теоремы 2 возможен в вариантах 5.2, 5.7(b), 5.8(b) (при $\alpha = \pi/4$), 5.9 (при $\alpha \neq \pi/4$), рассмотренных в доказательстве теоремы 2. Описание всех возможных вариантов функции $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в этих случаях приведено в доказательстве теоремы 2, функции $x(t)$, $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, находятся по формулам (31), (32) с использованием предложения 5, а функции $z(t)$, $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — по формулам (39), (40).

§ 6. Экстремали левоинвариантной субфинслеровой квазиметрики на группе Энгеля

Доказательства и результаты статьи справедливы и для случая левоинвариантной субфинслеровой квазиметрики на группе Энгеля. Квазиметрика обладает всеми свойствами метрики, кроме, возможно, свойства симметричности $d(p, q) = d(q, p)$. Для этого в текст необходимо внести лишь следующие изменения.

1. В качестве U взять произвольную выпуклую (двумерную) фигуру, содержащую внутри 0, возможно, $U \neq -U$.

2. Вместо ссылок на свойство рефлексивности при переходе к двойственному нормированному пространству в конечномерном случае сослаться на теорему о биполяре $U^{**} = U$ (см. [18, теорема 14.5]).

Благодарность. Авторы благодарят Л. В. Локуциевского за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берестовский В. Н. Однородные пространства с внутренней метрикой // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 2. С. 268–271.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
3. Берестовский В. Н. Геодезические неголономных левоинвариантных метрик на группе Гейзенберга и изопериметрики плоскости Минковского // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 3–11.
4. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
5. Busemann H. The isoperimetric problem in the Minkowski plane // Amer. J. Math. 1947. V. 69, N 4. P. 863–871.
6. Noskov G. A. Geodesics on the Heisenberg group: an elementary approach // Sib. Electronic Math. Rep. 2008. V. 5. P. 177–188.
7. Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Субфинслеровы структуры на группе Энгеля // Докл. АН. 2019. Т. 485, № 4. С. 395–398.
8. Локуциевский Л. В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 8. С. 120–148.
9. Clelland J. N., Moseley C. G. Sub-Finsler geometry in dimension three // Differ. Geom. Appl. 2006. V. 24, N 6. P. 628–651.
10. Clelland J. N., Moseley C. G., Wilkens G. R. Geometry of sub-Finsler Engel manifolds // Asian. J. Math. 2007. V. 11. P. 699–726.
11. Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
12. Ardentov A. A., Sachkov Yu. L. Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // J. Math. Sci. 2013. V. 195, N 3. P. 369–390.
13. Ardentov A. A., Sachkov Yu. L. Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group // ESAIM: COCV. 2015. V. 21, N 4. P. 958–988.

14. Ardentov A. A., Sachkov Yu. L. Maxwell strata and cut locus in sub-Riemannian problem on Engel group // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22, N 8. P. 909–936.
15. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. ПМП, (ко)присоединенное представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 2. С. 43–64.
16. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
17. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
18. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 9 января 2020 г.

После доработки 6 апреля 2020 г.

Принята к публикации 17 июня 2020 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Зубарева Ирина Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644043
i_gribanova@mail.ru